PRINCIPE DE RÉCURRENCE

- il semble que ***formule***
- on vérifie au premier range $\underline{u_x}$
- si à un range n donné, on a *formule*, alors au rang suivant à *(arriver à u_{n+1})*
- la formule ***formule*** est vrai au premier $\underline{u_x}$ et est héréditaire donc la formule est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$

SENS DE VARIATION

croissante → $u_{n+1} > u_n$
décroissante → $u_{n+1} < u_n$
=> étude du signe de $u_{n+1} - u_n$

MAJORANTE/ MINORANTE

majoré → $u_n > M$
minoré → $u_n < m$

suite

- arithmétique: $u_n = u_p + r*(n-p)$ où $u_{n+1} = u_n + r$
- géométrique: $u_n = u_p * q^{n-p}$ où $u_{n+i} = u_n * q$

FORMULES DE SOMMES

$1+2+2+...+n = \frac{n*(n+1)}{2}$

$1+q+q^2+q^3+...+q^n = \frac{1-qn+1}{1-q}$

PROBABILITÉ CONDITIONNELLE

- probabilité de A sachant que B est réalisé: $P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$
- indépendance de deux événements: quand $P(A \cap B) = P(A)*P(B)$ alors $P_B(A)=P(A)$ et $P_A(B)=P(B)$

CONTINUITÉ

- si f est continue alors f est représentée par une courbe
- si f est discontinue alors f est représentée par plusieurs courbes, on utilise cette discontinuité pour les limites : $\lim_{x \to a} f(x) = k$ où a est la discontinuité
- si $\lim_{x \to a} g(x) = 0$ et $g(x) > 0$ alors $\lim_{x \to a} g(x) = 0^+$
- si $\lim_{x \to a} g(x) = 0$ et $g(x) < 0$ alors $\lim_{x \to a} g(x) = 0^-$

LIMITE D'UNE SUITE

u_n	k	n^p où $p \in \mathbb{N}^*$		$1/n^p$ où $p \in \mathbb{N}^*$	$\sqrt{n}$
		p pair	p impaire		
$\lim_{n \to +\infty} =$	k	$+\infty$		0	$+\infty$
$\lim_{n \to -\infty} =$	k	$+\infty$	$-\infty$	0	

- <u>pour q^n:</u>

q>1 $\lim_{n \to +\infty} q^n = +\infty$

q=1 $\lim_{n \to +\infty} q^n = 1$

-1<q<1 $\lim_{n \to +\infty} q^n = 0$

q<1 $\lim_{n \to +\infty} q^n$ → impossible

- *cos* et *sin* n'admettent pas de limite

$f(x)$	$1/x^n$ avec n pair	$1/x^n$ avec n impair
$\lim\limits_{x\to 0 \; et \; x<0} =$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to 0 \; et \; x>0} =$	$+\infty$	$+\infty$

- somme de limite:

	ℓ	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
+	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
=	ℓ+ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	Ø

- produit de limite:

	ℓ	ℓ>0	ℓ>0	ℓ<0	ℓ<0	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	0
×	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$/$-\infty$
=	ℓ*ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	Ø

- quotient de limite:

	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	+/-∞	ℓ>0 ou $+\infty$		ℓ<0 ou $-\infty$	
÷	ℓ'	+/-∞	ℓ>0	ℓ>0	ℓ<0	ℓ<0	+/-∞	0^+	0^-	0^+	0^-
=	$\frac{\ell}{\ell'}$	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	Ø	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$

THÉORÈME DE COMPARAISON

- si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ et $u_n \le v_n$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$
- si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$ et $u_n \ge v_n$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$

THÉORÈME DES GENDARMES

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$

+ $u_n \le w_n \le v_n$ => $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = \ell$

$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \ell$

THÉORÈME

- si la suite est <u>croissante</u> et <u>n'a pas de limite</u>, alors elle diverge vers $+\infty$
- si la suite est <u>décroissante</u> et <u>n'a pas de limite</u>, alors elle diverge vers $-\infty$
- si la suite est <u>croissante</u> et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \ell$, alors v_n est majorée par ℓ ⇔ $v_n < \ell$

- si la suite est <u>décroissante</u> et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \ell$, alors v_n est minorée par $\ell \Leftrightarrow v_n > \ell$

composition

si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ et $\lim\limits_{x\to b} g(X) = c$, alors $\lim\limits_{x\to a} g(f(x) = c$

