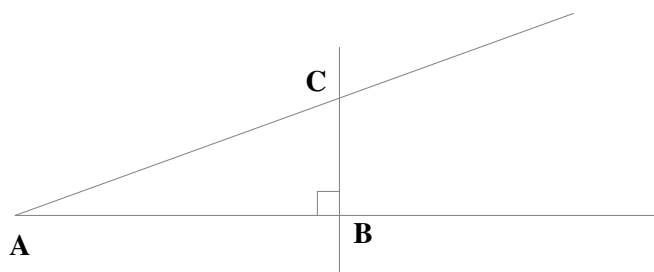


Cosinus d'un angle

1. Activité d'approche

L'objectif de cette activité est de mettre en évidence le lien qui existe entre la valeur de l'angle d'aigu d'un triangle rectangle, son **côté adjacent** et l'hypoténuse.

Pour cela, il vous faut vous répartir la tâche en plusieurs groupes et réaliser plusieurs triangles rectangles comme ci-dessous, en changeant la longueur AB et l'angle $\widehat{BAC}$:



Compléter alors un tableau sur le modèle ci-dessous avec des angles de 15° , 30° , 45° et 60° ,,,

	Valeurs	$\cos(15^\circ)$
AB	4 cm	
AC		
$\frac{AB}{AC}$		
AB	6 cm	
AC		
$\frac{AB}{AC}$		
AB	8 cm	
AC		
$\frac{AB}{AC}$		

Que constate-t-on à chaque fois ?

2. Définition et emploi

Dans un triangle rectangle, le cosinus d'un angle aigu c'est le quotient de la longueur du côté adjacent par celle de l'hypoténuse...

a) **Utilisation n° 1** : trouver la valeur de l'angle connaissant ses 2 côtés.

(Attention : calculatrice obligatoirement réglée en degrés !)

Pour trouver l'angle, il faut absolument fournir à la calculatrice la valeur du quotient et utiliser la touche **Cos⁻¹** : on l'obtient soit en allant dans le menu TRIG de certaines calculatrices de marque TEXAS, soit en appuyant sur **SHIFT** (ou **Seconde**, ou **2nd...**) puis **COS**.

Exemple du triangle rectangle 3 - 4 - 5 : recherche de la mesure de l'angle compris entre les côtés de valeurs 3 et 5,

Votre calculatrice fonctionne "à l'endroit" : $\cos^{-1}(3 \div 5) = 51,3...^\circ$

Votre calculatrice fonctionne "à l'envers" : $(3 \div 5) \cos^{-1} = 51,3...^\circ$

N-B : la calculatrice de Windows fonctionne avec la notation inversée, le symbole de la division y est le trait oblique /...

Cosinus d'un angle : rappels et bilan

Qu'est-ce donc que le Cosinus d'un angle ?

Dans un triangle rectangle, on désigne sous le nom de Cosinus d'un angle le rapport (= quotient) des longueurs des deux côtés de cet angle : le petit (le côté adjacent) par le grand (l'hypoténuse)

D'après ce qui précède :

$$\cos \widehat{ABC} = \frac{AB}{BC} = \frac{4}{8} = 0,5$$

Or, le triangle ci-contre est la moitié d'un triangle équilatéral, donc $\widehat{ABC} = 60^\circ$.

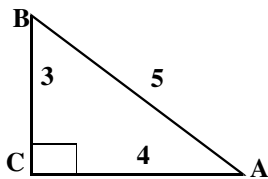
Et la calculatrice nous donne bien $\cos 60^\circ = 0,5$

Mais le Cosinus d'un angle, à quoi ça sert ?

1. Le Cosinus d'un angle sert à trouver la mesure de l'angle quand on connaît la longueur de ses deux côtés.

Exemple

Le triangle ci-contre est un triangle rectangle en C : la réciproque du théorème de Pythagore nous le montrerait facilement...



$$\cos \widehat{CBA} = \frac{BC}{BA} = \frac{3}{5} = 0,6$$

$$\cos \widehat{CAB} = \frac{AC}{AB} = \frac{4}{5} = 0,8$$

Trouver l'angle nécessite d'utiliser la fonction $\cos^{-1}$ de la calculatrice :

$$\cos^{-1}(0,6) \approx 53,13...^\circ$$

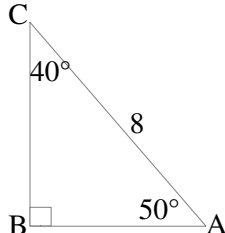
$$\cos^{-1}(0,8) \approx 36,86...^\circ$$

Cette fonction est accessible :

- sur certains modèles de calculatrices TEXAS par le menu TRIG : Seconde + PRB
- sur les autres par Seconde + Cos ou INV + Cos

2. Le Cosinus d'un angle sert à trouver la mesure d'un côté quand on connaît la longueur de l'autre côté et la mesure de l'angle.

a) Calcul du côté adjacent connaissant un angle aigu et l'hypoténuse

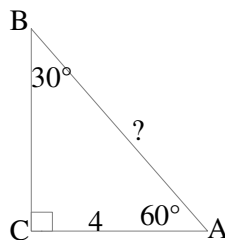


Dans le triangle ABC rectangle en B ci-contre :

$$\cos \widehat{BCA} = \frac{CB}{CA} \quad \text{d'où} \quad \cos 50^\circ = \frac{BC}{8} \quad \text{et} \quad BC = 8 \times \cos 50^\circ \approx 5,14...$$

$$\cos \widehat{BAC} = \frac{BA}{CA} \quad \text{d'où} \quad \cos 40^\circ = \frac{BA}{8} \quad \text{et} \quad BA = 8 \times \cos 40^\circ \approx 6,12...$$

b) Calcul de l'hypoténuse connaissant un côté de l'angle droit et l'angle entre les deux.



Dans le triangle ACB rectangle en C ci-contre :

$$\cos \widehat{CAB} = \frac{AC}{AB} \quad \text{d'où} \quad \cos 60^\circ = \frac{4}{AB} \quad \text{et} \quad AB = \frac{4}{\cos 60^\circ} = \frac{4}{0,5} = 8$$

Pour voir les dégourdis, je pourrais donner uniquement 30° et on n'a pas la valeur du côté adjacent...

Alors ?

