

Algorithme de recherche de c.f.c

Choisir un sommet v_0 noter v_0 par +
 noter par + tous les successeurs de v_0 et par - tous les prédécesseurs de v_0
 Poser $\tilde{v}_0 = \{ \text{tous les sommets marqués par } + \}$

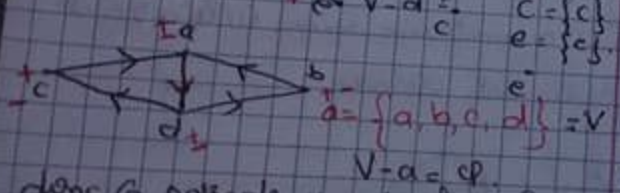
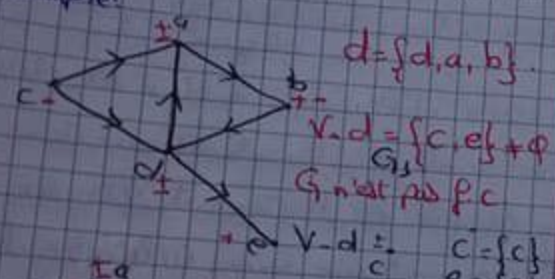
Si $V - \tilde{v}_0 = \emptyset$ Stop

G est f.c

Sinon refaire la procédure pour $V - \tilde{v}_0$

Repetier jusqu'à epuisement de V

Exemple:



donc G possède une seule c.f.c

donc G est f.c

Theoremes:

Soit $G(x, y)$ un graphe complet alors G possède un chemin hamiltonien ($O(n^2)$)

Theoreme:

Soit $G(x, y)$ un graphe complet alors

G possède un circuit hamiltonien

Si et Si G est fortement connexe ($O(n^2)$)

Theoreme: Cycle Eulerien

Soit $G(V, E)$ un graphe alors G possède un cycle eulerien Si et Si $\forall v \in V$ $d(v)$ est pair ($O(n^2)$)

Theoreme (chaîne Eulerien)

Soit $G(V, E)$ un graphe alors G possède une chaîne eulerienne

Si et Si $\exists a \in V, \exists b \in V$

$d(a)$ et $d(b)$ sont impairs et $\forall a \neq b$ $d(v)$ est pair

Algorithme de c.f.c

chemin

Soit G

On ordonne

G par ordre

selon le

$d(v)$

Soit n le

est max par

Soit n le

$d^+(n)$ est

Poser $\Gamma(n)$

Soit x le

$d^+(n)$ est

Poser $\Gamma(n)$

Ainsi de

qu'il ne

On obtien

de somm

est. c.f.c

Si G est

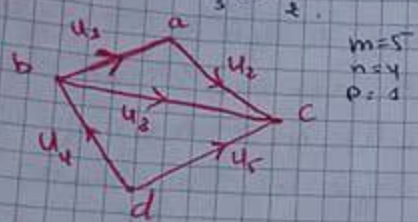
Il me

c

Cycle élémentaire

Si $W(n) = V$ est cycle, On dit qu'il est élémentaire. Si $\exists A_1 \neq 0$
 $\exists A_2 \neq 0$ T_q

- 1) A_1 et A_2 sont connexes.
- 2) $A_1 \cap A_2 = \emptyset$
- 3) $A_1 \cup A_2 =$ est une c.c de G
- 4) $V = W(n)$ est l'ensemble des arcs liant A_1 et A_2 .



1) base de cycle: $V(n) = m - n + p = 5 - 4 + 1 = 2$

On aura 2 cycle à la base.

$A = \{u_1, u_2, u_3\}$

$A \cup \{u_4\} \Rightarrow C_1 = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$

$U(C_1) = \{-1, -1, 1, 0, 0\}$

$A \cup \{u_5\} \Rightarrow C_2 = \{u_1, u_2, u_3, u_5\}$

$U(C_2) = \{0, 0, 1, 1, -1\}$

donc la base $B = \{C_1, C_2\}$

On a $C_3 = \{u_1, u_2, u_4, u_5\}$

$U(C_3) = \{1, 1, 0, 1, -1\}$
 $= (-1, -1, 0, -1, 1)$

$U(C_3) = \alpha_1 U(C_1) + \alpha_2 U(C_2)$
 $(-1, -1, 0, -1, 1) = \alpha_1 (-1, -1, 1, 0, 0) + \alpha_2 (0, 0, 1, 1, -1)$
 $\alpha_1 = 1 \quad \alpha_2 = -1$
 $(-1, -1, 0, -1, 1) = (-1, -1, 1, 0, 0) + (0, 0, -1, -1, 1)$

