

Théorie Des Graphes

Rappel:

Produit Cartésien:

Si E et F sont 2 ensembles, le produit cartésien $E \times F$, c'est $E \times F = \{ (x, y) \mid x \in E, y \in F \}$

$$(E \times F) \times G = E \times (F \times G) \\ = E \times F \times G$$

$$E \times F \times G = \{ (x, y, z) \mid \begin{matrix} x \in E \\ y \in F \\ z \in G \end{matrix} \}$$

$$(E \times F) \times G = \{ ((x, y), z) \mid \begin{matrix} (x, y) \in E \times F \\ z \in G \end{matrix} \}$$

$$\text{Dc: } E \times F \neq F \times E$$

Graphes finis est la donnée de 2 ensembles;

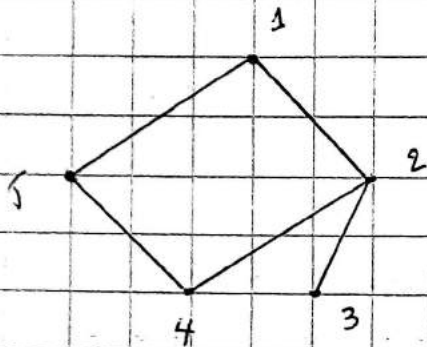
$X = \text{Vertex} = \{ x_1, x_2, \dots, x_n \}$ dit Ensemble des sommets

et un ensemble $E = \{ (x, y) \mid \begin{matrix} x \in V \\ y \in V \\ i \in I, j \in J \end{matrix} \}$

On note le graphe: $G = (V, E)$

Ex: $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

$E = \{(1, 2), (1, 5), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (4, 5)\}$



$$(x, y) = (x', y')$$



$$\begin{cases} x = x' \\ y = y' \end{cases}$$

Graphes Orientés et Non orientés

Si l'ordre est important alors $(x, y) \neq (y, x)$
On dit alors que (x, y) est un arc orienté
de "x vers y".

dans ce cas l'arc $(x, y) \neq$ l'arc (y, x) et
le graphe est dit orienté.

Si non, le graphe est dit non orienté.

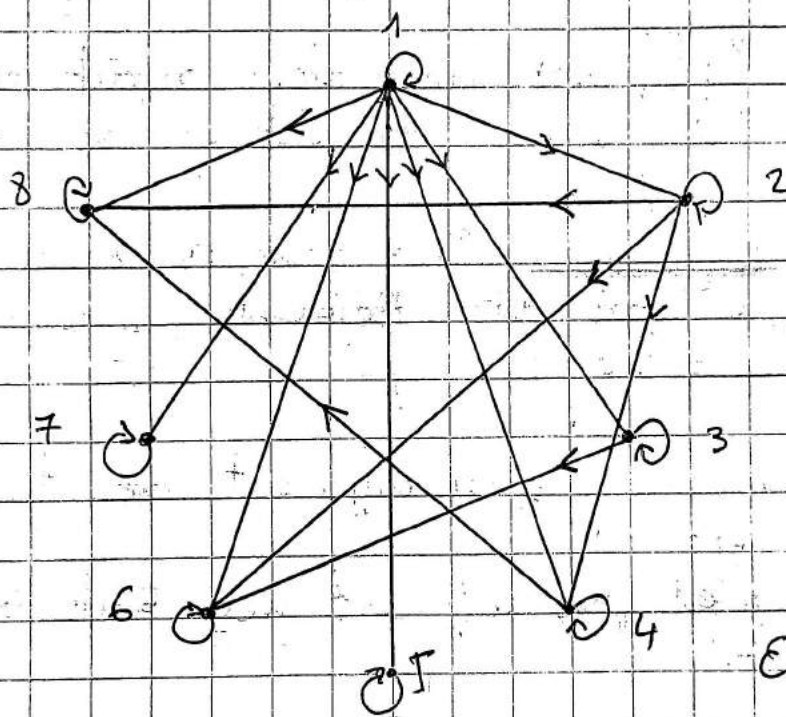
Notation graphe non orienté: est noté $G(V, E)$

Tq $(x, y) / x, y$ ou (y, x) , les arêtes sont
 $(e_1, e_2, \dots, e_m)$

Notation graphe orienté: est noté $G(V, A)$ les arcs
sont: $(u_1, u_2, \dots, u_m)$

Exp : Soit $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$

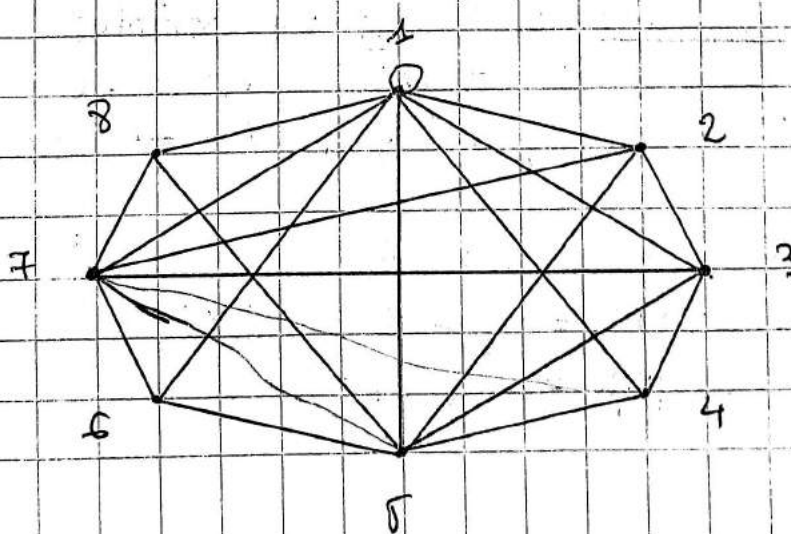
- Dessiner le graphe G représentant la relation x divise y ds V .
- Dessiner le graphe G représentant la relation x et y sont premiers entre eux.



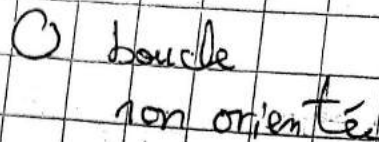
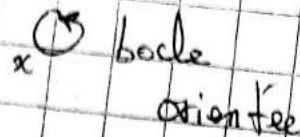
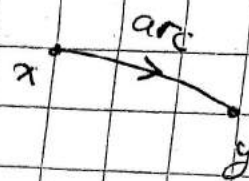
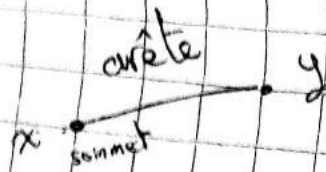
$G(V, U)$

Graphe
Orienté

Ordre de $G = 8$



$G'(V, E)$



Si $G(V, E)$ est un graphe, $|V|$ est l'ordre du graphe X
 Si $|V|$ est fini, alors on dit que le graphe est fini, sinon on dit que G est infini

• Adjacence : Deux sommets x et y d'un graphe sont dits Adjacents, si x et y sont reliés entre eux par une arête ou un arc

Dans G , 1 est adjacent avec tous les autres sommets.