Alors, on calcule $\hat{A}$ connaissant $\hat{B} = 30^\circ$: $\hat{A} = 90^\circ - \hat{B} = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$

et on calcule comme je viens de le faire ci-dessus

Et maintenant, ceux qui voudraient calculer BC ont deux solutions, utiliser :

* le théorème de Pythagore qui permet d'obtenir la valeur exacte $BC = 4\sqrt{3}$

* le cosinus de l'angle $\hat{B}$ connaissant maintenant $AB = 8$ et en procédant comme au 2. a) qui donnera la valeur approchée 6,9282032302755.....

Attention, la calculatrice de Windows fonctionne encore à l'envers par rapport à ce qu'on écrit dans un exercice :

On écrit en effet $\cos 30^\circ$, mais on tape $30 \cos$...

La valeur approchée ci-dessus a été tronquée après calcul ainsi : $8 * 30 \cos =$

On écrit en effet $\cos^{-1}(0,6)$, mais on tape : $0,6 \text{ Inv Cos}$ (dès le clic sur Inv apparaît $\cos^{-1}$ à la place de cos.)

TRIGONOMETRIE

Il ne faut pas confondre Sinus d'un angle, Cosinus d'un angle et Tangente d'un angle avec l'angle. Ils dépendent de l'angle mais ne lui sont pas égaux : la mesure de l'angle s'exprime avec une unité, mais Sinus d'un angle, Cosinus d'un angle et Tangente d'un angle n'ont pas d'unités, ce sont les quotients des longueurs de 2 côtés.

Sinus, Cosinus et Tangente servent pour

1. Calculer un angle

Avec le Sinus

$$\sin C = \frac{AB}{BC} = \frac{3}{5} = 0,6$$

D'où $C \approx 36,9^\circ$

Avec le Cosinus

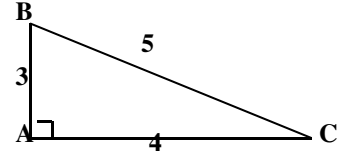
$$\cos C = \frac{AC}{BC} = \frac{4}{5} = 0,8$$

D'où $C \approx 36,9^\circ$

Avec la Tangente

$$\tan C = \frac{AB}{AC} = \frac{3}{4} = 0,75$$

D'où $C \approx 36,9^\circ$



Mais, dans votre exemple, on connaît les **3 côtés** ! *Comment faut-il faire si on ne connaît que deux côtés sur les 3 ?* Réponse : Et bien, il suffit d'utiliser l'une des 3 méthodes décrites ci-dessus ! *D'accord, mais laquelle ?*

Et bien tout dépend de la position des côtés que l'on connaît !

Il faut se poser la question : comment sont placés les côtés par rapport à mon angle ? En effet si on connaît :

Côté opposé
et
Hypoténuse } on utilise le **Sinus**

Côté adjacent
et
Hypoténuse } on utilise le **Cosinus**

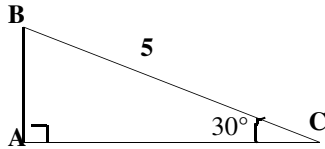
Côté opposé
et
Côté adjacent } On utilise la **Tangente**

2. Calculer la longueur d'un côté.

Recherche de la longueur d'un côté de l'angle droit connaissant un angle et l'hypoténuse
on se pose la question : suivante « *Comment est placé le côté dont je cherche la longueur, par rapport à l'angle ?* »

Recherche de la longueur de l'hypoténuse connaissant un angle et un côté de l'angle droit
on se pose la question : suivante « *Comment est placé le côté, dont je connais la longueur, par rapport à l'angle ?* »

Réponse :
« c'est le côté **opposé** ! »
On utilise donc le sinus :

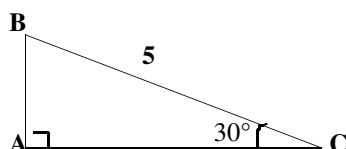


$$\sin C = \frac{AB}{BC}$$

$$\sin 30^\circ = \frac{AB}{5}$$

$$AB = 5 \times \sin 30^\circ = 2,5$$

Réponse :
« c'est le côté **adjacent** ! »
On utilise donc le cosinus :

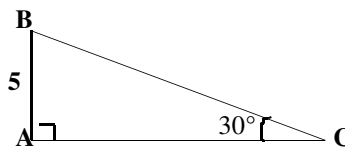


$$\cos C = \frac{AC}{BC}$$

$$\cos 30^\circ = \frac{AC}{5}$$

$$AC = 5 \times \cos 30^\circ \approx 4,33$$

Réponse :
« c'est le côté **opposé** ! »
On utilise donc le sinus :

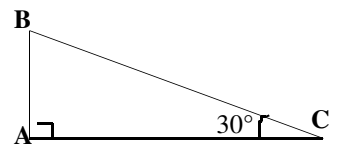


$$\sin C = \frac{AB}{BC}$$

$$\sin 30^\circ = \frac{5}{BC}$$

$$BC = \frac{5}{\sin 30^\circ} = 10$$

Réponse :
« c'est le côté **adjacent** ! »
On utilise donc le cosinus :



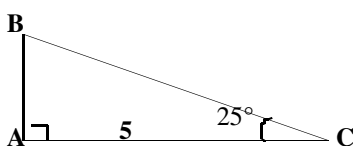
$$\cos C = \frac{AC}{BC}$$

$$\cos 30^\circ = \frac{5}{BC}$$

$$AC = \frac{5}{\cos 30^\circ} \approx 5,77$$

Recherche de la longueur d'un côté de l'angle droit connaissant la longueur de l'autre côté de l'angle droit et un angle.

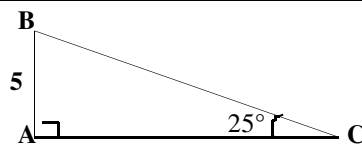
Là, pas de question à se poser, il faut utiliser la tangente : en effet, ici, l'hypoténuse n'intervient pas.



$$\tan C = \frac{AB}{AC}$$

$$\tan 25^\circ = \frac{AB}{5}$$

$$AB = 5 \times \tan 25^\circ \approx 2,33$$



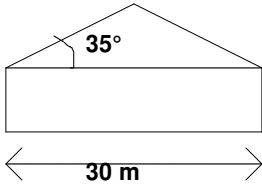
$$\tan C = \frac{AB}{AC}$$

$$\tan 25^\circ = \frac{5}{AC}$$

$$AC = \frac{5}{\tan 25^\circ} \approx 10,72$$

Fiche de travail *COSINUS*

1-



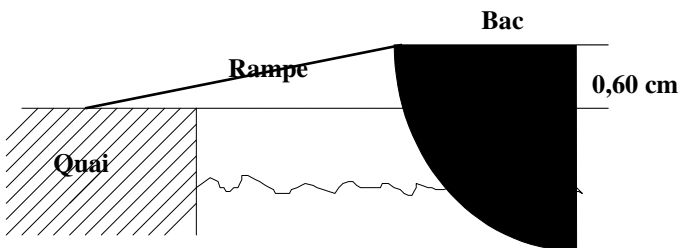
La pente du toit d'un hangard est 35° . Au sol le hangard couvre une surface qui est un rectangle de 30 m x 45 m. Quelle est la surface de la toiture ?

