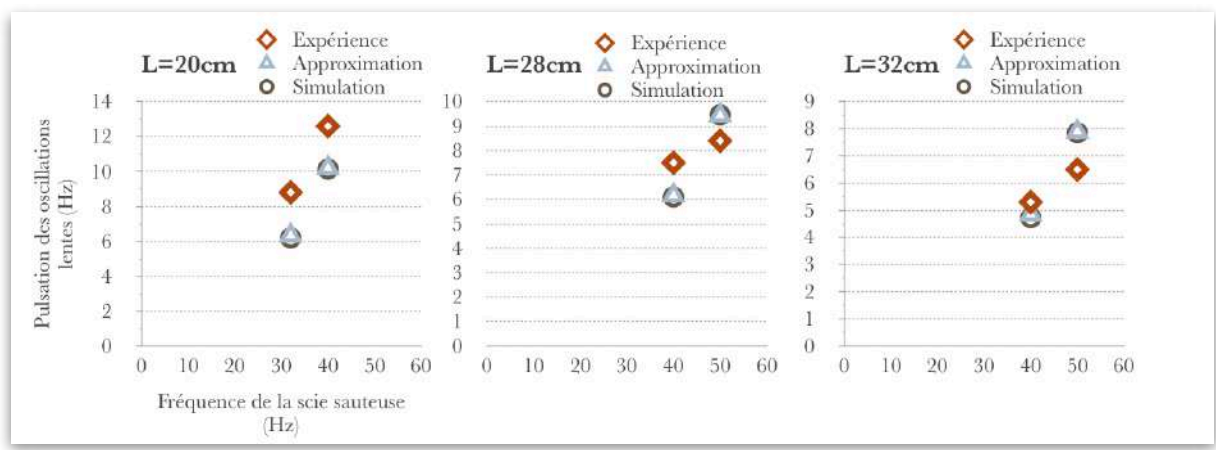
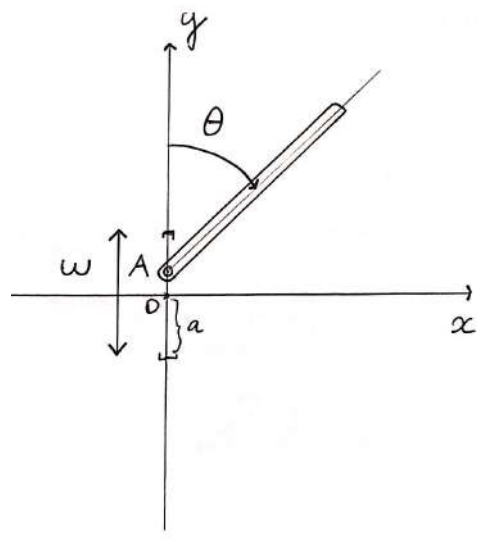


Pendule inversé de Kapitza



Sommaire

0 - Introduction **p.3**

I - Problème du pendule Kapitza et résolution **p.4**

- 1) Exposition du problème p.4
- 2) Notations utilisées p.4
- 3) Modèle théorique p.4
- 4) Explication intuitive p.7
- 5) Méthode de résolution approchée
 - a) Raisonnement perturbatif et « averaging » : méthode générale p.7
 - b) Application au problème p.9

II - Système physique considéré et simulations **p.11**

- 1) Présentation du système physique p.11
- 2) Grandeurs et paramètres utiles p.12
- 3) Simulations (Scilab fonction ODE) p.12

III - Expérimentations **p.14**

- 1) Expérience
 - a) Méthode expérimentale p.14
 - b) Mesures p.15
- 2) Comparaison théorie/expérience p.16
- 3) Extension : étude du pendule de Kapitza en mode pendule pesant p.17

IV - Conclusion **p.19**

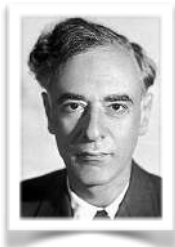
Appendices **p.20**

- 1) Résultats des simulations extensives p.20
- 2) Applications pour l'ingénieur p.22
- 3) Bibliographie p.23

0 - Introduction

Le pendule de Kapitza est un cas particulier de pendule inversé. C'est un pendule rigide dont le point fixation A oscille verticalement. Résultat surprenant : pour des oscillations suffisamment rapides de A, et dans la mesure où le pendule est lâché depuis une position proche de l'axe vertical, le système peut se stabiliser en position inversée. Si on perturbe un peu le système, il se met à osciller autour de l'axe vertical.