5 n'est pas adjacent avec 6 de G mais il l'est de G'

(V, E)

• Voisin : si x est un sommet d'un graphe G , l'ens^e des voisins ouverts de x de G , noté : $V_G(x) = \{ y \in V / y \text{ est adjacent à } x \}$

Dans le graphe G' :

$$V_{G'}(1) = \{ 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8 \}$$

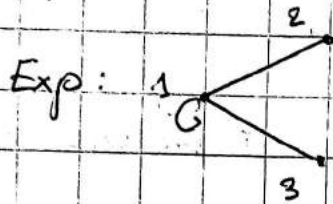
$$V_{G'}(6) = \{ 1, 5, 7 \}$$

L'ensb des voisins fermés de x , noté :

$$V_G[x] = V_G(x) \cup \{x\}$$

$$\begin{aligned} V_G[5] &= \{1, 2, 3, 4, 6, 7, 8\} \cup \{5\} \\ &= \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\} \end{aligned}$$

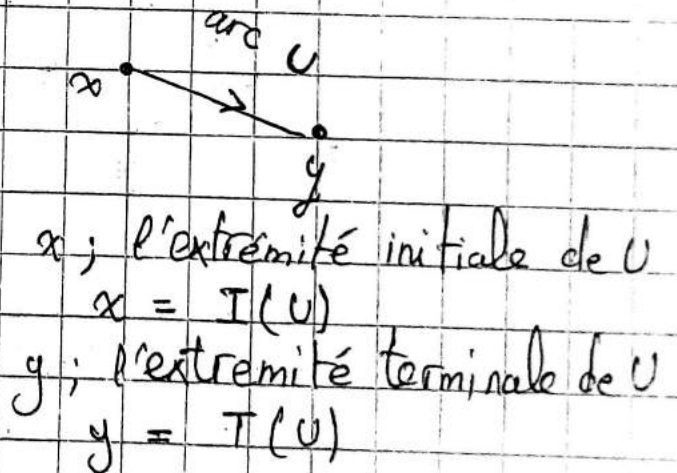
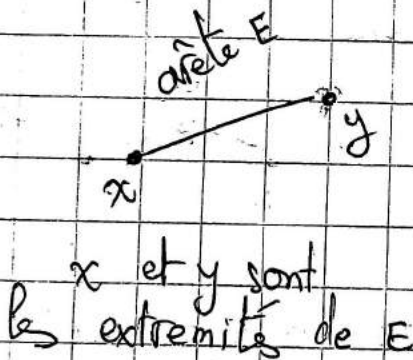
Rq: si $(x, y) \in E$ alors $x \in V_G(y)$ et $V_G(x) = V_G[x]$



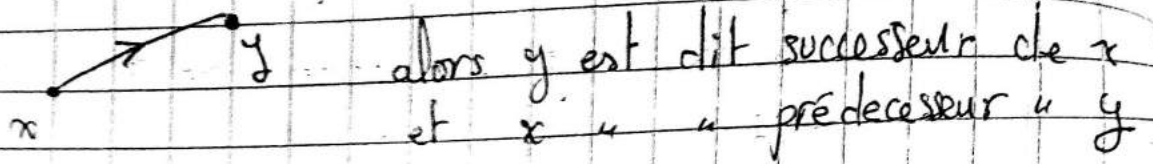
$$V(1) = \{1, 2, 3\} = N[1]$$

Degré d'un Sommet: Le degré d'un sommet x d'un graphe G , est le nombre de ses voisins (ou arcs ou crêtes), on note :

$$d_G(x) = |V_G(x)|$$



Successeur et Prédecesseur: Si $G(V, U)$ est un graphe orienté et $(x, y) = xy$, un arc de G ,



L'ensb des successeurs d'un sommet x , noté $\Gamma^+(x)$ est:

$$\Gamma^+(x) = \{ y \in V / (x, y) \text{ est un arc de } G \}$$

et l'ensb des prédecesseurs de x , noté $\Gamma^-(x)$ est:

$$\Gamma^-(x) = \{ y \in V / (y, x) \text{ est un arc de } G \}$$

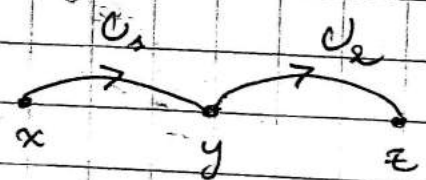
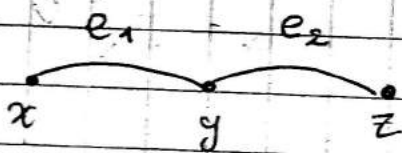
$$Rg: V(x) = \Gamma^+(x) \cup \Gamma^-(x)$$

$$d_G^+(x) = |\Gamma^+(x)| \quad \text{degré extérieur de } x$$

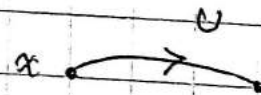
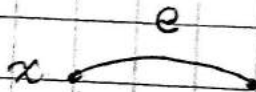
$$d_G^-(x) = |\Gamma^-(x)| \quad \text{" " " intérieur " } x$$

$$d(x) = d_G^+(x) + d_G^-(x)$$

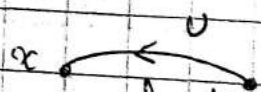
Deux arêtes ou arcs sont dits adjacents s'ils ont une extrémité commune.



Si x est une extrémité d'une arête " e " ou d'un arc " u ", on dira que l'arête ou l'arc u est un incident à x .



X



L'arc u est incident à x

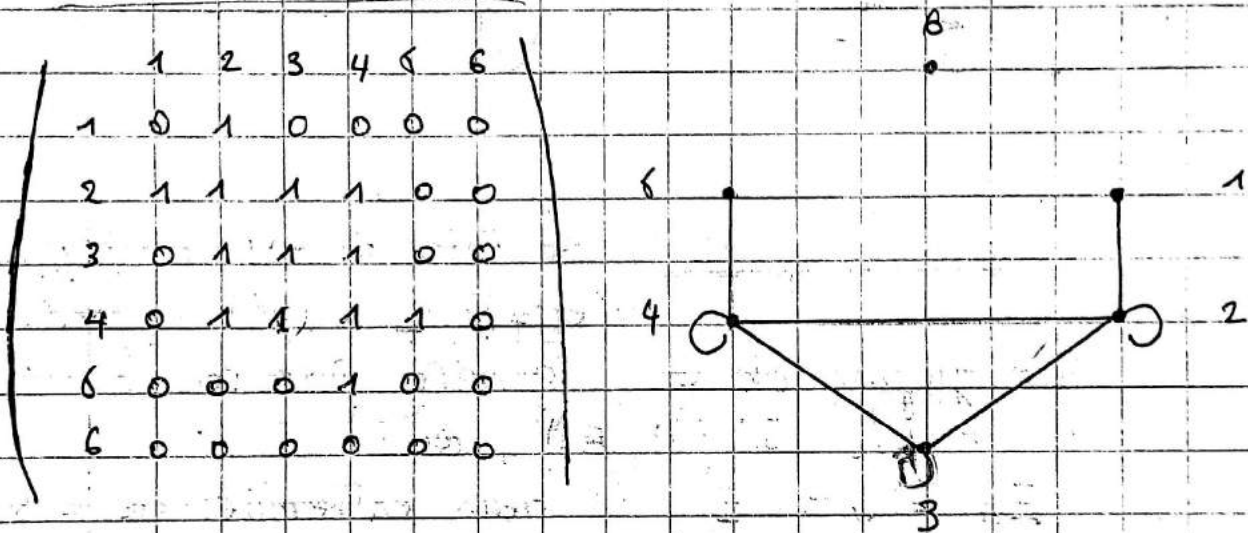
Représentation d'un graphe en machine :

non orienté : Adjacence

$G(V, E)$ non orienté,

Matrice d'Adjacence $M_{n \times n} = (a_{ij})$ $i = 1 \rightarrow n$
 $j = 1 \rightarrow n$

Tq $a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si le sommet } i \text{ est adjacent au sommet } j \\ 0 & \text{si non} \end{cases}$



Un sommet x qui n'a aucun voisin, est dit
sommet isolé $\Leftrightarrow d(x) = 0$

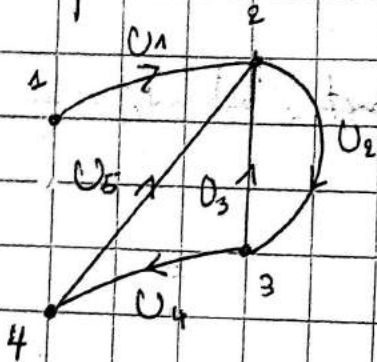
Matrice d'incidence (sommets-arcs)

Soit $G(V, U)$ un graphe orienté arcs, $|V| = n$ et $|U| = m$

On définit la matrice d'incidence sommets-arcs par
la $n \times m$ matrice d'élément $a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } I(u_j) = i \\ -1 & \text{si } T(u_j) = i \\ 0 & \text{si non} \end{cases}$
 $j = 1 \rightarrow m$
 $i = 1 \rightarrow n$

Rq: La matrice d'adjacence est une matrice carrée d'ordre n symétrique

Exp:



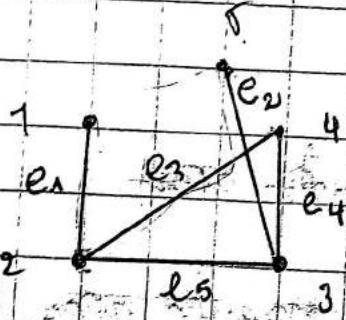
	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5
1	1	0	0	0	0
2	-1	1	-1	0	1
3	0	-1	1	1	1
4	0	0	0	-1	0