ASYMPTOTES

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = a$	$\to$	$y = a$ comme asymptote horizontale au voisinage de $+\infty$
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = a$	$\to$	$y = a$ comme asymptote horizontale au voisinage de $-\infty$
$\lim\limits_{x\to b} f(x) = +\infty$	$\to$	$x = b$ comme asymptote horizontale au voisinage de b
$\lim\limits_{x\to b} f(x) = -\infty$	$\to$	$x = b$ comme asymptote horizontale au voisinage de b

DÉRIVATION

$f'(a) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$, si $x = a + h$ alors $f'(a) = \lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$

$\to$ la tangente en a a pour équation $y = f'(a)(x-a) + f(a)$

DÉRIVÉ ET PRIMITIVE

primitive: $F(x)$	$f(x)$	dérivé: $f'(x)$	domaine de validité
k (une constante)	0	0	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{n+1}x^{n+1}$	x^n ($n\in\mathbb{N}^*$)	$n\,x^{n-1}$	$\mathbb{R}$
$ln(x)$	$\frac{1}{x}$	$-1/x^2$	$]0;+\infty[$
[redacted]	$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0;+\infty[$
$2\sqrt{x}$	$\frac{1}{\sqrt{x}}$	[redacted]	$]0;+\infty[$
$-cos(x)$	$sin(x)$	$cos(x)$	$\mathbb{R}$
$sin(x)$	$cos(x)$	$-sin(x)$	$\mathbb{R}$

NB: <u>UNE</u> primitive $f(x) \to F(x)$ ≠ <u>TOUTES</u> le<u>s</u> primitive<u>s</u> $f(x) \to F(x) + k$

- opération de dérivé		
$(u+v)' = u' + v'$	$(u-v)' = u' - v'$	(ku)'=ku'
$(uv)' = u'v + uv'$	$(\frac{u}{v})' = \frac{u'v-uv'}{v^2}$	$(\frac{1}{u})' = -\frac{u'}{u^2}$
$(u^n)' = nu'u^{n-1}$	$(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$	$(sin(u))' = u'cos(u)$
$(cos(u))' = -u'sin(u)$		
- opération de primitive ⚠si toutes les primitives sont demandées, on ajoute $+k$		
$u'e^u \to e^u$	$u'u^n \to \frac{1}{n+1}n^{n+1}$	$\frac{u'}{u^2} \to -\frac{1}{u}$

$\frac{u'}{\sqrt{u}} \rightarrow 2\sqrt{u}$	$\frac{u'}{u} \rightarrow ln(x)$	$u'sin(u) \rightarrow -cos(u)$
$u'cos(u) \rightarrow sin(u)$		

- sens de variation			
$f \nearrow$ sur I	$\Leftrightarrow$	$f'(x) \geq 0$	pour $x \in I$
$f \searrow$ sur I	$\Leftrightarrow$	$f'(x) \leq 0$	
$f \rightarrow$ sur I	$\Leftrightarrow$	$f'(x) = 0$	
$\rightarrow$ étudier le sens de variation de f = étudier le signe de $f'(x)$			

ÉTUDE D'UNE FONCTION

- valeur interdite s'il y a un dénominateur
- calculer des limites en $-\infty$, $+\infty$ et aux valeurs interdites
- faire la dérivée
- faire le tableau de signes de la dérivée
- en déduire le sens de variation de la fonction (et vérifier les limites)

THÉORÈME DE LA VALEUR INTERMÉDIAIRE

- on veut $f(x) = a$
- il faut dire:
  - f est continue car dérivable
  - f est strictement croissante (monotone) sur $[y; z]$
  - $a \in [b; c]$
- alors 'après le théorème de la valeur intermédiaire, l'équation $f(x) = a$ admet une unique solution sur $[y; z]$

EXPONENTIELLE

- $f' = f$ et $f(0) = 1$
- $exp(1) \approx 2.718\ 281\ 828\ 459$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$exp'(x) = exp(x)$		+	1	+	
$exp(x)$	0	$\nearrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

- propriétés		
$exp(a+b) = exp(a) \times exp(b)$	$exp(a-b) = \frac{exp(a)}{exp(b)}$	$exp(a \times b) = (exp(a))^b$
$e^{-a} = \frac{1}{e^a}$	$e^{1/2} = \sqrt{e}$	$(eu)' = u'e^u$

$e^a = e^b \Leftrightarrow a = b$	$e^a > e^b \Leftrightarrow a > b$	$e^a < e^b \Leftrightarrow a < b$
$\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$	$\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$	$\lim\limits_{x \to -0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$
$\lim\limits_{x \to -\infty} xe^x = 0$	$\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$	