Le phénomène a été étudié pour la première fois par le physicien Russe Pyotr Leonidovich Kapitza (à droite) (1894-1984), principalement connu pour ses travaux sur la physique à basse température, qui lui valurent un demi-Prix Nobel en 1978; l'autre moitié a été décerné à deux physiciens ayant mis en évidence le fond diffus cosmologique.



Il est un grand ami du physicien Lev Davidovitch Landau (à gauche) (1908-1968), qui a écrit avec son élève Evgeny Mikhailovich Lifshitz (1915-1985) une série d'ouvrage intitulée *Mechanics*. On fera notamment référence au volume 1 dans notre étude.

On peut construire un pendule de Kapitza soi-même avec une scie-sauteuse ou un rasoir électrique par exemple. L'important est de fournir au point de fixation du pendule des oscillations suffisamment rapides.

Le présent rapport sera organisé comme suit : Dans la partie I nous décrirons le phénomène avec des notions de mathématiques et physique de Licence. Dans la partie II, nous présenterons notre système expérimental et les simulations du mouvement réalisées dans Scilab. Enfin, dans la partie III, nous donnerons le résultat des expérimentations et nous les comparerons au modèle théorique. On pourra trouver dans les appendices des résultats de simulations intéressantes ainsi qu'une ouverture sur les applications du pendule de Kapitza pour l'ingénieur.

I - Problème du pendule inversé et résolution

I.1) Exposition du problème

On veut pouvoir expliquer la cause physique qui permet au pendule de se stabiliser dans sa position inversée quand son point de pivot oscille de haut en bas, et quelles conditions doivent être imposées sur les paramètres pour que cela soit possible. On aimerait approfondir et créer un modèle pouvant estimer la fréquence des oscillations du pendule autour de la position d'équilibre inversée à paramètres fixés afin de décrire le mouvement. On se propose également de vérifier la validité de ce modèle via des simulations et des expériences.

I.2) Notations utilisées

- Le référentiel du laboratoire noté $R(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ est supposé galiléen dans toute l'étude
- Point de pivot du pendule : A
- Axe de rotation du pendule : Δ , défini selon \vec{e}_z et passant par A
- $R'(A, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ le référentiel lié au point A, et aux axes parallèles au référentiel R

- Masse du pendule : m
- Poids : \vec{P}
- Densité linéique de masse (supposée homogène) : λ
- Longueur du pendule : L

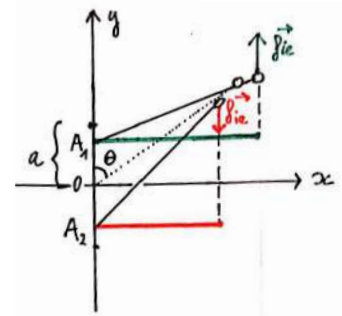
- Amplitude des oscillations verticales : a
- Pulsation des oscillations verticales : ω
- Pulsation des oscillations autour de la position inversée : Ω
- Angle avec la verticale : θ

I.3) Modèle théorique

Supposons que A oscille de manière harmonique sur (Oy). Le mouvement de A peut être décrit simplement par $y_A(t) = a \sin(\omega t)$, et il vient par dérivations successives

$\frac{d^2 y_A}{dt^2}(t) + \omega^2 y_A(t) = 0$ (équation différentielle de l'oscillateur harmonique).

En oscillant, le point A et le pendule qui lui est attaché accélèrent et freinent de manière périodique. Notons $R'(A, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ le référentiel lié au point A, et aux axes parallèles au référentiel R du laboratoire. Ce référentiel est non-galiléen, car son mouvement est une translation rectiligne non-uniforme.