Sous-Graphe:

si $G(V, E)$ est un graphe et $A \neq \emptyset \subseteq V$, on appelle sous graphe de G engendré par la partie A de V le graphe $G'(A, E_A)$, où:

$E_A = \{ e \in E \mid \text{les deux extrémités de } e \text{ sont ds } A \}$
 si G est orienté:

$G'(A, E_A)$ où: $V_A = \{ u \in V \mid \exists (u, v) \in A \text{ et } (v, u) \in A \}$

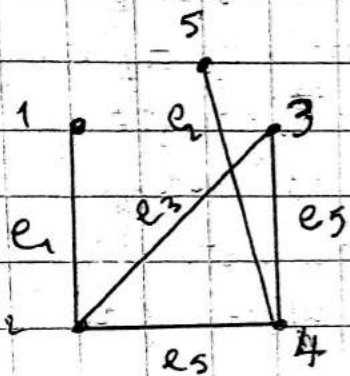


$A = \{ 1, 5, 2 \}$

$E_A = \{ e_1 \}$



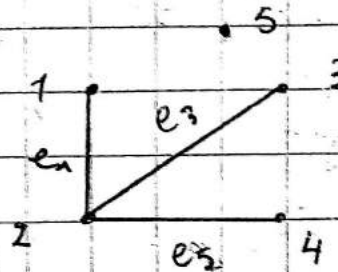
Graphe Partiel: si $G(V, E)$ (ou $G(V, U)$) est un graphe, on définit le graphe partiel de G engendré par la partie non vide E' de E (ou U' de U) par:
 $G'(V, E')$ (ou $G'(V, U')$)



$$V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

$$E' = \{e_1, e_2, e_3\}$$

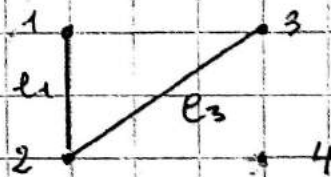
$$G'(V, E')$$



Sous-Graphe Partiel: $G(V, E)$ (ou $G(V, U)$) un graphe et $A \subseteq V$ et $E' \subseteq E$ (ou $U' \subseteq U$) le sous-graphe partiel de G engendré par A et E' (ou U') est le graphe $G'(A, E')$ (ou $G'(A, U')$)

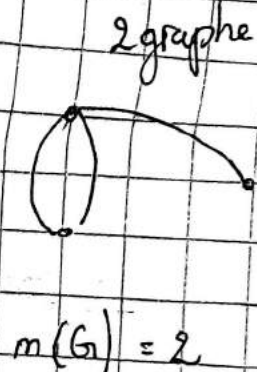
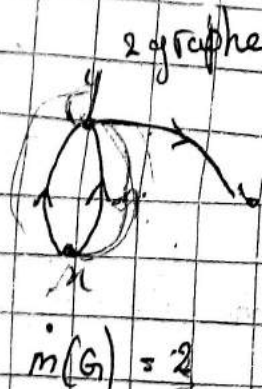
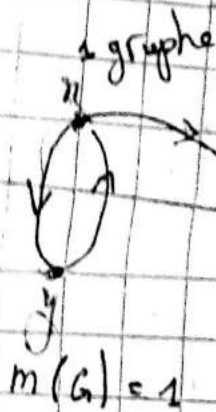
$$A = \{1, 2, 3, 4\}$$

$$E' = \{e_1, e_2, e_3\}$$

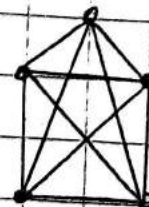
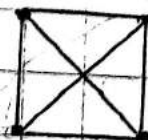


Multi-graphe : Si dans un graphe G , il existe deux sommets x et y qui sont liés par plus d'une arête (ou arc) alors G est dit un multi-graphe.

Multiplicité d'un graphe: soit $p = \max \{ |u| \mid u \in U \}$
 $U = \{ (x, y) \} = \max \{ |e| \mid e \in E, e = (x, y) = (y, x) \}$
 On dit que G est de multiplicité p .
 Autrement dit, si G est de multiplicité p alors chaque paire de sommets (x, y) de G sont liés par au plus p arêtes (ou arcs).



Graphe Complet : Un graphe G est dit complet si les sommets de G sont deux à deux adjacents. Exp:



Non complet

Un graphe sans arêtes (sans arcs) est un graphe dont les sommets sont deux à deux non adjacents



Le Graphe Complémentaire : Si $G(V, E)$ (ou $G(V, U)$) est un graphe

Le graphe complémentaire $\bar{G}$ de G est donnée par $\bar{G}(V, \bar{E})$ ou $(\bar{G}(V, \bar{U}))$

$$E = \{1, 2, 3, 4\}$$

$$A = \{1, 2\}$$

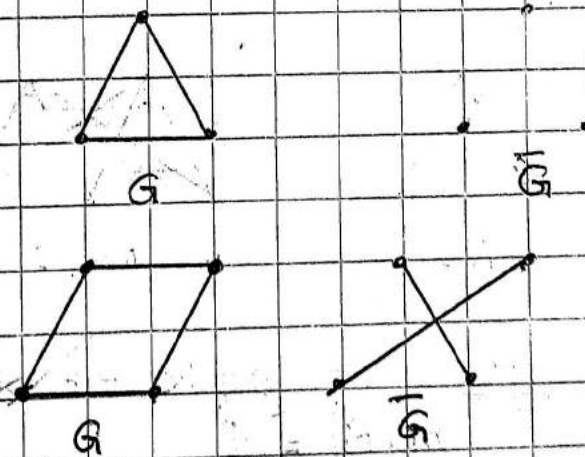
$$\bar{A} = \{3, 4\}$$

$$B = \{4, 5\}$$

~~$\bar{B}$~~ pas de sens car $B \notin E$

$$\text{Où } \bar{E} = \{e / e \notin E\}$$

Exp :



Exp : Montrer que $G \cup \bar{G}$ forme un graphe complet
 Si $G(V, E)$ est complet alors on note G par $K_{|V|}$

9

K_1

K_2

K_3

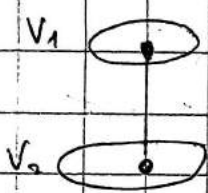
K_n

K_5

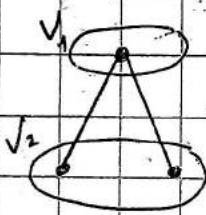
Graphe Biparti

Un graphe $G(V, E)$ est dit biparti si :

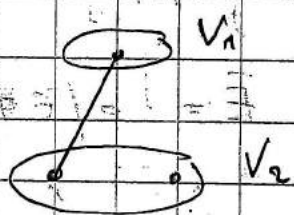
- 1 / $V_1 \neq \emptyset, V_2 \neq \emptyset$
- 2 / $V_1 \cup V_2 = V$ et $V_1 \cap V_2 = \emptyset$
- 3 / $e = (x, y) \in E$ alors $x \in V_1$ et $y \in V_2$
(Les sommets de V_1 sont deux à deux non adjacents)
(Les sommets de V_2 sont deux à deux non adjacents)



$K_{1,1}$



$K_{1,2}$

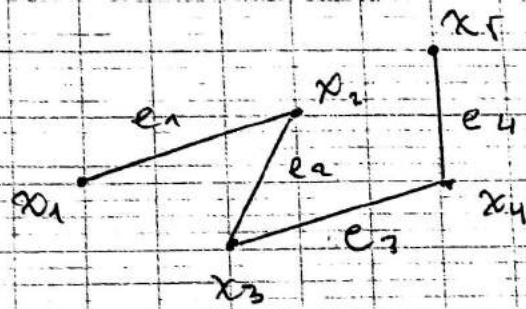
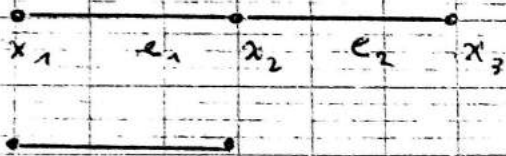