2- Une échelle glisse si elle ne fait pas avec le sol un angle d'au moins 65° .

Le sol est supposé horizontal.

Quelle hauteur atteint-elle, avec cet angle, sur un mur vertical si elle mesure 6 m de long ?

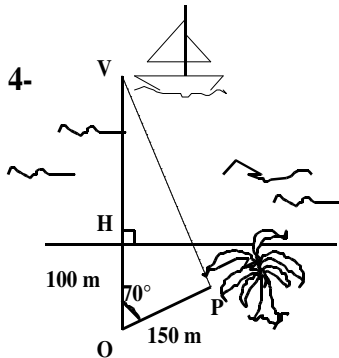
3-



Un bac dispose d'une rampe de 650 cm pour le chargement et le déchargement des véhicules. Sa plateforme domine le quai de 60 cm.

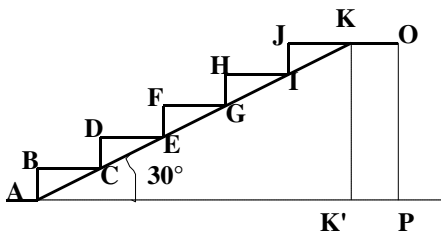
Quel est l'angle que fait la rampe avec l'horizontale ?

4-



Un voilier V est ancré au large... En partant du palmier P, perpendiculairement à (PV), il faut parcourir 150 m pour trouver l'observateur O, qui est en face du voilier. On est alors à 100 m de la côte, et l'on voit le Voilier et le Palmier sous un angle de 70° . Quelle est la distance du voilier à la côte ?

5-



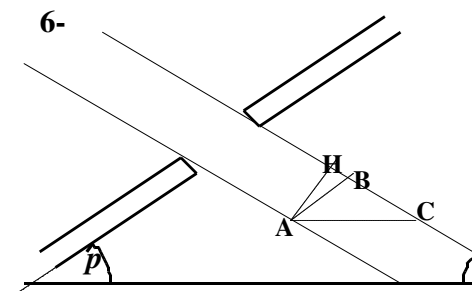
La distance OJ mesure 0,50 m et K est le milieu de [JO]

Calculer la longueur de chaque marche.

Calculer la hauteur OP de la rampe.

N-B : [BC], [DE], [FG], [HI] et [JK] sont les marches ([AB], [CD], [EF], [GH], [IJ] se nomment contre-marches)

6-



(AH) est perpendiculaire aux rayons du soleil,

(AB) est parallèle à la ligne de pente du toit,

(AC) est parallèle au sol.

Angles :

p angle de pente du toit = 40°

h angle de hauteur du soleil = 35°

Largeur de la lucarne

AB = 1,20 m

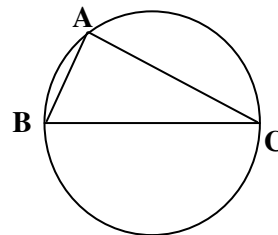
Calculer AH, puis en déduire la largeur AC de la tache de lumière.

Interrogation 4e

I Calculs dans le triangle rectangle

1. On considère le triangle ABC suivant tel que [BC] soit le diamètre du cercle et A est sur le cercle.

- ◆ Pourquoi le triangle ABC est-il un triangle rectangle ?
- ◆ On donne $BC = 7,5$ cm, $AB = 4,5$ cm. Calculer AC



2. Le triangle EFG suivant est-il un triangle rectangle ?

$EF = 5$ cm ; $FG = 12$ cm ; $EG = 13$ cm

II Puissances de dix

- ◆ Ecrire les nombres suivants en utilisant la notation scientifique :

0,00253

;

15000000

- ◆ Effectuer la somme suivante :

$$0,0625 \times 10^2 - 72,5 \times 10^{-2} + 0,000045 \times 10^5$$

- ◆ Calculer le produit suivant et donner le résultat sous la forme d'un nombre décimal :

$$1,25 \times 10^{-4} \times 0,25 \times 10^3 \times 0,8 \times 10^{-3} \times 4 \times 10^3$$

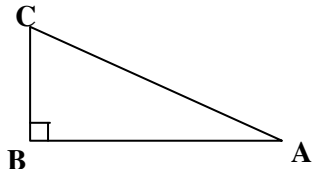
- ◆ Calculer le quotients suivant :

$$\frac{49 \times 10^{-2} \times 25 \times 10^3 \times 28 \times 10^{-3}}{56 \times 10^{-6} \times 35 \times 10^3}$$

- ◆ Remplacer les pointillés par le nombre qui convient :

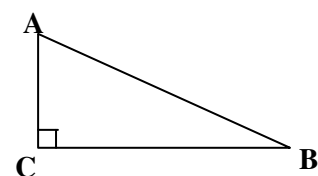
$$12,345478 = \dots \times 10^{-2} = 1,2345478 \times 10^{\dots} = \dots \times 10^4 = 0,000012345478 \times 10^{\dots}$$

III Cosinus



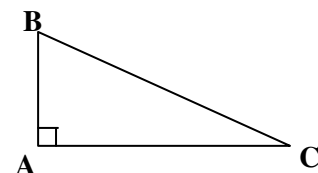
On donne $BC = 3$ cm et $AC = 8$ cm.

Combien mesure l'angle $\hat{A}$? Réponse attendue à $0,1^\circ$ près



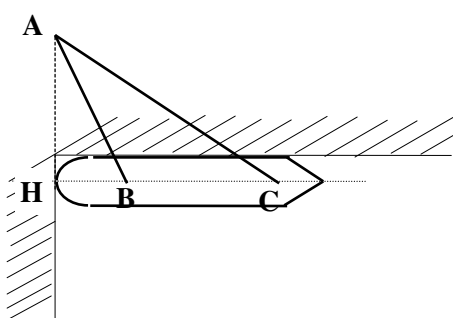
On donne $BC = 8$ cm et $ABC = 25^\circ$

Combien mesure le côté [AB] ? Réponse attendue à $0,1$ cm près



On donne $BC = 8$ cm et $ACB = 25^\circ$

Combien mesure le côté [AC] ? Réponse attendue à $0,1$ cm près



Un bateau est amarré le long d'un quai au moyen de 2 filins accrochés à la même borne d'amarrage A en 2 points B et C de l'axe du bateau.