Soit M un point du pendule repérant un élément de masse dm . Il vient

$$\begin{aligned} \vec{OM} &= \vec{OA} + \vec{AM} \\ \vec{OM} &= x \vec{e}_x + y \vec{e}_y \\ \vec{AM} &= x' \vec{e}_x + y' \vec{e}_y \end{aligned}$$

D'où en dérivant dans $R(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ deux fois,

$$\frac{d^2 \vec{OM}}{dt^2} = \frac{d^2 \vec{OA}}{dt^2} + \frac{d^2 \vec{AM}}{dt^2}$$

$$\ddot{x} \vec{e}_x + \ddot{y} \vec{e}_y = \frac{d^2 \vec{OA}}{dt^2} + \ddot{x}' \vec{e}_x + \ddot{y}' \vec{e}_y$$

Où $\ddot{x} \vec{e}_x + \ddot{y} \vec{e}_y$ représente l'accélération dans $R(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$

Et $\ddot{x}' \vec{e}_x + \ddot{y}' \vec{e}_y$ représente l'accélération dans $R'(A, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$

En appliquant le principe fondamental de la dynamique au point M, dans le référentiel $R(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ galiléen, on obtient :

$$\sum \vec{F}_{ext} = dm(\ddot{x} \vec{e}_x + \ddot{y} \vec{e}_y)$$

$$\sum \vec{F}_{ext} = dm\left(\frac{d^2 \vec{OA}}{dt^2} + \ddot{x}' \vec{e}_x + \ddot{y}' \vec{e}_y\right)$$

et donc $\sum \vec{F}_{ext} - dm \frac{d^2 \vec{OA}}{dt^2} = dm(\ddot{x}' \vec{e}_x + \ddot{y}' \vec{e}_y)$

Ainsi le produit de la masse du pendule avec l'accélération dans le référentiel $R'(A, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ est la somme des forces extérieures s'exerçant sur M avec une force appelée force élémentaire d'inertie d'entraînement $\vec{df}_{ie}(M)$ telle que

$$\vec{df}_{ie}(M) = -dm \frac{d^2 \vec{OA}}{dt^2} = -dm \frac{d^2 y_A}{dt^2}(t) \vec{e}_y$$

qui apparaît à cause des accélérations du point de support du pendule. Du fait de la nature harmonique des oscillations du point A, il vient :

$$\vec{df}_{ie}(M) = dm \omega^2 y_A(t) \vec{e}_y = dm \omega^2 a \sin(\omega t) \vec{e}_y$$

On peut alors exprimer la force d'inertie d'entraînement \vec{F}_{ie} qui s'exerce sur tout le pendule : $\vec{F}_{ie} = \int_{M \in \text{Pendule}} \vec{df}_{ie}(M)$

$$\vec{F}_{ie} = m \omega^2 a \sin(\omega t) \vec{e}_y$$

On peut ainsi déduire de cette expression que la force d'inertie d'entraînement agit sur le pendule :

- Dans la direction \vec{e}_y lorsque A est situé dans la région supérieure des oscillations,
- Dans la direction $-\vec{e}_y$ lorsque A est situé dans la région inférieure des oscillations.

Ce résultat est plutôt intuitif est peut-être ressenti facilement dans la vie courante. Imaginons qu'on roule dans une voiture avec une portière ouverte. Si on décide d'accélérer jusqu'à une certaine vitesse dans le sens de la marche, la portière se ferme, comme si une force opposée au sens de la marche la poussait. Si on décide ensuite de ralentir, jusqu'à s'arrêter puis repartir en marche arrière, la portière (non verrouillée !) s'ouvre, une force

orientée dans le sens de la marche agit sur elle. Cette analogie correspond bien au comportement de la force d'inertie d'entraînement qui agit sur le pendule.

Effectuons un bilan des moments de forces qui agissent sur le pendule (avec comme axe de rotation Δ).