$K_{2,3}$

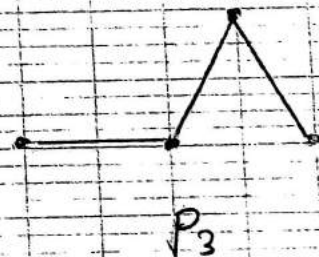
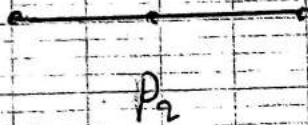
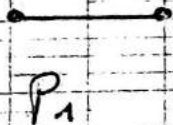
Graphe Simple : Un graphe est dit simple si

$$m(G) = 1$$

Chaine : est une séquence successive de sommets et arêtes ds un graphe G , c à d ; $x_1, e_1, x_2, e_2, \dots$



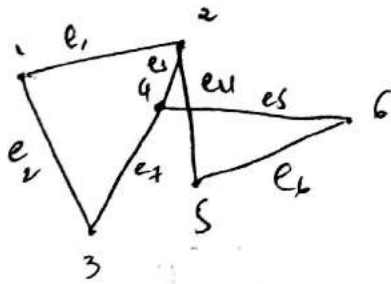
• La longueur d'une chaîne P est le nombre de ses arêtes



une chaîne est une séquence successive de sommets ou arête noté $(x_k e_k x_{k+1} e_{k+1} \dots x_p e_p x_{p+1})$

(1)

Ex



- $P = 1, e_1, e_2, e_3, 4$ chaîne entre 1 et 4 (1 et 4 sont les deux extrémités de la chaîne)

• la longueur d'une chaîne est le nombre de ses arêtes

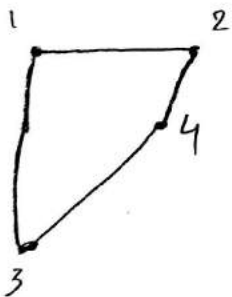
↳ P est de longueur 2.

$= (x_1 e_1 x_2 e_2 \dots x_k e_k x_{k+1})$

P_k est dit de longueur k

Cycle: Un cycle est une chaîne dont les deux extrémités sont confondues

ex d'exemple



est un cycle

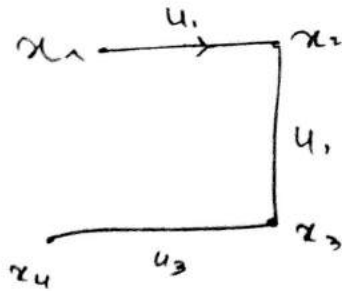
eg: chaîne et cycle sont des notions non orientées

Un chemin est une séquence successive de sommets arcs

note : $(x_1, u_1, x_2, u_2, \dots, x_p, u_p, x_{p+1})$

$$\forall i: I(u_i) = x_i$$

$$T(u_i) = x_{i+1}$$



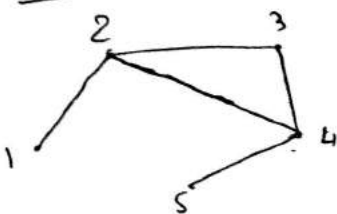
la longueur d'un chemin est le nombre de ses arcs.

Circuit : c'est un chemin dont les extrémités sont confondues

Corde : (arc court)

une corde est une arête (arc) entre deux sommets u et v non successif dans une chaîne (ou chemin)

ex :



$(2, 4)$ est une corde -

Chaîne ou chemin simple

une chaîne (ou un chemin) est simple si elle (il) n'utilise pas deux fois la même arête (arc) (sans corde).

Une chaîne (ou chemin) est élémentaire si elle (il) n'utilise pas deux fois le même sommet.

Hamiltonien

Une chaîne (ou un chemin) est Hamiltonienne (Hamiltonien) si elle (il) utilise tous les sommets du graphe une et une seule fois

Eulérien:

Une chaîne (ou un chemin) est eulérienne (eulérien) si elle (il) utilise toutes (tous) les arêtes (arcs) du graphe une et une seule fois

Cycle (ou circuit) Hamiltonien:

un cycle (ou circuit) est dit hamiltonien, si il utilise tous les sommets du graphe une et une seule fois sauf le sommet de départ 2 fois

cycle (ou circuit) eulérien:

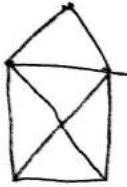
un cycle (ou circuit) est dit eulérien si il utilise toutes les arêtes (tous les arcs) du graphe une et une seule fois en revenant au sommet de départ

Graphes Hamiltonien (eulérien):

un graphe est dit Hamiltonien (eulérien) si il admet un cycle Hamiltonien (eulérien).

ex

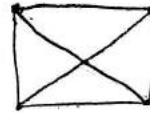
ex



H et E



H et E



$m \cdot E, m \cdot H$

théorème

soit $G(V, E)$ un graphe $|V| = n, |E| = m$

les propositions suivantes sont équivalentes.

- 1 - G est eulérien
- 2 - G admet un cycle eulérien et (circuit)
- 3 - $\forall u \in V, d(u)$ est pair
- 4 - G admet un chemin (chaîne) et $\exists a \in V, \exists b \in V$ tel que $d(a)$ et $d(b)$ est impair et $\forall u \in V - \{a, b\} d(u)$ est pair

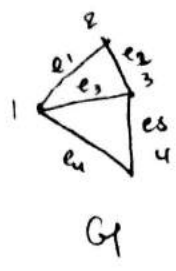
2.3: le nombre de sommets de degré impair est soit 0, soit 2

Graphes adjacents:

Si $G(V, E)$ est un graphe, on définit le graphe adjacent G_A de G de la façon suivante:

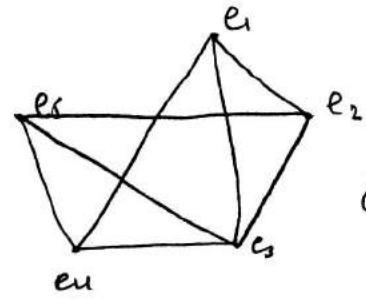
- Les sommets de G_A sont les arêtes de G
- Deux sommets u et v de G_A seront adjacents si les arêtes correspondantes dans G se rencontrent

graphes complets et connexes.
 bipartite " " "



G

(2, 3, 4)



G10

Connexité:

Connexité simple: Soit $G(V, E)$ un graphe, et soit R une relation sur V définie par: $\forall u \in V, \forall v \in V, u R v \iff \exists$ une chaîne entre u et v .

R est d'équivalence.

R - symétrique
 R est transitive (1, 2, 3)
 R est réflexive (1, 2, 3)

La classe d'équivalence d'un sommet $u \in V$ est:

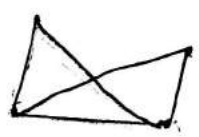
$$u = \{v \in V \mid u R v\}$$

$$= \{v \in V \mid \exists \text{ une chaîne entre } u \text{ et } v\}$$

toute classe d'équivalence est dite une composante connexe de G .

G est dit connexe si G admet une seule composante connexe.

Ex



connexe



non connexe.



non connexe (plus d'une classe connexe)

forte connexité

soit $G(V, A)$ un graphe orienté et R une relation sur V
donnée par :

$$u R v \Leftrightarrow \begin{cases} \exists \text{ un chemin de } u \text{ à } v \\ \text{et } \exists \text{ " " de } v \text{ à } u \end{cases}$$

R est l'équivalence

la classe d'équivalence d'un sommet u

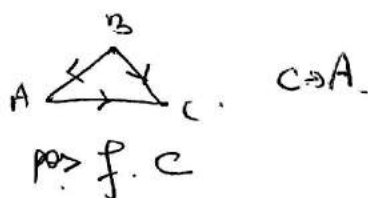
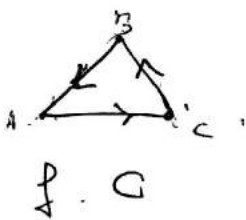
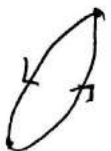
$$\bar{u} = \{v \in V / u R v\}$$

$$= \{v \in V / \begin{array}{l} \exists \text{ un chemin de } u \text{ à } v \\ \exists \text{ " " de } v \text{ à } u \end{array}\}$$

est dite composante fortement connexe

un graphe est fortement connexe si il admet une unique
composante fortement connexe.