Base de cycle

$\lambda(n) = n - p = 4 - 1 = 3$

$A = \{u_1, u_2, u_3\}$

$A \cup \{u_4\} \Rightarrow$

$W_1 = \{u_1, u_2, u_3\} = W(b) = W = \{a, c, d\}$

$\chi(W_1) = \{1, 0, 1, -1, 0\}$

$A \cup \{u_5\} = 0$

$W_2 = \{u_1, u_2, u_3, u_4\} = W(\{a, b\})$

$\chi(W_2) = \{0, 1, 1, -1, 0\}$

$A \cup \{u_5\}$

$W_3 = \{u_1, u_2\} = W(\{b\})$

$\chi(W_3) = \{0, 0, 0, 1, 1\}$

la base de cycle est

$B = \{W_1, W_2, W_3\}$

Graphes

Def: un graphe
 S'il admet un
 planaire tel
 re se coupe
 Exemple: Se
 G d

$\Delta \square \nabla$
 Planaire

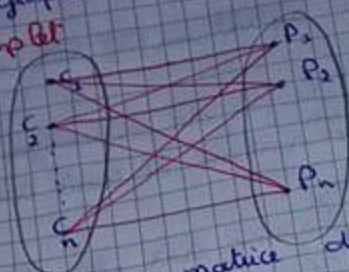
Une face
 de Graphe
 points quel
 par une
 aucune d

Contour

- est l'en
- détermi
- ATous
- asso
- infu
- le e

Ce graphe d'affection est bipartite.

Complet



cherche un couplage maximum de poids maximum

Soit $A_{m,n}$ une matrice dont les éléments a_{ij} sont le poids des arêtes du bipartite complet $K_{m,n}$. La méthode est constituée de deux étapes.

étape 1: Création des zéros sur les lignes et les colonnes.
[0] zéro encadré ; 0 zéro barre

étape 2: Méthode Hongroise

Recherche de l'affectation max

a_{ij} = note de candidats i au poste P_j

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La fin de l'étape 1 se le nbr de zéro encadré indépendants est égale à l'ordre de la matrice. Stop solution trouvée.

Sinon aller à l'étape 2

étape 2: Méthode Hongroise

1. Marquer toute ligne n'ayant pas de [0]

2. Marquer toute colonne ayant un $\emptyset$ sur une ligne marquée

3. Marquer toute ligne ayant un $\emptyset$ sur une colonne marquée

Répéter 2 et 3 jusqu'à la fin du marquage

4. Barre toute les lignes ^{non} marquées et toute colonne marquée.

Soit T la sous matrice formée par des éléments non barrés. et soit $a_0 = \prod_{a_{ij} \in T} a_{ij}$

On obtient une nouvelle matrice en faisant:

- + Retenir a_0 des éléments de T
- + Laisser inchangés les éléments barrés une fois
- + Rajouter a_0 aux éléments barrés 2 fois (on croise)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & \boxed{0} \\ 3 & 4 & \emptyset \\ 0 & \boxed{0} & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & \boxed{0} \\ 3 & 4 & \emptyset \\ 0 & \boxed{0} & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} + \\ + \\ + \end{matrix}$$

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad a_0 = 1 \quad \begin{pmatrix} \boxed{0} & 1 & 0 \\ 2 & 3 & \boxed{0} \\ 0 & \boxed{0} & 2 \end{pmatrix}$$

$$C_1 \rightarrow R_1$$

$$C_2 \rightarrow R_2$$

$$C_3 \rightarrow R_3$$

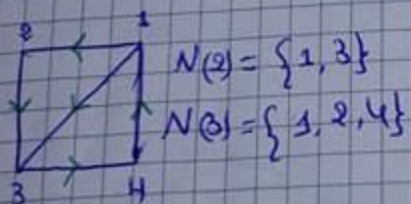
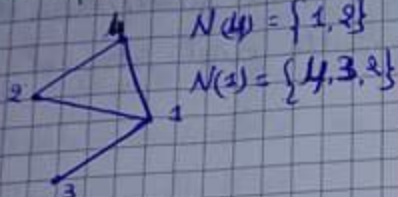
$$\text{Coef} = 4$$