On donne $H = 90^\circ$, $BH = 4,25$ m, $ACH = 30^\circ$ et $AB = 8,5$ m.

1. Dans le triangle AHB rectangle en H, calculer la mesure de l'angle B. En déduire la mesure de l'angle BAH
2. Calculer alors la longueur AH. (utiliser le cosinus, SVP !) à 1 cm près.
3. En utilisant le triangle AHC rectangle en H, dire alors si la longueur du filin est supérieure ou inférieure à 14 m.

Angles inscrits

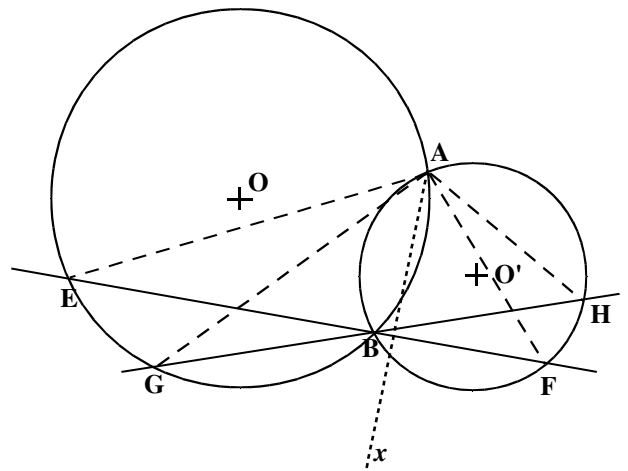
Deux cercles de centres O et O' et de rayons différents se coupent en A et B.

Par le point B, on trace deux droites (ne passant ni par O, ni par O') qui coupent respectivement les cercles (O) et (O') en E et F, et G et H.

Tracer la bissectrice [Ax de l'angle $\widehat{GAF}$.

Montrer que [Ax est aussi la bissectrice de l'angle $\widehat{EAH}$.

Indication : Montrer que $\widehat{EAx} = \widehat{H Ax}$



Trigonométrie

Exercice 1

(simple : voir cours pour le lien entre Sin et Cos, puis connaissant Sin et Cos pour passer à Tan)

On donne $\cos \hat{A} = \frac{13}{18}$. Sans calculer l'angle $\hat{A}$, calculer la valeur exacte de $\sin \hat{A}$, puis de $\tan \hat{A}$.

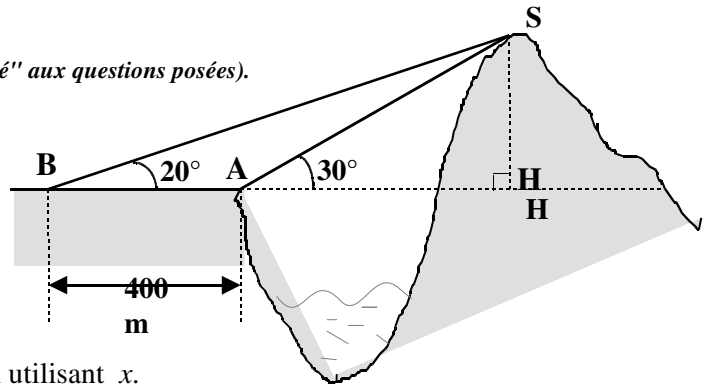
En utilisant soit la valeur du Sinus calculée, soit celle de la Tangente, donner enfin une valeur approchée de cet angle à 0,001° près.

Exercice 2

(difficile si vous ne suivez pas les consignes et si vous répondez "à côté" aux questions posées).

Un topographe doit savoir de combien le sommet S de la montagne surplombe le plateau où il se trouve. Deux choses l'en empêchent : la profonde vallée où coule un torrent furieux et l'impossibilité de forer une galerie jusqu'au pied H de la verticale passant par S.

Il effectue donc une première mesure d'angle au point A, recule de 400 m et effectue une 2^e mesure au point B



- On appelle x la distance AH. Ecrire la valeur de BH en utilisant x .
- Dans le triangle AHS rectangle en H, écrire la valeur de la hauteur SH cherchée en utilisant x (garder 5 chiffres décimaux).
- Dans le triangle BHS rectangle en H, écrire la valeur de la hauteur SH cherchée en utilisant x (garder 5 chiffres décimaux).
- Vous disposez donc de deux expressions différentes de la hauteur SH. Grâce à l'équation que l'on peut ainsi obtenir, en déduire x .
- Calculer ensuite SH (résultat à 0,1 m près).

Exercice 3

ABC est un triangle équilatéral de côté de longueur 5 cm. [AH] est la hauteur issue de A.

1. Montrer que $AH = \frac{5\sqrt{3}}{2}$.

2. Montrer alors que l'on a : $\cos \widehat{ABH} = \frac{1}{2}$, $\sin \widehat{ABH} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\tan \widehat{ABH} = \sqrt{3}$

Arc en plein cintre outrepassé.

En architecture, la courbe que décrit une voûte est appelée "arc".

Voici un "arc en plein cintre outrepassé".

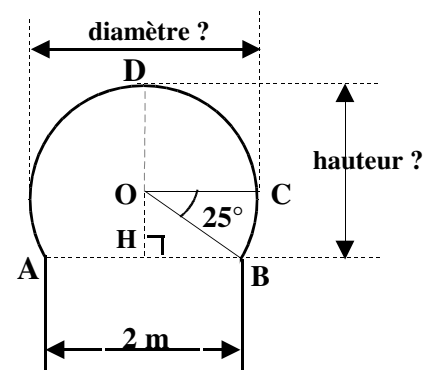
H est le milieu de [AB] et (OC) est parallèle à (AB).

Combien mesure l'angle $\widehat{OBH}$ et pourquoi ?

Calculer BH, OH puis le rayon OB.

En déduire le diamètre et la hauteur HD de l'arc.