LOGARITHME NÉPÉRIEN

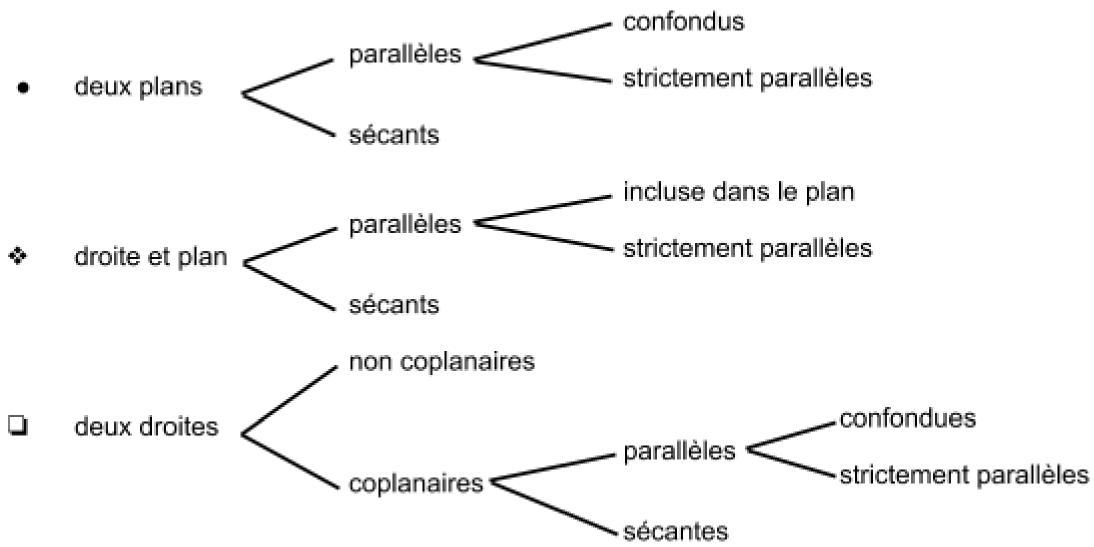
- fonction réciproque de l'exponentielle
- $e^b = a$ // $ln\ a = b$

x	0		$+\infty$
$exp'(x) =$		$+$	
$exp(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

- propriétés		
$ln(exp(a)) = a$	$exp(ln(a)) = a$	$(ln(u))' = \frac{u'}{u}$
$ln(ab) = exp(a) + exp(b)$	$ln(\frac{a}{b}) = ln(a) - ln(b)$	$ln(a^n) = n\ ln(a)$
$\lim\limits_{x \to -0} ln(x) = -\infty$	$\lim\limits_{x \to +\infty} ln(x) = +\infty$	$\lim\limits_{h \to -0} \frac{ln(1+h)}{h} = 1$
$\lim\limits_{x \to 0} xln(x) = 0$	$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{ln(x)}{x} = 0^+$	

DROITES ET PLANS DANS L'ESPACE

- positions:



- théorèmes de parallélisme ($D \rightarrow$ droite/ $P \rightarrow$ plan/ A $\rightarrow$ point)

❑ deux droites:

- D et A, D' existe telle que $D//D'$ et A $\in D'$
- $D//D'$ et $\Delta//D' \rightarrow D//D'//\Delta$
- $D//D'$ et P coupe $D \rightarrow P$ coupe D'

❖ droite et plan:

- $D//P$, Δ existe telle que $\Delta//D$ et $\Delta \in P$
- $D//D'$ et $D//P \rightarrow D'//P$
- $D//P$, $D//P'$ et P et P' sécant en $\Delta \rightarrow D//\Delta$

● plans

- P et A, il existe un unique P' tel que $P'//P$ et A $\in P'$
- $P//P'$ et $P//P'' \rightarrow P//P'//P''$
- $P//P'$, D coupe l'un et l'autre
- $P//P'$ et $P//D \rightarrow P//P'//D$
- $P//P'$ et P'' coupe l'un et l'autre $\rightarrow$ intersections parallèles
- D et D' sécantes sur P , $D//P'$ et $D'//P' \rightarrow P//P'$

- orthogonalité

★ $\vec{AB} = \vec{u}$ et $\vec{AC} = \vec{v}$, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si $(AB)\perp(AC)$

★ D et D' sont orthogonales ⇔ $D\perp D'$ et D et D' sont sécantes

★ D orthogonale à P ⇔ D orthogonale à deux droites sécantes de P

★ points à équidistance de A et B = le plan médiateur P (au milieu de $[AB]$)