6. Voisins

Si G est un graphe et v un sommet de G . On appelle voisin de v tout sommet adjacent à v donc l'ensemble de voisins de v est

$$N(v) = \{u \in V / u \text{ est adjacent à } v\}$$

Exemple



Représentation de graphe en matrice

1. Matrice d'adjacence

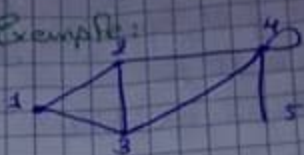
Si $G(V, E)$ est un graphe la

matrice d'adjacence associée à G est la $n \times n$ matrice symétrique

que donne par

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{Si le sommet } i \text{ est adjacent au sommet } j \\ 0 & \text{Sinon} \end{cases}$$

Exemple:



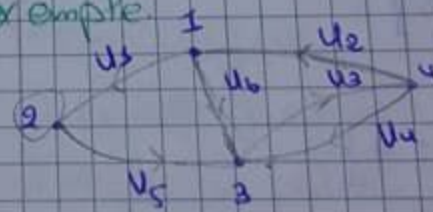
$$M = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

2. Matrice d'incidence

$$|V| = n, |E| = m$$

Si $G(V, E)$ est un graphe orienté la matrice d'incidence sommets arcs associée à G est la $n \times m$ matrice d'éléments $a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{Si } I(e) = i \\ -1 & \text{Si } T(e) = i \\ 0 & \text{Sinon} \end{cases}$

Exemple



$$M = \begin{matrix} & \begin{matrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & u_5 & u_6 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Module: Théorie des Graphes

I - Concepts fondamentaux

Exemple

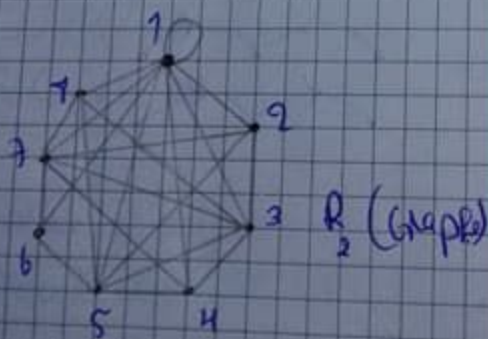
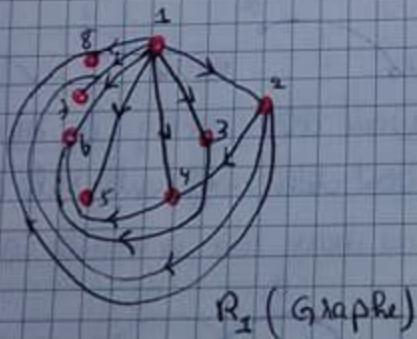
$$E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$$

$x R_1 y \Leftrightarrow x$ est divisible de y

$x R_2 y \Leftrightarrow x$ et y sont premiers entre eux.

Chaque entier est représenté par un point.

Si x est en relation avec y on joint x à y par un segment ou une flèche.



1. Graphes non orientés

Est un graphe à la donnée de deux ensembles

$V = \{x_1, \dots, x_n\}$ fini dit ensemble de sommets

et un ensemble $E = \{e_{i,j} = (x_i, x_j) \mid x_i, x_j \in V\}$

dit ensemble d'arêtes

Si deux ensembles u et v de V sont liés par une arête, celle-ci peut être

notée par $(u, v) = (v, u)$ ou bien

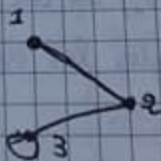
$uv = vu$ ou encore $e_{u,v}$

Exemple 1 Voir graphe de Addition

R_2 .

Exemple 2. $V = \{1, 2, 3\}$

$$E = \{(1, 2), (2, 3), (3, 3)\}$$



Un graphe non orienté est noté

$$G = (V, E)$$

Si V est fini le graphe est dit graphe fini sinon G est un graphe infini

un graphe non
un algorithme
donne l'ensemble
n'importe

graphe orienté
système d'écritures
ensemble des
système de
sommet.

Si $A \subset V$

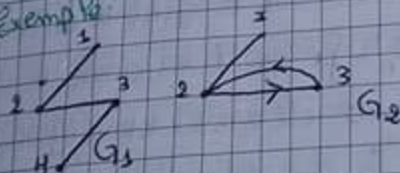
$$N(A) = \bigcup_{x \in A} N(x)$$

$$\begin{aligned} I(A) &= \bigcup_{x \in A} I(x) \\ N(A) &= \bigcup_{x \in A} N(x) \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} I(A) \\ N(A) \end{array} \right\} \text{ l'ensemble des voisins de } A$$

Sommet isolé Un sommet $v \in V$ est dit isolé s'il n'est adjacent à aucun autre sommet de V .