Moment du poids :

$$M_{\Delta}(\vec{P}) = - \int_0^L \lambda d\ell g \ell(M) \sin\theta = - \frac{1}{2} \underbrace{\lambda L}_{\text{masse}} g L \sin\theta = - \frac{1}{2} m g L \sin\theta$$

Moment de la force d'inertie d'entraînement :

$$M_{\Delta}(\vec{F}_{ie}) = \int_0^L df_{ie}(M) \ell(M) \sin\theta = \int_0^L \lambda d\ell \omega^2 a \sin(\omega t) \ell \sin\theta = \frac{1}{2} m L \omega^2 a \sin(\omega t) \sin\theta$$

Calculons le moment d'inertie du pendule par rapport à Δ .

$$J_{\Delta} = \int_0^L \lambda d\ell \ell(M)^2 = \frac{1}{3} m L^2$$

Calculons la dérivée du moment cinétique du pendule par rapport à Δ (attention ! ici $(\vec{e}_r, \vec{e}_{\theta}, \vec{e}_z)$ ne forme un repère indirect)

$$\frac{d}{dt} L_{\Delta} = \frac{d}{dt} \int (\vec{AM} \wedge d\vec{m}\vec{v}) \cdot \vec{e}_z = \frac{d}{dt} \int_0^L (\ell(M) \vec{e}_r \wedge \lambda d\ell \ell(M) \dot{\theta} \vec{e}_{\theta}) \cdot \vec{e}_z = - \frac{d}{dt} \int_0^L \ell(M)^2 \lambda \dot{\theta} d\ell$$

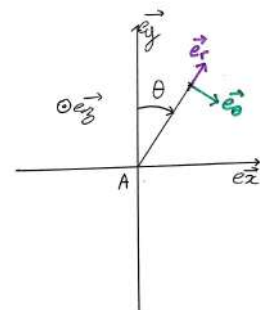
$\ell(M)$ étant constant par rapport au temps on a

$$\frac{d}{dt} L_{\Delta} = - \int_0^L \ell(M)^2 \lambda \ddot{\theta} d\ell = - \frac{1}{3} m L^2 \ddot{\theta}$$

Appliquons le théorème de la dynamique de rotation au pendule par rapport à Δ .

$$\frac{d}{dt} L_{\Delta} = \sum_i M_{\Delta}(\vec{F}_i)$$

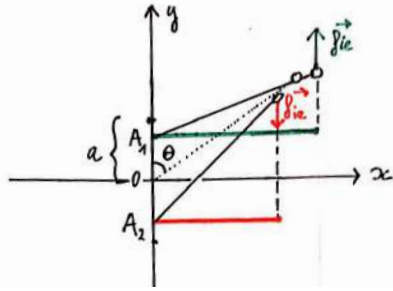
On obtient finalement :



$$\frac{1}{3} m L^2 \ddot{\theta} = - \frac{1}{2} m L \omega^2 a \sin(\omega t) \sin\theta + \frac{1}{2} m g L \sin\theta \quad (*)$$

C'est une équation différentielle 'hautement non-linéaire' ! Sous cette forme non simplifiée, on ne peut pas lui donner une solution analytique.

I.4) Explication intuitive



Observons ce qu'il se passe quand le point de fixation A oscille rapidement pendant que le pendule forme un angle moyen θ avec la verticale (Oy).

Le point A et le pendule qui lui est rattaché sont représentés sur deux positions différentes, la position A_1 avec $y > 0$ et la position A_2 avec $y < 0$. La boule sur laquelle s'exerce la force d'inertie d'entraînement est un petit élément du pendule.

Rappelons que le bras de levier d'une force par rapport à un axe est la distance la plus courte qui sépare l'axe de rotation et le prolongement de la force dans la direction vers laquelle elle s'exerce. Il apparaît clairement que le bras de levier de la force d'inertie d'entraînement (représenté par un trait vert et rouge) est plus important lorsque A est en A_1 que quand A est en A_2 .

Même si les forces \vec{f}_{ie} en rouge et vert sont égales en norme, elles n'ont pas la même efficacité lorsqu'il s'agit de faire tourner le pendule autour de son axe A. Le moment de \vec{f}_{ie} sur M par rapport à A, lorsque A est en A_1 , est plus important, car le bras de levier est plus grand (un moment de force peut s'exprimer par le produit de cette force avec son bras de levier).