Ex :



Proposition : Si G est f.c alors G est connexe, la réciproque
est fausse.

- Élémentaire :

Un chemin est élémentaire s'il n'utilise pas 2 fois le même sommet

- Simple :

Un chemin (ou chaîne) est simple s'il n'utilise pas 2 fois le même arc (arête)

- Une corde est une arête (arc) qui relie 2 sommets non successifs (non adjacents) d'une chaîne ou d'un cycle (d'un chemin ou d'un circuit)



* Les notions chaînes et cycle $\rightarrow$ Non orientées
" " chemins " circuit $\rightarrow$ orientées

élémentaire, simple, Eulerien, Hamiltonien sont valables pour orienté et non orienté.

- Hamiltonien: un chemin (ou une chaîne) est Hamiltonien (ne) s'il (elle) utilise tout les sommets du graphe, une et une seule fois

- Un graphe bipartite est complet si les sommets de X_1 et les sommets de X_2 sont 2 à 2 adjacents

Un G. biparti est noté $K(|X_1|, |X_2|)$

- Un graphe est simple si entre 2 sommets quelconque $\exists$ au plus une arête (arc) entre eux
- Un cycle est une chaîne dont les extrémités sont confondues

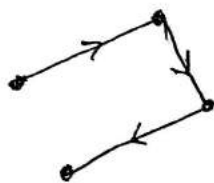
- Chemin et Circuit:

si $G(V, U)$ est un graphe.

- Un chemin de G est une séquence de sommets, arcs de type $(x_1, u_1, x_2, \dots, u_p, x_{p+1})$ $\forall i,$

$$I(u_i) = x_i$$

$$T(u_i) = x_{i+1}$$



Chemin



n'est pas un chemin

- Un circuit est un chemin dont les deux extrémités sont confondues.

- Eulerien : Un chemin (chaîne) est Eulerien(ne) s'il (elle) utilise tout les arcs (arêtes) du graphe une et une seule fois.

• Un cycle (circuit) est Hamiltonien s'il utilise une et une seule fois tous les sommets une et une seule fois, sauf celui de départ et d'arrivée qu'il utilise 2 fois.

• Un cycle (circuit) est Eulerien s'il utilise toutes les arêtes (arcs) du graphe une et une seule fois en revenant au point de départ.

• Un Graphe est Eulerien (Hamiltonien) s'il admet un cycle Eulerien (Hamiltonien)

Théorème : Soit G un graphe, c'est équivalent de dire que :

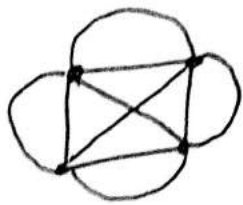
1. G est eulerien

2. " G admet un cycle eulerien et $\forall v \in V, d(v)$ est pair, ou :

Graphe eulerien $\Leftrightarrow$ 0 ou 2 sommets
coulent de degré
impair

1'. G admet une chaîne eulerienne

2'. $\exists a \in V, \exists b \in V \forall d(a) \text{ et } d(b) \text{ est impair}$
et $d(v)$ est pair $\forall a \neq v \neq b$

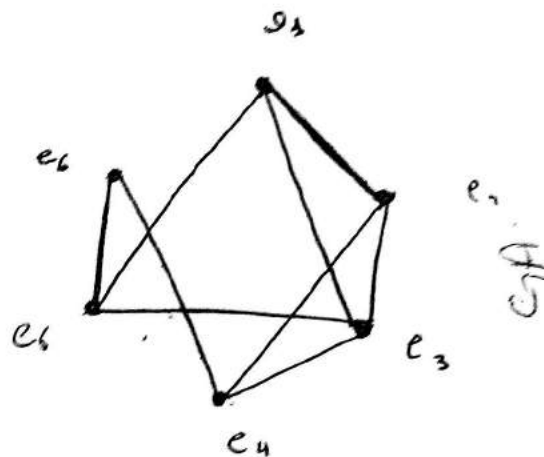
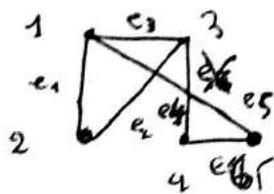


Non Eulerien
4 sommets de degré
impair



Eulerien
2 sommets de degré
impair

- Graphe Adjacent : soit $G(V, E)$ un graphe,
on définit le graphe adjacent G_A associé à G par :
 - Les sommets de G_A sont les arêtes de G
 - Deux sommets u et v seront adjacents ds G_A si les deux arêtes leur correspondant sont adjacentes dans G .



- Connexité :

- connexité simple ; soit $G(V, E)$ un graphe,
et soit R une relation sur V donnée par :
 $\forall u \in V, \forall v \in V, u R v \Leftrightarrow \exists$ une chaîne entre u et v

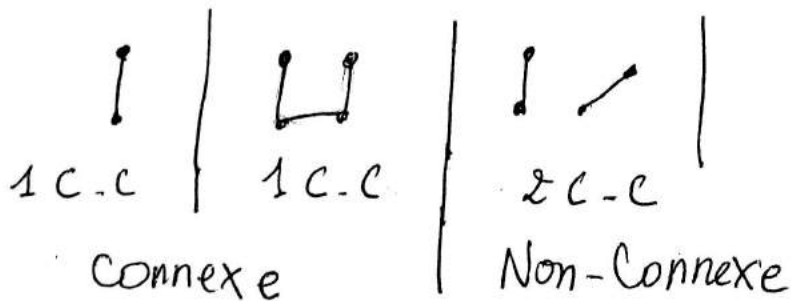
R est d'équivalence,

$\forall u \in V$, la classe d'équivalence de u est :

$$u = \{ v \in V \mid u R v \} = \{ v \in V \mid \exists \text{ une chaîne de } G \text{ entre } u \text{ et } v \}$$

toute classe d'équivalence est dite : une composante connexe de G notée : $C-c$.

Le graphe G est connexe s'il admet une unique $C-c$.



G connexe $\Leftrightarrow \forall u \in V, \forall v \in V \exists$ une chaîne entre u et v .

• Connexité forte : Soit $G(V, E)$ un graphe et R une relation sur V donnée par :

$\forall u \in V, \forall v \in V, u R v \Leftrightarrow$ $\begin{matrix} \exists \text{ un chemin de } u \text{ à } v \\ \exists \text{ un chemin " } v \text{ à } u \end{matrix}$

R est d'équivalence et $\forall u \in V$, la classe d'équivalence de u est :

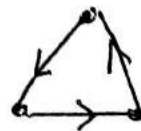
$$\begin{aligned} \dot{u} &= \{ v \in V / u R v \} \\ &= \left\{ v \in V / \begin{matrix} \exists \text{ un chemin de } u \text{ à } v \\ \exists \text{ " " de } v \text{ à } u \end{matrix} \right\} \end{aligned}$$

les classe d'équivalences de R sont les composantes fortement connexes de G .

Le Graphe G est fortement connexe s'il admet une unique composante fortement connexe (cfc)



f^{rnt} connexe



f^{rnt} connexe



n'est pas f^{rnt} connexe

Proposition : Si G est fortement connexe
 $\Rightarrow G$ est connexe
La réciproque est fausse

Algorithme de recherche des CFC,

soit $G(V, A)$ un graphe orienté avec :

$$V = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$$

Algo: Entrée : Un graphe G orienté

Sortie : Les composantes fortement connexes de G

Reponse à la question: G est-il fortement connexe ?

soit x_i un sommet de G marqué par $\pm$

1/ Marquer par $+$ tout les (sommet(s) successeurs de x_i mêm les non immédiats.

2/ Marquer - tous les prédécesseurs de x_i mêm les non immédiats.

3/ Pour $x_i = \{ \text{tous sommets marqués à la fois par } + \text{ et } - \}$

3-1/- Si $x_i = V$ alors G est fortement connexe

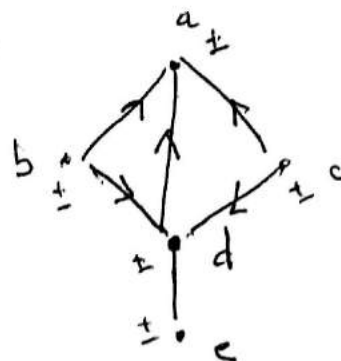
3-2/- Si non pour $V = V - x_i$, choisir un sommet $x_i \in V$ et refaire la procédure jusqu'à épuisement de tous les sommets de V .