Degré On appelle degré d'un sommet $v \in V$ noté $d(v)$ le nombre de voisins de v .
On définit $d(v)$ la cardinalité de $N(v)$.
 $d(v) = |N(v)|$

Exemple



$$d_{G_1}(2) = 2 = |N(2)| = |\{1, 4\}|$$

$$d_{G_2}(2) = 2$$

$$W(x) = \{u \in V \mid I(u) = x\}$$

$$W(x) = \{u \in V \mid I(u) = x\}$$

$$W(x) = \{u \in V \mid I(u) \in A \text{ et } I(u) \notin A\}$$

$$W(x) = \{u \in V \mid I(u) \in A \text{ et } I(u) \notin A\}$$

$$W(x) = \{u \in V \mid I(u) = n\}$$

$$W(x) = \{u \in V \mid I(u) = x\}$$

$$|W(x)| = \text{degré de } x$$

$$|W(x)| = \text{degré de } x$$

3) Multigraphe

Un multigraphe est un graphe dans lequel il peut y avoir plus d'une arête entre deux mêmes sommets.

4) P. Graphe

Est un graphe où entre chaque paire de sommets il y a plus d'une arête.



En général on dit graphe si $n \leq 1$.

Remarque

Si G est un graphe sans boucle d'ordre n alors

$$\forall x \in V, d(x) \leq n-1$$

Alors l'ajout d'une arête crée un nouveau cycle donc augmente le nbr cyclomatique.

Forêt: une forêt un graphe sans cycle.

Exo: Combien d'arbre dans une forêt ayant P c.c.

Dans une forêt les c.c. sont des arbres donc on a P arbres. Sommet pendant (feuille).

Si G est un graphe un sommet x_0 de G est dit Sommet pendant (feuille) si $d(x) = 1$.

Exo: Montrer que si G est un arbre alors G possède au moins (2) feuilles.

② Si G est un arbre ayant un sommet de degré k alors G possède au moins k feuilles.

Graphe valués

Soit $G(V, E)$ un graphe on peut définir deux applications dites : application poids, dans G de la façon suivante:

$$P: V \rightarrow \mathbb{R}$$

$$v \rightarrow P(v) = \text{points de sommets } i=1, A = \{e\}$$

Donc G est un graphe à sommet, valeurs ou $P: E \rightarrow \mathbb{R}$

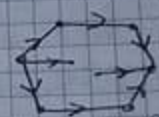
$$e \mapsto P(e) = \text{poids de l'arête } e.$$

donc G est un graphe à arête valuées (arcs)

Remarque Poids: distance, longueur, poids, tensions.



sommet valués



arcs valués

Arbre de poids (max (ou min))

Soit $G(V, E)$ un graphe dont les arêtes sont valuées. On cherche une à extraire dans G un arbre de poids $\max(\min)$.

Algorithme de Kruskal

(glaton)

version max

Ordonner les arêtes de G selon le poids de façon décroissante.

$$P(e_1) > P(e_2) > \dots > P(e_n)$$

$$i=1, A = \{e\}$$

Si $i \leq$
- Si A
cree p
 $A = A \cup$

- Si mo



$P(e_1) > P(e_2)$

$P(e_2) > P(e_3)$

$i=1; A$

$i=2; A$

$i=3; A \cup$

$i=4; A \cup$

$i=5$

:



2

3

Rac

Si G

pour

Si

Si

Si

Si

Si



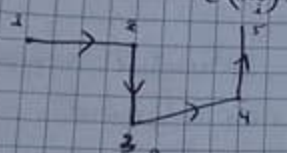
Un cycle de longueur ≥ 4 sans
croisement est un tour

Chemin - Circuit

I Chemin:

Un chemin entre deux sommets u_0, u_n
est une séquence de sommet
et arêtes

$$u_0, u_1, u_2, \dots, u_n \quad \begin{cases} I(u_i) = E_i \\ I(u_{i+1}) = E_{i+1} \end{cases}$$



Chemin de longueur 4

u_0 et u_n sont deux extrémités du chemin



n'est pas un chemin

II Circuit

Est un chemin dont les
extrémités sont confondues.

Remarque:

Chaîne et cycle sont des
notions non orientées
chemin et circuit sont des
notions orientées.

Une chaîne est simple
si elle n'utilise pas deux fois
la même arête. elle est
élémentaire si elle
n'utilise pas deux fois la
même arête. elle est
simple si elle n'utilise pas deux fois la
même arête.