(Réponses attendues au mm près)



Corrigés

Angles inscrits

Dans le cercle (O) les points A, B, E et G sont sur le cercle, par conséquent, les angles $\widehat{EAG}$ et $\widehat{EBG}$ sont des angles inscrits et ils interceptent le même arc EG, ils sont égaux : $\widehat{EAG} = \widehat{EBG}$. On montrerait de même dans le cercle (O') que :

$$\widehat{FAH} = \widehat{FBH}.$$

Or, on sait que les points E, B, F d'une part et F, B, H d'autre part sont alignés. Les angles $\widehat{EBG}$ et $\widehat{FBH}$ sont donc opposés par le sommet et donc égaux : $\widehat{EBG} = \widehat{FBH}$. On sait maintenant que : $\widehat{EAG} = \widehat{EBG}$, $\widehat{FAH} = \widehat{FBH}$ et $\widehat{EBG} = \widehat{FBH}$. De ces 3 égalités, on déduit que $\widehat{EAG} = \widehat{FAH}$.

On sait encore d'autre part que [Ax est la bissectrice de l'angle $\widehat{GAF}$, donc $\widehat{GAX} = \widehat{FAX}$.

Considérons les angles $\widehat{EAX}$ et $\widehat{HAX}$, on a $\widehat{EAX} = \widehat{EAG} + \widehat{GAX}$ et $\widehat{HAX} = \widehat{FAH} + \widehat{FAX}$. Comme $\widehat{EAG} = \widehat{FAH}$ et $\widehat{GAX} = \widehat{FAX}$, alors les angles $\widehat{EAX}$ et $\widehat{HAX}$, sommes de 2 angles égaux 2 à 2, sont aussi égaux : $\widehat{EAX} = \widehat{HAX}$. la demi-droite [Ax est donc bien aussi la bissectrice de l'angle $\widehat{EAH}$.

Trigonométrie

Exercice 1

On sait que $\sin^2 \hat{A} + \cos^2 \hat{A} = 1$, donc $\sin^2 \hat{A} + \left(\frac{13}{18}\right)^2 = 1$ et $\sin^2 \hat{A} + \frac{169}{324} = 1$.

$$\text{Donc } \sin^2 \hat{A} = 1 - \frac{169}{324} = \frac{324 - 169}{324} = \frac{155}{324} \text{ et enfin } \sin \hat{A} = \sqrt{\frac{155}{324}} = \frac{\sqrt{155}}{18}$$

$$\text{On sait aussi que } \tan \hat{A} = \frac{\sin \hat{A}}{\cos \hat{A}} = \frac{\frac{\sqrt{155}}{18}}{\frac{13}{18}} = \frac{\sqrt{155}}{13}$$

$$\text{D'où, puisque } \sin \hat{A} = \frac{13}{18}, \text{ alors } \hat{A} = \text{Asin}\left(\frac{13}{18}\right) = \sin^{-1}\left(\frac{13}{18}\right) \approx 46,218^\circ \text{ à } 0,001^\circ \text{ près.}$$

Exercice 2

a) $BH = 400 + x$

b) Dans le triangle AHS rectangle en H, on a $\tan \widehat{SAH} = \frac{SH}{AH}$, d'où $\tan 30^\circ = \frac{SH}{x}$, ce qui donne :

$$SH = x \tan 30^\circ \approx 0,57735 x.$$

N-B : l'an prochain, vous apprendrez que la valeur exacte de $\tan 30^\circ$ est $\frac{\sqrt{3}}{3}$

c) Dans le triangle BHS rectangle en H, on a $\tan \widehat{SBH} = \frac{SH}{BH}$, d'où $\tan 20^\circ = \frac{SH}{400+x}$, ce qui donne :

$$SH = (400+x) \tan 20^\circ \approx 0,36397 (400+x).$$

d) On a donc $0,57735x = 0,36397(400+x)$, soit $0,57735x = 0,36397x + 145,588$

$$\text{D'où } \frac{145,588}{0,57735 - 0,36397} \approx 682,294 \text{ m à } 1 \text{ mm près.}$$

e) Et enfin $SH = 0,55735 x \approx 393,9 \text{ m à } 0,1 \text{ dm près}$

N-B : Maîtriser le calcul littéral vous aurait permis, en ne gardant que les valeurs exactes, de ne faire à la calculatrice, que le calcul final comme indiqué ci-dessous.

$$SH = x \tan 30^\circ \text{ et d'autre part } SH = (400+x) \tan 20^\circ = 400 \tan 20^\circ + x \tan 20^\circ$$

D'où $x \tan 30^\circ - x \tan 20^\circ = 400 \tan 20^\circ$ Petite factorisation (et oui, en trigo aussi...)

$$x(\tan 30^\circ - \tan 20^\circ) = 400 \tan 20^\circ \text{ Soit enfin } x = \frac{400 \tan 20^\circ}{\tan 30^\circ - \tan 20^\circ}$$

Et le résultat s'obtient en une seule fois avec la séquence de touches suivantes (pour Casio FX 92 Collège) :

400 x tan 20 ÷ (tan 30 – tan 20) EXE

(Attention aux parenthèses que vous devez utiliser avec la calculatrice, sinon gare à la priorité des opérations !)

Noter que le résultat donné cette fois est 682,295 mm à 1 mm près, résultat plus précis.

Exercice3

1. Par hypothèse, le triangle ABC étant équilatéral, ses hauteurs sont en même temps médianes des côtés : $BH = BC/2 = \frac{5}{2}$ cm (mieux que 2,5 !). De plus, puisque [AH] est la hauteur relative à (BC), on a donc : $(AH) \perp (BC)$. Le triangle ABH est donc rectangle en H, on lui applique le théorème de Pythagore : $AB^2 = AH^2 + BH^2$. d'où $5^2 = AH^2 + (\frac{5}{2})^2$.

$$\text{Soit encore } AH^2 = 25 - \frac{25}{4} = \frac{100}{4} - \frac{25}{4} = \frac{75}{4} . \text{ Donc } AH = \sqrt{\frac{75}{4}} = \frac{\sqrt{75}}{\sqrt{4}} = \frac{\sqrt{25 \times 3}}{2} = \frac{5\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{On y arrivait aussi avec } 2,5 \text{ cm : } AH = 2,5 = \frac{5}{2} . \sqrt{18,75} = \sqrt{6,25 \times 3} = 2,5\sqrt{3}$$

$$\text{Dans le triangle ABH, rectangle en H, on a : } \cos \widehat{ABH} = \frac{BH}{AB} = \frac{\frac{5\sqrt{3}}{2}}{5} \quad \cos \widehat{ABH} = \frac{5\sqrt{3}}{10} = \frac{\sqrt{3}}{2} .$$

$$\sin \widehat{ABH} = \frac{AH}{AB} = \frac{2,5}{5} = \frac{1}{2}$$

$$\text{Et enfin } \tan \widehat{ABH} = \frac{AH}{BH} = \frac{\frac{5\sqrt{3}}{2}}{\frac{5}{2}} = \frac{5\sqrt{3}}{2} \times \frac{2}{5} = \sqrt{3}$$

Arc en plein cintre outrepassé.