Exp:

$$C = \{c\}$$

$$C \neq V$$

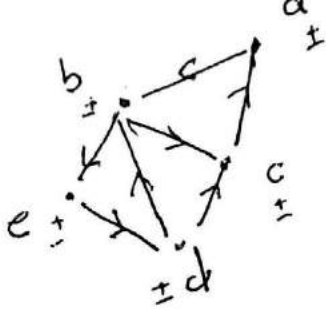
Donc G n'est pas fortement connexe.



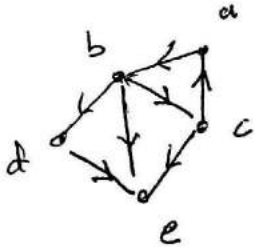
$$a = \{a\} \neq V$$

$$b = \{b\} \neq V$$

$$c = \{c\} \neq V$$



$\vec{a} = \{a, b, c, d, e\} = V$ donc G fort. connexe



$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{a} = \{a, b, c\} \neq V \\ \vec{d} = \{d\} \\ \vec{e} = \{e\} \end{array} \right.$$

Donc G n'est pas fortement connexe

Théorème : Soit $G(V, U)$ un graphe orienté alors les propositions suivantes sont équivalentes :

- 1 - G est fortement connexe
- 2 - G admet un circuit Hamiltonien (G est Hamiltonien)

Preuve en TD

Ordonner un graphe sans circuit

Soit $G(V, r)$ un graphe orienté sans circuits

On appelle dictionnaire du graphe G le couple $(V, r^{-1}(v))$

$$N_0 = \{v \in V / r^{-1}(v) = \emptyset\}$$

$$N_1 = \{v \in V / r^{-1}(v) \in N_0\}$$

$$N_2 = \{v \in V / r^{-1}(v) \in N_0 \cup N_1\}$$

$\vdots$

$$N_i = \{v \in V / r^{-1}(v) \subset \bigcup_{j=1}^{i-1} N_j\}$$

soit $\{x_1\}$ les sommets $r^{-1}(x) \neq \emptyset$

• Ainsi de suite :

La suite de sommet $\{x_1, x_2, x_3, \dots, x_k\}$ est :

- Un chemin hamiltonien si G est fort connexe
- " " maximum si non

Cycles et Cocycles :

Cocycle : soit $G(V, U)$ un graphe et soit $A \neq \emptyset \subseteq V$

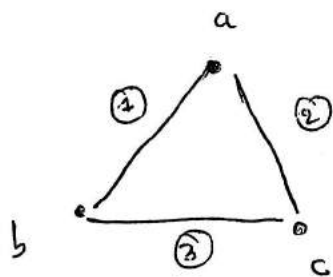
$$W^+(A) = \{ u \in U \mid I(u) \in A \text{ et } T(u) \notin A \}$$

$$W^-(A) = \{ u \in U \mid I(u) \notin A \text{ et } T(u) \in A \}$$

$$W(A) = W^+(A) \cup W^-(A)$$

Déf : Une partie $U' \subseteq U$ est un cocycle de G s'il $\exists$ une partie $A \subseteq V$ tq $W(A) = U'$.

Exp:



$U' = \{1, 2\}$ est un cocycle

car $\exists A = \{a\}$

$$\text{Tq : } W(A) = \{1, 2\}$$

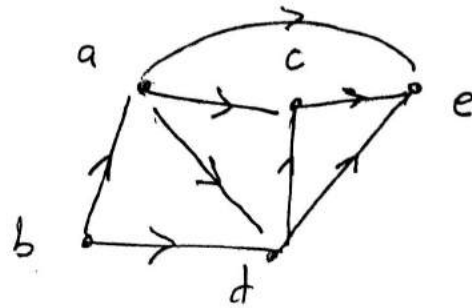
$\exists$ aussi $A = \{b, c\}$ Tq

$$W(\{b, c\}) = \{1, 2\}$$

$U'' = \{3\}$ n'est pas un cocycle de G
car $\nexists A \subseteq V$ tq $W(A) = U''$

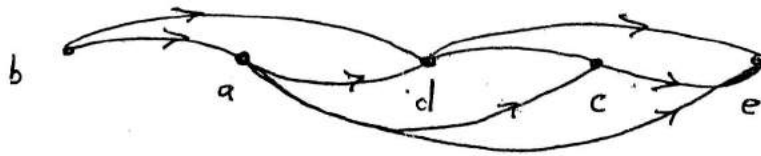
Exp 1

v	$r^-(v)$
a	b
b	ϕ
c	a, d
d	a, b
e	a, c, d



$$N_0 = \{b\}, N_1 = \{a\}, N_2 = \{d\}$$

$$N_3 = \{c\}, N_4 = \{e\}$$



Algorithme de Recherche du chemin Hamiltonien
soit $G(V, U)$ un graphe :

- Ordonner les sommets de V selon un ordre décroissant du $d^+(v)$.

- soit x_0 un sommet de G tq $d^+(x_0)$ est maximum
On fait $r(x_0) = \{x_0\} = G_1$.

soit x_1 un sommet de G_1 tq $d_{G_1}^+(x_1)$ est maximum
On fait $r(x_1) = \{x_1\} = G_2$.

Soit x_2 un sommet de G_2 tq $d_{G_2}^+(x_2)$ est maximum

Rq: Un sous ensemble d'arcs (arêtes) n'est pas forcément un cycle.

Propositions: Soit $G(V, E)$ un graphe simple, alors:

① G est connexe $\rightarrow m \geq n - 1$

② G sans cycle $\rightarrow m \leq n - 1$

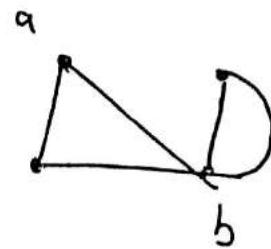
Lemme:

Soit $G(V, E)$, $\{a, b\} \notin E = U$

$G \cup \{a, b\}$ a 2 conséquences:

1 - Si $\{a, b\} \in a$ la m^{me} C.C.:

Création d'un nouveau cycle dans G , car a et b sont liés par une chaîne, donc on augmente le nbr de cycle d'une unité et le nbr de C.C. reste inchangé.



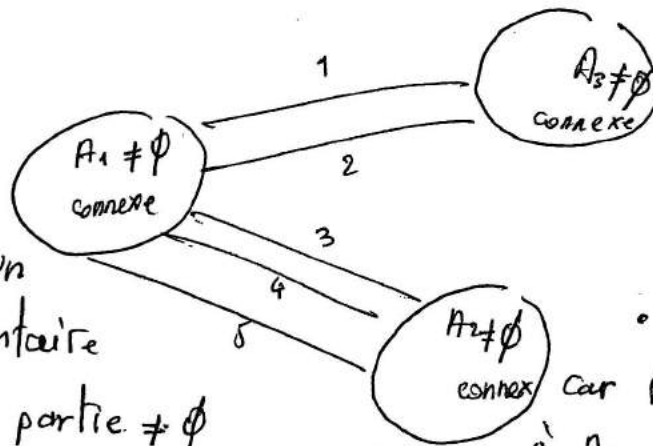
2 - Si $\{a, b\}$ sont dans 2 C.C. différentes

Création de cycle dans G , on augmente le nbr de cycle d'une unité et le Nbr de C.C. diminue d'une unité et pas de création de cycle

Cycle élémentaire: s'il ne passe pas 2 fois sur le même sommet.

Un cocycle $u' \subset U$ est élémentaire s'il existe deux parties non vides $A_1 \subseteq V$ et $A_2 \subseteq V$ connexes vérifiant:

- 1/ A_1 connexe $\neq \emptyset$ et A_2 connexe $\neq \emptyset$
- 2/ $A_1 \cap A_2 = \emptyset$
- 3/ $A_1 \cup A_2 =$ composante connexe de G
- 4/ $w(A) =$ ensemble des arcs reliant les sommets de A_1 à ceux de A_2



• $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ est un cocycle non élémentaire car il relie une partie $\neq \emptyset$ connexe A_1 avec une partie non vide $A_2 \cup A_3$ mais qui n'est pas connexe.