★ P et P' orthogonaux ⇔ $D \in P$ et $D\perp P'$

➢ $D\perp P$ et $D\perp P \rightarrow D//D'$ ⇔ $D//D'$ et $D\perp P \rightarrow D'\perp P$

➢ $P//P'$ et $D\perp P \rightarrow D\perp P'$

➔ $\vec{u}\,(x;y;z)$, $\vec{v}\,(x';y';z')$, $A\,(x_A;y_A;z_A)$ et $B\,(x_B;y_B;z_B)$ ◆ produit scalaire: $\vec{u}\cdot\vec{v} = xx' + yy' + zz'$ ◆ norme: $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ ◆ longueur: $AB = \sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2}$
❏ équation de plan ❏ $\vec{n}$, normal à P quand $\vec{n}$ orthogonal à deux vecteurs non colinéaires de P ❏ $P // P' \Leftrightarrow$ $\vec{n}$ (normal à P) et $\vec{n'}$ (normal à P') sont colinéaires ❏ $P // D \Leftrightarrow$ $\vec{n}$ (normal à P) $\perp$ $\vec{u}$ (directeur à D) ❏ $P \perp \Delta \Leftrightarrow$ $\vec{n}$ (normal à P) et $\vec{u}$ (directeur à Δ) sont colinéaires ❏ équation de P , de vecteur normal $\vec{n}\,(a;b;c)$: $ax+bx+cy+d=0$

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE DANS L'ESPACE

- repère $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$
- $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ où x est l'abscisse, y l'ordonnée et z la cote

- propriétés	
avec: - $\vec{u}\,(x,y,z)$ - $\vec{v}\,(x',y',z')$ - $A\,(x_A,y_A,z_A)$	- $\alpha \in \mathbb{R}$ - $\beta \in \mathbb{R}$ - $B\,(x_B,y_B,z_B)$
$\vec{u}+\vec{v} = (x+x',\ y+y', z+z')$	$-\ \vec{u}\,(-x,-y,-z)$
$\vec{u}-\vec{v} = (x-x',\ y-y', z-z')$	$\alpha\,\vec{u}\,(\alpha x, \alpha y, \alpha z)$
$\alpha\,\vec{u}+\vec{v} = (\alpha x+\beta x',\ \alpha y+\beta y', \alpha z+\beta z')$	$\vec{AB} = (x_B - x_A,\ y_B - y_A,\ z_B - z_A)$
$m\,[AB]\,((x_B + x_A) \div 2, (y_B + y_A) \div 2, (z_B + z_A) \div 2)$	vecteur colinéaire ⇔ coordonnées proportionnelles

- représentation paramétrique:
- droite, passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$:
$\begin{cases} x = kx_{\vec{u}} + x_A \\ y = ky_{\vec{u}} + y_A \\ z = kz_{\vec{u}} + z_A \end{cases}$ avec $k \in \mathbb{R}$
- plan, passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$ et $\vec{v}$:

$$\begin{cases} x = kx_{\vec{u}} + lx_{\vec{v}} + x_A \\ y = ky_{\vec{u}} + ly_{\vec{v}} + y_A \\ z = kz_{\vec{u}} + lz_{\vec{v}} + z_A \end{cases}$$ avec $k \in \mathbb{R}$ et $l \in \mathbb{R}$

NOMBRE COMPLEXE

$i^2 = -1$ $\mathbb{C} = \{x + iy / x \in \mathbb{R}\ et\ y \in \mathbb{R}\}$

on note:

- $z = x + iy$, la forme algébrique
- x : partie réelle / $x = Re(z)$
- y : partie imaginaire / $y = Im(z)$
  - si $y = 0$ alors $z \in \mathbb{R}$
  - si $x = 0$ alors $z \in \mathbb{R}$

nombre complexe conjugué sachant que $\overline{(x + iy)} = x - iy$

- règle de calcul				
$\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$	$\overline{-z} = -\overline{z}$	$\overline{z - z'} = \overline{z} - \overline{z'}$	$\overline{z \times z'} = \overline{z} \times \overline{z'}$	$\overline{(\frac{1}{z})} = \frac{1}{\overline{z}}$
$\overline{(\frac{z}{z'})} = \frac{\overline{z}}{\overline{z'}}$	$\overline{z^n} = (\overline{z})^n$	$\overline{z + z} = 2x$	$\overline{z - z} = 2iy$	$\overline{z \times z} = x^2 + y^2$