Intuitivement, sur une période d'oscillation de A, le bilan est que le moment de la force d'inertie d'entraînement est non nul et il y a contribution de cette force pour lever le pendule vers le haut.

I.5) Méthode de résolution approchée

I.5.a) Raisonement perturbatif et 'averaging' : méthode générale

L'équation différentielle qui caractérise le système n'a pas de solution analytique. Il est nécessaire de la simplifier pour pouvoir décrire le mouvement.

Landau et Lipschitz proposent dans le chapitre « Small oscillations » de l'ouvrage *Mechanics-Third Edition* (1960) une méthode générale pour étudier un mouvement dans un champ oscillant rapidement.

Considérons une particule soumise à un potentiel indépendant du temps U et une force

$$f(x, t) = f_1(x) \cos \omega t + f_2(x) \sin \omega t$$

où ω est grand, c'est à dire $\omega \gg 1/T$ où T est la fréquence des oscillations de la particule quand elle est soumise au potentiel U uniquement. On suppose que les oscillations ξ engendrées par la force f sont petites et que f_1 et f_2 sont des fonctions des coordonnées spatiales. Pour simplifier les calculs, considérons le mouvement à une seule dimension dans un champ U ne dépendant que de la variable x . L'équation du mouvement est :

$$m \ddot{x} = - \frac{dU}{dx}(x) + f(x, t)$$

On comprend intuitivement que la particule soumise à un tel champ de force va avoir un mouvement à deux composantes : une trajectoire principale lente couplée à des petites oscillations de fréquence ω sur cette même trajectoire. On peut donc écrire :

$$x(t) = X(t) + \xi(t)$$

où $\xi(t)$ représente les petites oscillations au cours du temps

Intuitivement, la valeur moyenne de la fonction $\xi(t)$ sur une période $2\pi/\omega$ est zéro, et puisque les oscillations sont très rapides, la fonction $X(t)$ change peu sur cet intervalle de temps. Si on note la valeur moyenne d'une fonction avec une barre on a donc $\bar{\xi}(t) = 0$ où $X(t)$ décrit le mouvement lent de la particule sans à-coups.

Soit $g : x \mapsto g(x)$ une fonction de la variable x du problème. On a $g(x) = g(X + \xi)$ et donc $g(X + \xi) - g(X) \approx \xi \frac{dg}{dX}(X)$ (approximation du premier ordre). En utilisant ce résultat sur les fonctions $\frac{dU}{dx}$ et f on a :

$$m\ddot{X} + m\ddot{\xi} = -\frac{dU}{dX}(X) - \xi \frac{d^2U}{dX^2}(X) + f(X, t) + \xi \frac{\partial f}{\partial X}(X, t)$$

Cette équation met en jeu des termes oscillant rapidement et des termes décrivant un mouvement plus lent et général de la particule, qui doivent être séparément égaux. Pour le terme oscillant on peut écrire simplement : $m\ddot{\xi} = f(X, t)$ car les autres termes qui contiennent ξ sont très petits (négligeables). En effet ξ représente des oscillations de très petites amplitudes, et $\ddot{\xi}$ est proportionnel à la fréquence très grande des oscillations ω^2 et est donc grand.

On peut donc intégrer cette équation en considérant X constant (ce qui se justifie car X évolue lentement). On a :

$$\xi(X, t) = -\frac{f(X, t)}{m\omega^2}$$

On peut ensuite calculer l'équation moyennée sur une période d'oscillation. Il vient donc

$$m\ddot{X} = -\frac{dU}{dX}(X) + \overline{\xi(X, t) \frac{\partial f}{\partial X}(X, t)} = \frac{dU}{dX}(X) - \frac{1}{m\omega^2} \overline{f(X, t) \frac{\partial f}{\partial X}(X, t)}$$