• $\{1, 2\}$ est élémentaire car relie $A_1 \neq \emptyset$ connexe à $A_3 \neq \emptyset$ connexe

• $\{3, 4, 5\}$ est élémentaire

si un cocycle u' n'est pas élémentaire alors u' peut s'écrire sous formes de cycles élémentaires, cette écriture est dite de composition de u' en cocycle élémentaire.

^WExp! La décomposition de $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ en cocycle élémentaire est : $\{1, 2, 3, 4, 5\} = \{1, 2\} \cup \{3, 4, 5\}$



$C = c_1 \cup c_2$ est une décomposition de cycle C en cycle élémentaire

• A chaque cycle ou cocycle on associe un vecteur représentatif de $\mathbb{R}^m$.

Si C est un cycle dans un graphe $G(V, U)$

$C = C^+ \cup C^-$ où C^+ = ensemble des arcs de C orientés dans le sens de parcours de C

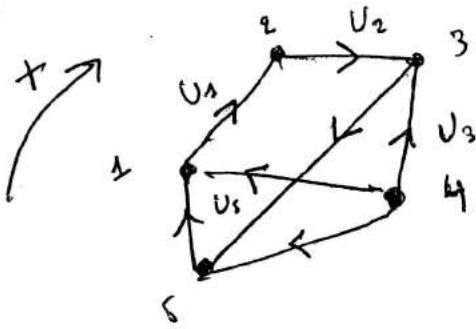
C^- = ensemble des arcs de C orientés dans le sens inverse de parcours de C

le vecteur représentatif de C est $u_j(C) = \begin{cases} 1 & \text{si l'arc } u_j \in C^+ \\ -1 & \text{si l'arc } u_j \in C^- \\ 0 & \text{si non} \end{cases}$

• A chaque cocycle $w(A)$ de G on associe un vecteur représentatif de $\mathbb{R}^n$ définie par :

$$\gamma_j(w(A)) = \begin{cases} 1 & \text{si } u_j \in w^+(A) \\ -1 & \text{si } u_j \in w^-(A) \\ 0 & \text{si non} \end{cases}$$

Ex: 1



$$C = 12341$$

$$C^+ = \{u_1, u_2, u_3\} \quad C^- = \{u_4\}$$

$$\text{donc } M(C) = (1, 1, 1, 0, 1, 0, 0) \in \mathbb{R}^7$$

$$w(\{3\}) = \{u_2, u_4, u_3\} = (0, 1, -1, 1, 0, 0, 0) \in \mathbb{R}^7$$

Théorème: soit $G(V, U)$ un graphe $|V| = n$ et $|U| = m$
à p composantes connexes, alors

- 1 - Dans $F_G = V(G) = m - n + p$
- 2 - Dans $\mathcal{C}_G = \lambda(G) = n - p$

$V(G)$ le nbr cyclomatique de G

$\lambda(G)$ le nbr cocyclomatique de G

Rq: Deux cycles (ou cocycles) sont dits indépendants
s'ils contiennent au moins un arc que les autres ne
contiennent pas.

Arbre et Arborecence

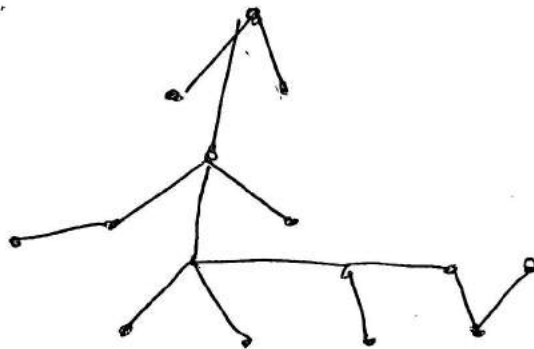
• Arbre

Def: Si $G(V, E)$ est un graphe, on dit que G est un arbre si G est connexe et sans cycle.

G Arbre $\Leftrightarrow G$ est connexe et sans cycle

$$\Leftrightarrow m \geq n-1 \text{ et } m \leq n-1$$

$$\Leftrightarrow m = n-1$$



• Forêt

Def: si $G(V, E)$ est un arbre G est une forêt si G est sans cycles.

Rq: Les C.C d'une forêt sont des arbres.

• Sommets Pendants: si G est un arbre, un sommet x_0 est dit pendent si $d(x_0) = 1$

Proposition: si G est un arbre alors $\exists$ au moins 2 sommets pendants de G

Recherche de la base de cycle est Cycle

• Base de cycle

soit A un arbre de G ,

$A \cup \{u_i\}$ $u_i \notin A$ crée un cycle C_i dans G

refaire ceci $\forall u_i \in G$ et $u_i \notin A$

$$A = \{u_1, u_3, u_5\}$$

$$A \cup \{u_2\} \Rightarrow C_1 = \{u_1, u_2, u_3\} \cup u_5$$

$$u_1 = (1, 1, -1, 0, 0)$$

$$A \cup \{u_4\} \Rightarrow C_2 = \{u_3, u_4, u_5\}$$

$$u_2 = (0, 0, 1, -1, -1)$$

$C_1 \cup C_2$ sont élémentaires

$$C_3 = \{u_1, u_2, u_4, u_5\} \quad u_3 = (1, 1, 0, -1, -1)$$

$$(1, 1, 0, -1, -1) = \alpha_1 (1, 1, -1, 0, 0) + \alpha_2 (0, 0, 1, -1, -1)$$

$$\Rightarrow \alpha_1 = 1 \text{ et } \alpha_2 = 1$$

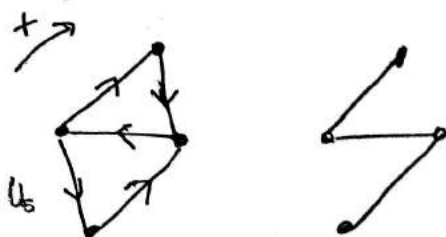
C_3 n'est pas élémentaire

• Base de Cocycle :

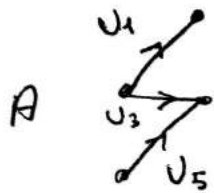
soit A un arbre de G .

$A - \{u_1\}$ crée un cycle élémentaire dans G .

refaire ceci $\forall u_i \in A$.



Exp:



$A - u_1$



$u_1 = \{u_1\}$ cycle

$A - u_3$



$u_3 = \{u_3\}$ cycle

$A - u_5$



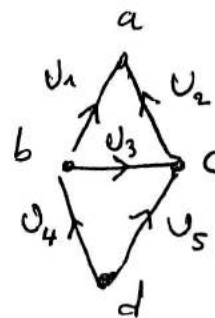
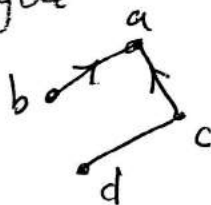
$u_5 = \{u_5\}$

$$\Delta(G) = n - 1 = 4 - 1 = 3$$

$$\begin{aligned} U(G) &= m - n + 1 \\ &= 5 - 4 + 1 \\ &= 2 \end{aligned}$$

Exp2: Cycle

$V(G) =$



Soit $A = \{u_1, u_2, u_5\}$ un arbre de G , le sens de lecture est le sens de u_3

On a: $A \cup \{u_3\} \rightarrow C_1 = \{u_3, u_2, u_1\}$

$$U(C_1) = (-1, 1, 1, 0, 0)$$

$$A \cup \{v_4\} \rightarrow C_2 = \{v_4, v_5, v_1, v_2\}$$

$$\mu(C_2) = (-1, 1, 0, 1, -1)$$

$$V(G) = m - n + p = 5 - 4 + 1 = 2$$

Dans la base des cycles de G est de 2 cycles élémentaires C_1, C_2

$$B = \{C_1, C_2\}$$

$C_3 = \{v_3, v_4, v_5\}$ s'écrit comme combinaison de C_1 et C_2

$$\mu(C_3) = (0, 0, 1, 1, -1)$$

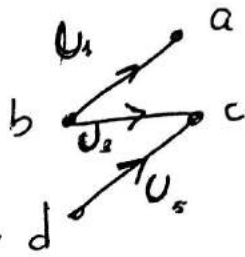
$$(0, 0, 1, 1, -1) = \alpha_1 (-1, 1, 1, 1, -1)$$