Problème d'Eulerien:

Utiliser une et une seule fois
toutes les arêtes (arcs) du graphe

Hamiltonien:

Utiliser une et une seule fois
tous les sommets du graphe.



Connexité

Un graphe
est connexe si
pour chaque
 $x, y \in V$, il existe une chaîne
de x à y .
R est d'ordre
n. ref
Symétrie
entière nat

Transitivité
 $xRy \Leftrightarrow yRx$
 $xRz \Leftrightarrow zRx$



$x = \{y, z\}$
 $y = \{x, z\}$



Il y a des
sont des
simple
pas des
elle est
si elle
des fois
elle est

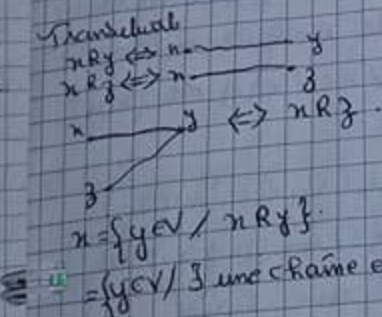
une seule fois
du graphe
une seule fois
du graphe



Connexité :

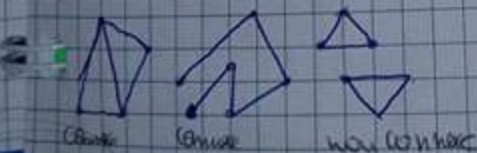
Un graphe est dit connexe
si chaque fois $\forall n \in V \forall y \in V$
Il y a une chaîne liant n à y
 $xRy \Leftrightarrow \exists$ une chaîne entre
 x et y
 R est d'équivalence.

ref xRn
Symétrie $xRy \Leftrightarrow yRx$ une chaîne
entre n et $y \Leftrightarrow \exists$ une chaîne
 $\Leftrightarrow yRn$.



La classe d'équivalence n est
ditte composante connexe.

+ Un graphe est connexe
Si il contient une seule
composante connexe.



Un graphe ayant un sommet isolé
n'est jamais connexe
Si il y a un sommet x tel que
donc G est connexe.



Fortement Connexe

Un graphe $G(V, U)$ est dit fortement
connexe si $\forall n \in V, \forall y \in V$
Il y a un chemin de n à y ($C(n, y)$) et
Il y a un chemin de y à n ($C(y, n)$)
 $xRy \Leftrightarrow \exists$ un chemin de n à y
et un chemin de y à n

La classe d'équivalence de n est dite
composante fortement connexe de n
Un graphe est fortement connexe
s'il admet une unique composante
fortement connexe.



fortement connexe $\Rightarrow$ connexe

2- Graphe Orienté

Un graphe orienté est la donnée de deux ensembles $V = (V_1, \dots, V_n)$ dit ensemble des sommets et un ensemble $M = \{(u, v) \mid u \in V, v \in V\}$ dit ensemble des arcs

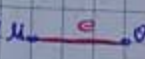
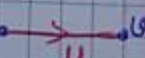
Remarque:

Si u et v sont deux sommets liés par un arc de u vers v



On note cet arc par $(u, v) \neq (v, u)$ ou bien $uv \neq vu$.

3- Les extrémités

Soit $e = (u_1, v_1)$ une arête  et soit $u = (u_2, v_2)$ un arc 
 u_1 et v_1 sont dites les extrémités de l'arête

u_1 et u_2 sont dites les extrémités de l'arête.

u_2 est dite extrémité initiale de u notée $I(u)$

v_2 est dite extrémité terminale de u notée $T(u)$

4- Les Boucles

Est une arête ou arc dont les deux extrémités sont confondues $|V| = n$ est dit l'ordre du graphe

$I: u \rightarrow V$

$u \rightarrow I(u) = \text{initiale de } u$

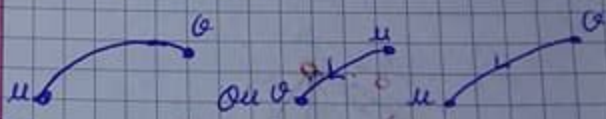
$T: u \rightarrow V$

$u \rightarrow T(u) = \text{terminale de } u$

5- Adjacence - Incidence

Si G est un graphe

deux sommets u, v de G sont dits adjacents si u et v sont liés dans G .



Deux arêtes e_1 et e_2 (ou arcs u_1 et u_2) sont dites adjacents s'ils ont au moins une extrémité commune