Les droites parallèles (OC) et (HB) sont coupées par la sécante (OB) : les angles alterne-internes $\widehat{BOC}$ et $\widehat{OBH}$ sont donc égaux. $\widehat{OBH} = 25^\circ$.

H est le milieu de [AB] d'où $BH = 2/2 = 1$ m

Dans le triangle BOH rectangle en H :

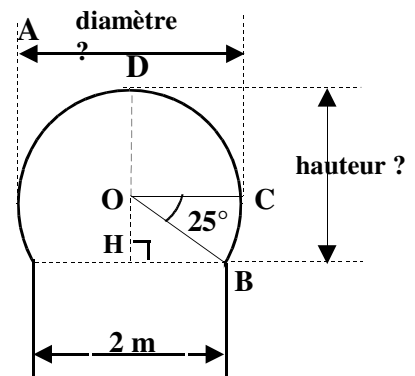
$$\tan \widehat{B} = \frac{OH}{BH} . \text{ Donc } \tan 25^\circ = \frac{OH}{1} \text{ et } OH = 1 \times \tan 25^\circ \approx 0,4663 \text{ m}$$

$$\cos \widehat{B} = \frac{BH}{OB} \text{ Donc } \cos 25^\circ = \frac{1}{OB} \text{ et } OB = \frac{1}{\cos 25^\circ} \approx 1,1034 \text{ m}$$

Le diamètre de l'arc est donc $1,1034 \text{ m} \times 2 \approx 2,207 \text{ m}$ à 1 mm près

Puisque O est sur [DH] alors :

$$HD = OH + OD = OH + OB \approx 1,1034 \text{ m} + 0,4663 \text{ m} \approx 1,570 \text{ m} \text{ à 1 mm près}$$



Devoir Maison

- Thème : racines carrées et Trigonométrie -

Exercice 1

ABCD est un rectangle tel que $AB = 4\sqrt{2}$ et $AD = 4$. Les dimensions sont en cm.

E est le milieu de [CD], (AE) et (BD) se coupent en K.

1. Calculer AE et BD et en donner les valeurs exactes.
2. Que peut-on dire du point K pour le triangle ADC ? Justifier soigneusement votre réponse.
3. Démontrer que (AE) et (DB) sont perpendiculaires.

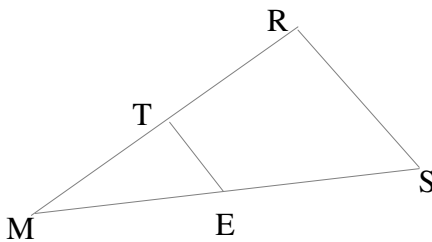
Exercice 2

ABC est un triangle équilatéral de côté de longueur 5 cm. [AH] est la hauteur issue de A.

1. Montrer que $AH = \frac{5\sqrt{3}}{2}$.
2. Montrer alors que l'on a : $\cos \widehat{ABH} = \frac{1}{2}$, $\sin \widehat{ABH} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\tan \widehat{ABH} = \sqrt{3}$

Exercice 3

Brevet des Collèges - Poitiers 1992



Le triangle MRS est rectangle en R. Le triangle MTE est rectangle en T. On donne $ME = 3$, $MT = \sqrt{5}$ et $ES = 2,4$. Les dimensions sont en cm.

1. Montrer que $ET = 2$ cm.
2. Montrer que $\frac{MT}{MR} = \frac{5}{9}$, puis calculer MR.
3. En déduire que $TR = \frac{4\sqrt{5}}{5}$
4. Montrer alors que les tangentes des angles $\widehat{EMT}$ et $\widehat{TER}$ sont égales. (Pour prouver l'égalité des 2 fractions, montrer que les produits en croix sont égaux). En déduire une valeur approchée de ces angles à 1° près

Corrigé du DM
- Trigonométrie et racines carrées -

Exercice 1

1. Par hypothèse, ABCD est un rectangle, il a donc 4 angles droits et en particulier l'angle $\widehat{A}$.

Calcul de AE, puis BD.

Le rectangle ABCD a aussi l'angle $\widehat{D}$ droit, et le point E est par hypothèse le milieu de [DC], le triangle ADE est donc rectangle en D. De plus $DE = 4\sqrt{2}/2 = 2\sqrt{2}$.

Dans le triangle ADE rectangle en D, on applique le théorème de Pythagore : $AE^2 = DA^2 + DE^2$.

D'où $AE^2 = 4^2 + (2\sqrt{2})^2 = 16 + 4 \times 2 = 24$. On a donc $AE = \sqrt{24} = \sqrt{4 \times 6} = 2\sqrt{6}$.

L'angle $\widehat{A}$ étant droit, le triangle DAB est rectangle en A. On peut lui appliquer le théorème de Pythagore :

$BD^2 = DA^2 + AB^2$. Or, $DA = 4$ et $AB = 4\sqrt{2}$.

D'où $BD^2 = 4^2 + (4\sqrt{2})^2 = 16 + 16 \times 2 = 48$. D'où $BD = \sqrt{48} = \sqrt{16 \times 3} = 4\sqrt{3}$.

2. Par hypothèse, E est le milieu de [DC], donc [AE] qui joint le sommet A du triangle DAC et le milieu du côté opposé [DC] est une médiane de ce triangle.

De plus, ABCD étant un rectangle, ses diagonales ont donc le même milieu. Appelons-le I.

Dans le triangle DAC, [DI] qui joint le sommet D du triangle DAC et le milieu du côté opposé [AC], est une médiane de ce triangle.

Or, par hypothèse, [DB] et [AE] se coupent en K. Comme on a montré que I est sur [DB], on peut donc dire que les médianes [AE] et [DI] du triangle ADC se coupent en K. K est donc le **centre de gravité** du triangle ADC.

3. Puisque K est l'intersection des médianes du triangle ADC et que celles-ci se coupent aux $\frac{2}{3}$ de leurs longueurs à partir

du sommet, on a donc $AK = \frac{2}{3} AE$ et $DK = \frac{2}{3} DI$. Mais I est le milieu de [DC], donc : $DK = \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} DC = \frac{1}{3} DC$.