- second degré			
$az^2 + bz + c = 0$		$\Delta = b^2 - 4ac$	factorisation
$\Delta > 0$	$z_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$	$z_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$	$f(z) = a(z - z_1)(z - z_2)$
$\Delta = 0$	$z_0 = \frac{-b}{2a}$		$f(z) = a(z - z_0)^2$
$\Delta < 0$	$z_1 = \frac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a}$	$z_2 = \frac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}$	$f(z) = a(z - z_1)(z - z_2)$

preuve des factorisations

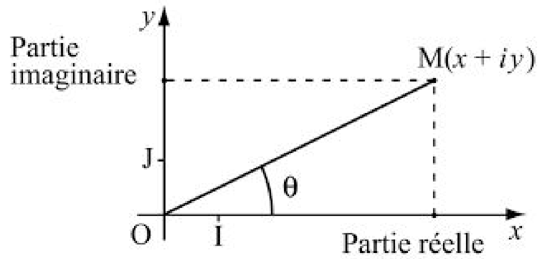
$f(z) = az^2 + bz + c \Leftrightarrow f(z) = a(z^2 + \frac{b}{a}z + \frac{c}{a})$ or $(z + \frac{b}{2a})^2 = z^2 + \frac{b}{a}z + \frac{b^2}{4a^2}$

d'où $f(z) = a\left[(z + \frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right] = a\left[(z + \frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2-4ac}{4a^2}\right]$

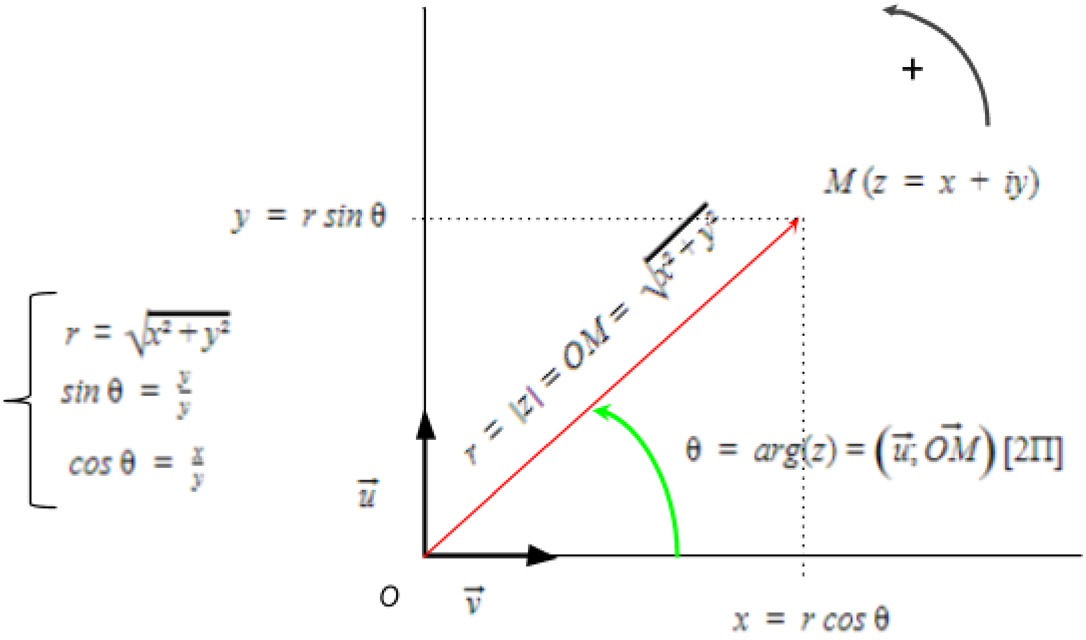
soit $\Delta = b^2 - 4ac$, alors $f(z) = a\left[(z + \frac{b}{2a})^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$

dans les cas des Δ		factorisation
$\Delta > 0$	$\Delta = \sqrt{\Delta}^2$ d'où $f(z) = a\left[(z + \frac{b}{2a})^2 - (\frac{\sqrt{\Delta}}{2a})^2\right]$ $= a\left[(z + \frac{b}{2a}) - (\frac{\sqrt{\Delta}}{2a})\right] \times \left[(z + \frac{b}{2a}) + (\frac{\sqrt{\Delta}}{2a})\right]$ soit $z_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $z_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$	$f(z) = a(z - z_1)(z - z_2)$
$\Delta = 0$	$f(z) = a\left[(z + \frac{b}{2a})^2\right]$ soit $z_0 = \frac{-b}{2a}$	$f(z) = a(z - z_0)^2$