!?
on verra
+ tard

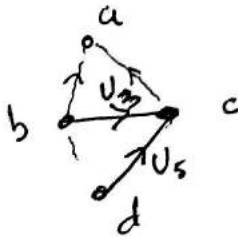
Exp 3 (Cocycle) ^{Base}

Les sens de U_3 type

soit $A = \{U_1, U_2, U_3\}$ un arbre de G :



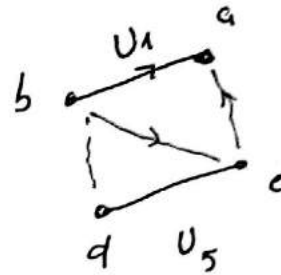
$$A - \{U_1\} \rightarrow 2 \text{ cc}$$



$$w(C_1) = \{U_1, U_2\} \quad \gamma_1 = (-1, 1, 0, 0, 0)$$

$$w(C_2) = \{U_2, U_3, U_4\}$$

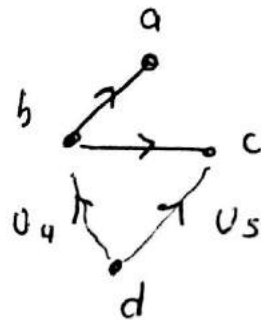
$$\gamma_2 = (0, 1, 1, 1, 0)$$



$$A - \{U_5\} \rightarrow 2 \text{ cc}$$

$$w(C_3) = \{U_4, U_5\}$$

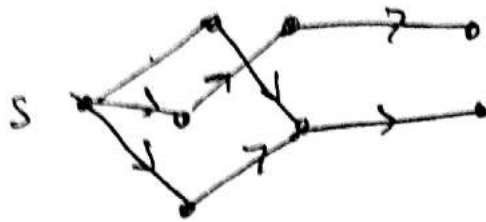
$$\gamma_3 = (0, 0, 0, 1, -1)$$



$$d(G) = n - p = 4 - 1 = 3$$

La base de cocycles de G est formé par les 3 cocycles $\{w_1, w_2, w_3\}$

Racine : si G est un graphe, un sommet s de G est dit racine, s'il $\exists$ un chemin de s à x $\forall x$ un sommet de G .



Arborescence : Un graphe G est dit arborescent si G est un arbre muni d'une racine s .

Proposition (TD) La racine d'une arborescence est unique

Graphe quasi fortement connexe :

Un graphe G est quasi fortement connexe si :

$\forall x \in V, \forall y \in V, \exists z \in V \text{ tel } \exists \text{ un chemin de } z \text{ à } x$
et un chemin de z à y

proposition : Soit $G(V, U)$ un graphe $|V| = n$,
 $|U| = m$, alors (1) $\iff$ (2)

1/ G est QfC

2/ G admet une racine a

Graphe planaire :

Représentation planaire : une représentation planaire si deux arêtes ne se coupent jamais



n'est pas planaire

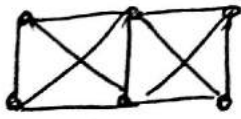


planaire

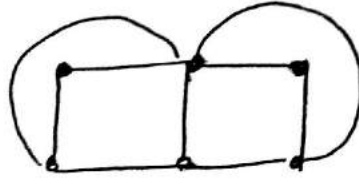


K_4 planaire

Déf (Graphe planaire) Un graphe est planaire s'il admet une représentation planaire.



est planaire
car il admet une représentation planaire :



Graphe isomorphe :

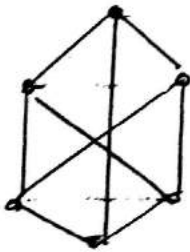
Deux graphes $G(V, E)$ et $H(V', E')$

sont dit isomorphe s'il $\exists$ une bijection

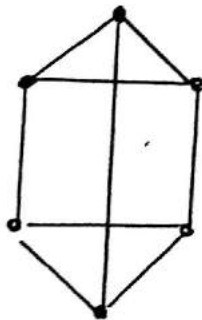
$\varphi: V \rightarrow V'$ tq $uv \in E$,

si et seulement si $\varphi(u), \varphi(v) \in E'$

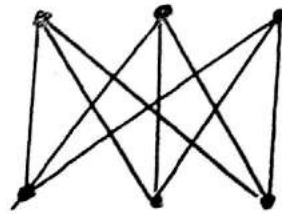
Exp 1



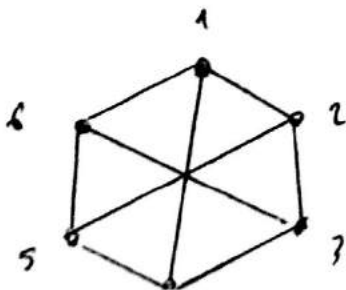
G_1

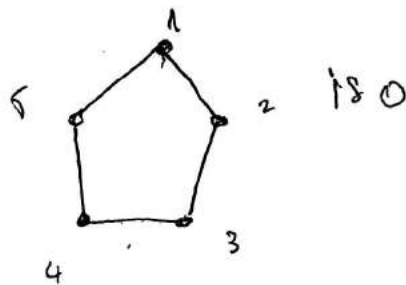
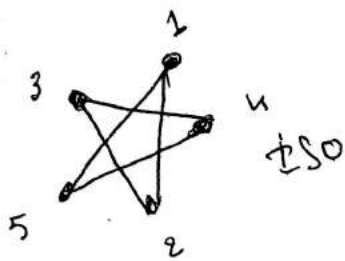


G_2

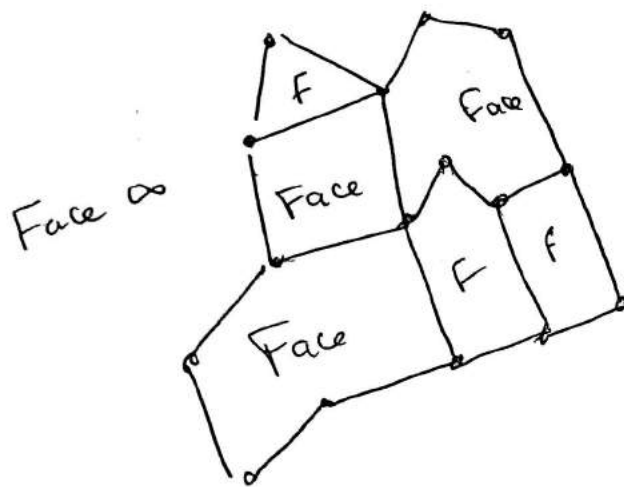


G_3





Proposition: Un graphe G est planaire s'il n'admet pas de sous-graphe isomorphe à un $K_{3,3}$ ou un K_5



Face : Dans un graphe planaire, une face est une portion de celui-ci, tq deux sommets q'q sont joints par une arête ne rencontrent aucune arête.

Contour d'une face : c'est l'ensemble des arêtes définissant cette face

Rq : • A tout graphe planaire, on associe une face dite Face infinie, qui est le plan-graphe

• A chaque face d'un graphe planaire correspond un cycle élémentaire

Théorème d'Euler: Soit $G(V, E)$ un graphe planaire tq $|V| = n$, $|E| = m$

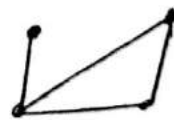
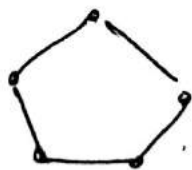
et f le nombre de faces de G

$$\text{alors : } n - m + f = 2$$

prop: si $G(V, E)$ un graphe, on peut définir sur G une application de pondération des sommets de G , ou des arêtes de G .

$P: V \rightarrow R$: le graphe est donc à sommets pondérés
 $v \rightarrow P(v)$

ou $p: E \rightarrow R$
 $e \rightarrow p(e)$
 $(v) \quad (p(v))$
 c'est un graphe à arêtes pondérées



Arbre de poids maximum :

Pb: $G(V, E)$ un graphe connexe, arêtes pondérées

Extraire de G un arbre A tq

$P(A) = \sum_{e \in A} p(e)$ est maximum



$$P(A) = 4 + 5 = 9$$

Algorithme de Kruskal

1/ Ordonner les arêtes de G selon un ordre décroissant de 2 poids

2/ $A: \emptyset$

Ajouter pas à pas des arêtes de G est selon l'ordre établi en 1/ en évitant la création de cycle à une étape j

Si $A \cup \{e_j\}$ crée un cycle

passer à e_{j+1} jusqu'à épuisement des arêtes