D'où $AK = \frac{2}{3} \times 2\sqrt{6} = \frac{4\sqrt{6}}{3}$ et $DK = \frac{1}{3} \times 4\sqrt{3} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$. Vérifions si le triangle ADK est rectangle en K :

$$AD^2 = 4^2 = 16$$

$$AK^2 + DK^2 = \left(\frac{4\sqrt{6}}{3}\right)^2 + \left(\frac{4\sqrt{3}}{3}\right)^2 = \frac{96}{9} + \frac{48}{9} = \frac{96+48}{9} = \frac{144}{9} = 16 \quad \left. \vphantom{\frac{96}{9}} \right\} \text{ On constate que } AD^2 = AK^2 + DK^2$$

Donc, dans le triangle ADK, puisque $AD^2 = AK^2 + DK^2$, alors d'après la réciproque du théorème de Pythagore, ce triangle est rectangle en K. Donc $(DK) \perp (AK)$. Et comme K est sur (AE) et (DC), alors $(AE) \perp (DC)$.

Exercice 2

1. Par hypothèse, le triangle ABC étant équilatéral, ses hauteurs sont en même temps médianes des côtés : $BH = BC/2 = \frac{5}{2}$ cm (mieux que 2,5 !). De plus, puisque [AH] est la hauteur relative à (BC), on a donc : $(AH) \perp (BC)$. Le triangle

ABH est donc rectangle en H, on lui applique le théorème de Pythagore : $AB^2 = AH^2 + BH^2$. d'où $5^2 = AH^2 + \left(\frac{5}{2}\right)^2$.

$$\text{Soit encore } AH^2 = 25 - \frac{25}{4} = \frac{100}{4} - \frac{25}{4} = \frac{75}{4}. \text{ Donc } AH = \sqrt{\frac{75}{4}} = \frac{\sqrt{75}}{\sqrt{4}} = \frac{\sqrt{25 \times 3}}{2} = \frac{5\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{On y arrivait aussi avec 2,5 cm : } AH = \text{ et } 2,5 = \frac{5}{2} \cdot \sqrt{18,75} = \sqrt{6,25 \times 3} = 2,5\sqrt{3}$$

2. Dans le triangle ABH, rectangle en H, on a : $\cos \widehat{ABH} = \frac{BH}{AB} = \frac{2,5}{5} = \frac{5\sqrt{3}}{10} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. $\sin \widehat{ABH} = \frac{AH}{AB} = \frac{2,5}{5} = \frac{1}{2}$

$$\text{Et enfin } \tan \widehat{ABH} = \frac{AH}{BH} = \frac{\frac{5\sqrt{3}}{2}}{\frac{5}{2}} = \frac{5\sqrt{3}}{2} \times \frac{2}{5} = \sqrt{3}$$

Exercice 3

1. Dans le triangle MET, rectangle en T, on applique le théorème de Pythagore $ME^2 = MT^2 + TE^2$. d'où $3^2 = (\sqrt{5})^2 + TE^2$. Et $TE^2 = 9 - 5 = 4$. Ce qui donne $TE = \sqrt{4} = 2$.

2. Par hypothèse, les triangles MTE et MRS sont respectivement rectangles en T et S et T est sur [MR]. On peut donc dire que : $(TE) \perp (MR)$ et $(RS) \perp (MR)$. Les deux droites (TE) et (RS), toutes deux perpendiculaires à (MR) sont donc parallèles entre elles.

Puisque les points T et E appartiennent respectivement aux droites (MR) et (MS) sécantes en M et que (TE) et (RS) sont parallèles, alors d'après le théorème de Thalès, on a les rapports égaux suivants : $\frac{MT}{MR} = \frac{ME}{MS} = \frac{TE}{RS}$

$$\text{Et, comme } ME = 3 \text{ et } MS = ME + ES = 3 + 2,4 = 5,4, \text{ on obtient } \frac{MT}{MR} = \frac{3}{5,4} = \frac{30}{54} = \frac{5 \times 6}{9 \times 6} = \frac{5}{9}$$

$$\text{En appliquant la propriété de l'égalité des produits en croix à } \frac{\sqrt{5}}{MR} = \frac{5}{9}, \text{ on obtient } MR = \frac{9\sqrt{5}}{5}.$$

3. Comme T est sur [MR] et que $MT = \sqrt{5}$, alors $TR = MR - MT = \frac{9\sqrt{5}}{5} - \sqrt{5} = \frac{9\sqrt{5}}{5} - \frac{5\sqrt{5}}{5} = \frac{4\sqrt{5}}{5}$

Dans le triangle MTE, rectangle en E :

$$\tan \widehat{EMT} = \frac{TE}{MT} = \frac{2}{\sqrt{5}}.$$

D'après la deuxième question, on sait que (TE) et (MR) sont perpendiculaires, l'angle TER est donc aussi un angle droit et le triangle TER un triangle rectangle en T.

Dans ce triangle, on a :

$$\tan \widehat{TER} = \frac{TR}{TE} = \frac{\frac{4\sqrt{5}}{5}}{2} = \frac{4\sqrt{5}}{5} \times \frac{1}{2} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

Ces tangentes sont égales si les produits en croix obtenus à partir des deux rapports sont égaux :

$$5 \times 2 = 10 \text{ et } 2\sqrt{5} \times \sqrt{5} = 2 \times 5 = 10.$$

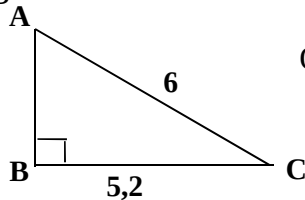
Puisque les produits en croix obtenus à partir des deux rapports sont égaux, les tangentes sont égales :

$$\tan \widehat{EMT} = \tan \widehat{TER}.$$

La valeur commune de ces angles, sachant que $\frac{2}{\sqrt{5}} \approx 0,8944...$, est $\widehat{EMT} = \widehat{TER} \approx 42^\circ$ à 1° près..

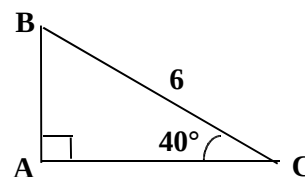
1. Trigonométrie

①

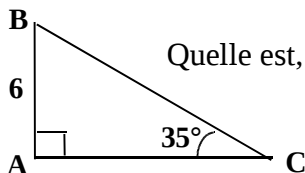


Quelle est, à 0,1° près, la mesure de l'angle $\widehat{BAC}$?