$\Delta < 0$	$\Delta = -1 \times (-\Delta) = i^2(-\Delta)$ or $-\Delta > 0$ donc $\Delta = i^2\sqrt{-\Delta}^2 = (i\sqrt{-\Delta})^2$ donc $f(z) = a\left[\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{i\sqrt{-\Delta}}{2a}\right)^2\right]$ $= a\left[\left(z + \frac{b}{2a}\right) - \left(\frac{i\sqrt{-\Delta}}{2a}\right)\right] \times \left[\left(z + \frac{b}{2a}\right) + \left(\frac{i\sqrt{-\Delta}}{2a}\right)\right]$ soit $z_1 = \frac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ et $z_2 = \frac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}$	$f(z) = a(z - z_1)(z - z_2)$

- affixe d'un vecteur, affixe d'un point	
	- $\vec{w} + \vec{n}$: $z_{\vec{w}} + z_{\vec{n}}$ - $\alpha \times \vec{w}$: $\alpha \times z_{\vec{w}}$ - $\vec{AB}$: $z_B - z_A$ - milieu de $[AB]$: $(z_A + z_B) \div 2$

FORME TRIGONOMÉTRIQUE D'UN NOMBRE COMPLEXE



- $z = x + iy$, la forme *algébrique*
- $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$, forme *trigonométrique*
- $z = r\,e^{i\theta}$ avec $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$, notation *exponentielle*

- règle de calcul		
$\|z + z'\| \leq \|z\| + \|z'\|$	$arg(\bar{z}) = -arg(z)\ [2\Pi]$	$arg(z) = 0$ ou $\Pi\ [2\Pi]$ si $z \in \mathbb{R}$
$\|i\| = 1$	$arg(-z) = arg(z) + \Pi\ [2\Pi]$	$arg(z) = \frac{\Pi}{2}$ ou $-\frac{\Pi}{2}\ [2\Pi]$ si z est un imaginaire pur
$\|z\| = \sqrt{x^2 + y^2}$ ou $\|z\|^2 = x^2 + y^2$	$\|-z\| = \|z\|$ et $\|\bar{z}\| = \|z\|$	

$\lvert z \times z' \rvert = \lvert z \rvert \times \lvert z' \rvert$	$arg(z \times z') = arg(z) + arg(z')$ $[2\Pi]$
$\left\lvert \frac{1}{z} \right\rvert = \frac{1}{\lvert z \rvert}$ avec $z \neq 0$	$arg(\frac{1}{z}) =- arg(z)$ $[2\Pi]$
$\left\lvert \frac{z}{z'} \right\rvert = \frac{\lvert z \rvert}{\lvert z' \rvert}$ avec $z' \neq 0$	$arg(\frac{z}{z'}) = arg(z) - arg(z')$ $[2\Pi]$
$\lvert z^n \rvert = \lvert z \rvert^n$	$arg(z^n) = n \times arg(z)$ $[2\Pi]$

$e^0 = 1$	$e^{i\Pi} =- 1$	$e^{i\frac{\Pi}{2}} = i$	$e^{-i\frac{\Pi}{2}} =- i$	$(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$
$e^{i(\theta+\theta')} = e^{i\theta} \times e^{i\theta'}$			$e^{-i\theta} = \frac{1}{e^{i\theta}}$	$e^{i(\theta-\theta')} = \frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}}$

- calcule d'angles et de longueurs	
$\lVert \vec{w} \rVert = \lvert z_{\vec{w}} \rvert$	$(\vec{w}, \vec{n}) = arg(\frac{z_{\vec{n}}}{z_{\vec{w}}})$ $[2\Pi]$
$AB = \lvert z_B - z_A \rvert$	$(\vec{AB}, \vec{CD}) = agr(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A})$ $[2\Pi]$

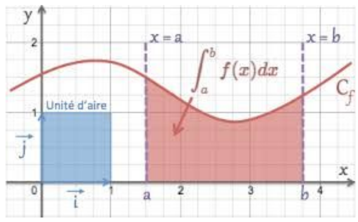
CALCUL D'INTÉGRAL

- unité d'aire

- repère $(O; \vec{i}; \vec{j}) \rightarrow 1\ u.a. = \lVert \vec{i} \rVert \times \lVert \vec{j} \rVert$
- intégrale de a à b:

  $\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$

  - tel que $F(x)$ est une primitive de $f(x)$ *(cf. partie dérivé et primitive)*
  - nombre trouvé indépendant du repère choisi → aires exprimées en $u.a.$



- propriétés:

$\int_a^a f(x)dx = 0$	$\int_a^b f(x)dx =- \int_b^a f(x)dx$	$\int_a^b k\ dx = k\,(b-a)$ où $k = cst$

relation de chasles:	$\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx$	
linéarité:	$\int_a^b (f(x) + g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$	
	$\int_a^b k \times f(x)dx = k \times \int_a^b f(x)dx$	
compatibilité sur $[a; b]$	$f(x) \geq 0 \Leftrightarrow \int_a^b f(x)dx \geq 0$	$f(x) \geq g(x) \Leftrightarrow \int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$
valeur moyenne m	$m = \frac{1}{b-a} \times \int_a^b f(x)dx$	

inégalité de la moyenne	si $m \leq f(x) \leq M$ $m \times (b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M \times (b-a)$

VARIABLE ALÉATOIRE

x_i	x_1	x_2	x_2	...	x_n	TOTAL
$p(X=x_i)$	$p(X=x_1)$	$p(X=x_2)$	$p(X=x_3)$	...	$p(X=x_n)$	1

espérance	$E(X) = \Sigma x_i \times p(X=x_i) = x_1 \times p(X=x_1) + x_2 \times p(X=x_2) + ... + x_n \times p(X=x_n)$
variance	$\upsilon(X) = \Sigma(x_i - E(x))^2 \times p(X=x_i)$ $= (x_1 - E(X))^2 \times p(X=x_1) + ... + (x_n - E(X))^2 \times p(X=x_n)$
écart-type	$\sigma(X) = \sqrt{\upsilon(X)}$

LOI BINOMIALE

- schéma de Bernoulli

expérience réalisée n fois, avec soit S le succès et $\overline{S}$ l'échec et k le nombre de succès

- propriétés des coefficients binomiaux $\binom{n}{k}$

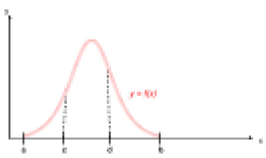
$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$	$\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$	$\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$	$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$

- loi binomiale

· soit X, un événement
· on répète l'expérience n fois de manière indépendante/ avec remise
· X compte le nombre de succès avec un probabilité égale à p
· donc X suit la loi binomiale, on peut écrire: $X \sim B(n;p)$

- propriétés

pour $k \leq n$, $p(X=k) = \binom{n}{k} \times p^k \times (1-p)^{n-k}$

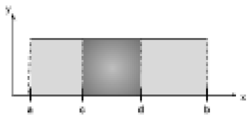
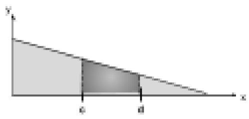
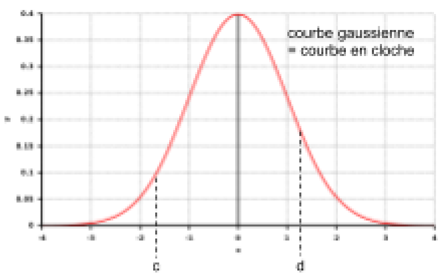
on a aussi:	$E(x) = np$ 	$\upsilon(X) = np(1-p)$	$\sigma(X) = \sqrt{np(1-p)}$

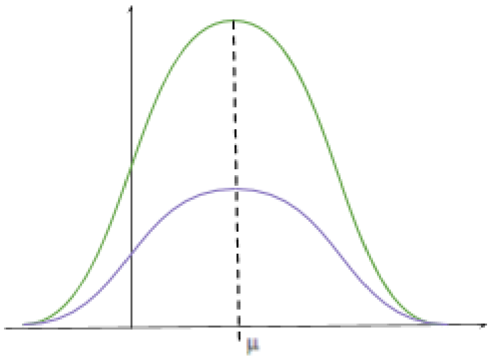
LOIS À DENSITÉ DE PROBABILITÉ

- définition

	★ aire sous la courbe: $\int_a^b f(t)\,dt = 1$ $\rightarrow p(a \leq X \leq b) = p(total) = 1$ ★ pour tout $c \leq d \in [a;b]$, on a:

	○ $p(c \le X \le d) = \int_c^d f(t)\,dt$ ○ $p(c \le X \le d) = p(c < X < d)$ ★ pour $n \in [a; b]$, $p(X = n) = 0$ ★ $E(X) = \int_a^b t\,f(t)\,dt$

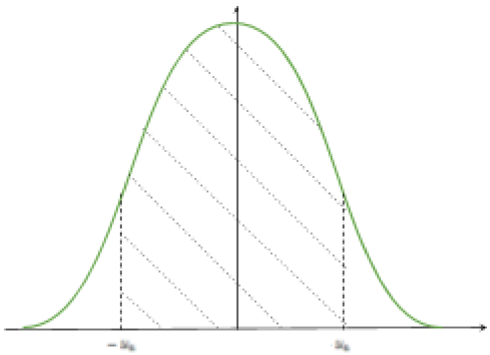
- loi uniforme *sur un intervalle borné*			
	$f(x) = \frac{1}{b-a}$	$p(c \le X \le d) = \frac{d-c}{b-a}$	$E(X) = \frac{a+b}{2}$
- loi exponentielle *sur* $[0; +\infty]$			
	$f(x) = \lambda e^{-\lambda t}$ avec $\lambda > 0$	$p(c \le X \le d) = \int_c^d \lambda e^{-\lambda t} dt$	$E(X) = \frac{1}{\lambda}$
- loi de durée de vie sans vieillissement			
$p_{(T \ge a)}(T \ge a + h) = p(T \ge h)$ → la probabilité que l'objet vive encore h années ne dépend pas de l'âge qu'il a.		la loi exponentielle vérifie la loi de durée de vie sans vieillissement	
- loi normale			
➔ loi normale centrée réduite			
 		❑ $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\Pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \to X \sim N(0; 1)$ ❑ $p(c \le X \le d) = \int_c^d \frac{1}{\sqrt{2\Pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx$ ❑ $E(X) = 0$ ❑ $v(X) = 1$ ❑ $\sigma(X) = 1$	
➔ loi normale			



- *remarque:* plus l'écart-type σ est grand, plus le sommet de la courbe est bas
  $\rightarrow \sigma < \sigma$
- $X \sim N(\mu; \sigma^2)$
- $p(c \leq X \leq d) = \int_c^d \frac{1}{\sigma\sqrt{2\Pi}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-\mu}{\sigma})^2}\, dx$
- center et réduire:
  - $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$
  - $Z \sim N(0; 1)$

- intervalle

➔ intervalle centrée sur l'espérance



- zone hachurée:
  $p(-u_\alpha \leq X \leq u_\alpha) = 1 - \alpha$
- $X \sim N(\mu; \sigma^2)$ et $Z \sim N(0; 1)$ avec $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$
- $u_{0.05} \approx 1.96$ et $u_{0.01} \approx 2.58$
- propriété:

$p(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma) \approx 0.683 \approx 68.3\%$
$p(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma) \approx 0.954 \approx 95.4\%$
$p(\mu - 3\sigma \leq X \leq \mu + 3\sigma) \approx 0.997 \approx 99.7\%$

➔ intervalle asymptotique de fluctuation $\left[p - u_\alpha \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}; p + u_\alpha \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right]$

on cherche à déterminer si la fréquence observée est dûe à une fluctuation normale en choisissant un seuil

théorème de Moivre-Laplace

- $X \sim B(n; p)$
- center et réduire:
  - $Z_n = \frac{X_n - E(X_n)}{\sigma(X_n)} = \frac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}$
  - $Z \sim N(0; 1)$
- $\lim_{n \to +\infty} p(a \leq Z_n \leq b) = p(a \leq X \leq b)$ ou $X \sim N(0; 1)$

définition:

- il faut que $n \geq 30$, $np \geq 5$ et $n(1-p) \geq 5$, on choisit α
- $F_n = \frac{X_n}{n} \rightarrow$ fréquence du succès
- $I_n = \left[p - u_\alpha \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}; p + u_\alpha \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right]$
- on a $p(F_n \in I_n) = 1 - \alpha$
- *cas particulier* $\Rightarrow$ intervalle de fluctuation au seuil de 95%
  $\alpha = 0.05$ donc $u_{0.05} \approx 1.96$

➔ intervalle de confiance $\left[f - \frac{1}{\sqrt{n}}; f + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$

on cherche à déterminer la proportion en partant d'un échantillon

- proportion p inconnue et échantillon n et une fréquence f observée
- il faut que $n \geq 30$, $np \geq 5$ et $n(1-p) \geq 5$
- la probabilité que $p \in \left[f - \frac{1}{\sqrt{n}}; f + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$ est au moins égale à 95%