② Quelle est, à 1 mm près, la mesure de la longueur du côté AB ?



③

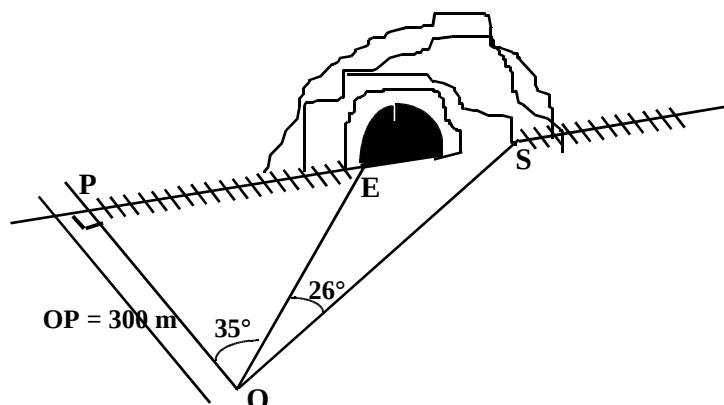


Quelle est, à 1 mm près, la mesure de la longueur du côté AC ?

④ Le Tunnel

L'observateur O de la figure ci-dessous est placé au bord d'une petite route rectiligne coupant une voie ferrée à angle droit.

Calculer à 1 cm près la longueur ES du tunnel.



Cosinus : solutions-explications

Certains d'entre vous doivent être adeptes de la formule : "Pourquoi faire simple, si je peux faire compliqué ?". Ingénieriez-vous donc à vous simplifier la vie au lieu de chercher à vous la "pourrir" : il était écrit "Révisions... COSINUS". Seul le cosinus vous était nécessaire pour faire ces exercices composés de la moitié d'une interro de l'an dernier. Et oui, "mes" anciens, vous les aviez déjà faits !

Donc, je ne vais utiliser que le Cosinus !

On donne $BC = 3 \text{ cm}$ et $AC = 8 \text{ cm}$.

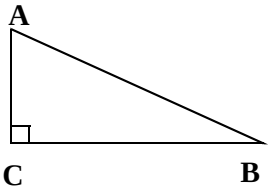
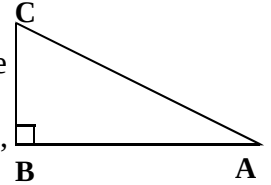
Combien mesure l'angle $\hat{A}$? Réponse attendue à $0,1^\circ$ près.

Je dois me poser la question : avec le Cosinus, les longueurs BC et AC , quel angle puis-je calculer ? Réponse : C !! Et on me demande A ... !

Et alors ? Où est le pb ? Le triangle ABC est rectangle en B , vous savez donc, depuis la 5° , que $\hat{A} + C = 90^\circ$...

Dans le triangle ABC rectangle en B , on a :

$$\cos C = \frac{BC}{AC}, \text{ d'où } \cos C = \frac{3}{8} = 0,375 \text{ et } C = \arccos(0,375) \approx 67,98^\circ \text{ et } A \approx 22^\circ \text{ à } 0,1^\circ \text{ près (} \arccos, \text{ c'est } \cos^{-1} \text{).}$$



On donne $BC = 8 \text{ cm}$ et $\angle ABC = 25^\circ$

Combien mesure le côté $[AB]$? Réponse attendue à $0,1 \text{ cm}$ près

Dans le triangle ABC rectangle en B , on a :

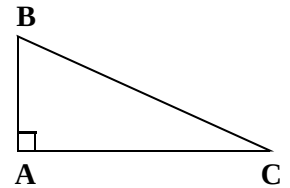
$$\cos B = \frac{BC}{AB}, \text{ d'où } \cos 25 = \frac{8}{AB} \text{ et } AB = \frac{8}{\cos 25} \approx 8,8 \text{ cm à } 0,1 \text{ cm près}$$

On donne $BC = 8 \text{ cm}$ et $\angle ACB = 25^\circ$

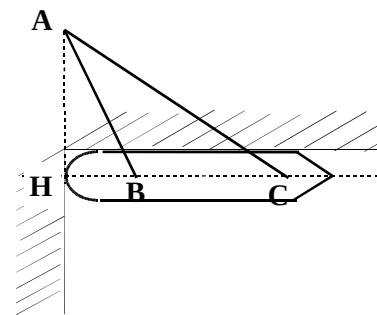
Combien mesure le côté $[AC]$? Réponse attendue à $0,1 \text{ cm}$ près

Dans le triangle ABC rectangle en B , on a :

$$\cos C = \frac{AC}{BC}, \text{ d'où } \cos 25 = \frac{AC}{8} \text{ et } AC = 8 \times \cos 25 \approx 7,3 \text{ cm à } 0,1 \text{ cm près}$$



Le bateau



1. Dans le triangle AHC rectangle en H , on a :

$$\cos B = \frac{BH}{BA}, \text{ d'où } \cos B = \frac{4}{8} = 0,5 \text{ et } B = \arccos(0,5) = 60^\circ.$$

2. Le triangle AHB est rectangle en B , on sait donc que $\hat{A} + B = 90^\circ$. D'où $\angle BAH = 30^\circ$.

Dans le triangle AHC rectangle en H , on a :

$$\cos A = \frac{AH}{AB}, \text{ d'où } \cos 30 = \frac{AH}{8,5} \text{ et } AH = 8,5 \times \cos 30 \approx 7,36 \text{ m à}$$

1 cm près

3. Puisque le triangle AHC est rectangle en H , on a $\angle HAC + \angle ACH = 90^\circ$. D'où, comme $\angle ACH = 30^\circ$,

$$\angle HAC = 60^\circ. \cos HAC = \frac{AH}{AC}, \text{ d'où } \cos 60 = \frac{7,36}{AC} \text{ et } AC = \frac{7,36}{\cos 60} \approx 14,72 \text{ m.}$$

Puisque $14,72 > 14$ alors, oui la longueur du filin AC est supérieure à 14 m .

Que personne ne soit effrayé, au lieu de $8,5 \times \cos 30$, dans la question ci-dessus, vous pouviez tout aussi bien utiliser la valeur trouvée au 2., c'est à dire $7,36 \text{ m}$. Simplement, il s'agit là d'une (bonne) habitude à prendre : repartir de valeurs exactes (les résultats sont alors plus précis et, parfois, ça peut changer la donne) !