Cette équation ne met en jeu que la fonction $X(t)$ et est très souvent simple à résoudre (ce sera le cas pour le problème du pendule de Kapitza). Elle peut être écrite sous la forme suivante :

$$m\ddot{X} = -\frac{dU_{eff}}{dX}(X)$$

où l'énergie potentielle effective est définie par

$$U_{eff} = U + \overline{f^2}/2m\omega^2$$

$$U_{eff} = U + (f_1^2 + f_2^2)/4m\omega^2$$

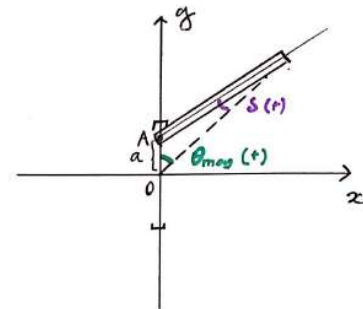
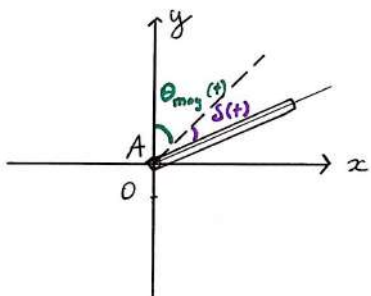
$$\begin{aligned} \text{En effet } \overline{f^2} &= \frac{1}{T} \int_0^T f^2 = \frac{1}{T} \int_0^T f_1^2 \cos^2(\omega t) + f_2^2 \sin^2(\omega t) dt + \underbrace{\frac{1}{T} \int_0^T 2f_1 f_2 \cos(\omega t) \sin(\omega t) dt}_{nul} \\ &= \underbrace{\frac{1}{T} \int_0^T \frac{1}{2}(f_1^2 - f_2^2) \cos(2\omega t) dt}_{nul} + \frac{1}{T} \int_0^T \frac{f_1^2 + f_2^2}{2} dt \end{aligned}$$

On peut reconnaître dans le terme $(f_1^2 + f_2^2)/4m\omega^2$ l'énergie cinétique moyenne des petites oscillations et on peut écrire $U_{eff} = U + m\dot{\xi}^2/2$

I.5.b) Application au problème

Appliquons la méthode de Landau et Lipschitz au pendule inversé. L'équation du mouvement s'écrit : $\frac{1}{3}mL^2\ddot{\theta} = -\frac{1}{2}mL\omega^2a \sin(\omega t) \sin\theta + \frac{1}{2}mgL \sin\theta$ (*)

Le mouvement du pendule est décrit par $\theta(t) = \theta_{moy}(t) + \delta(t)$ où θ_{moy} représente l'angle du pendule moyen, évoluant lentement, et δ les petites oscillations dues au mouvement rapide du pendule de haut en bas. Les schémas ci-après montrent le mouvement du pendule vu dans $R(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ et $R'(A, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ à gauche et à droite respectivement, et permettent de visualiser les angles.



$$\text{On a } \frac{1}{3}mL^2(\ddot{\theta}_{moy} + \ddot{\delta}) = \underbrace{-\frac{1}{2}mL\omega^2a \sin(\omega t) \sin(\theta_{moy} + \delta)}_{\sim f} + \underbrace{\frac{1}{2}mgL \sin(\theta_{moy} + \delta)}_{\sim -\frac{dU}{dx}}$$

Si on fait le lien avec la théorie précédente :

$$\begin{aligned} -\xi \frac{d^2U}{dx^2}(\theta_{moy}) &\approx \delta \frac{1}{2}mgl \cos(\theta_{moy}) \\ \xi \frac{\partial f}{\partial X}(\theta_{moy}) &\approx -\delta \frac{1}{2}mL\omega^2a \sin(\omega t) \cos(\theta_{moy}) \end{aligned}$$

et après approximation du premier ordre :

$$\frac{1}{3}mL^2(\ddot{\theta}_{moy} + \ddot{\delta}) = \frac{1}{2}mgL \sin(\theta_{moy}) + \delta \frac{1}{2}mgl \cos(\theta_{moy}) - \frac{1}{2}mL\omega^2a \sin(\omega t) \sin(\theta_{moy}) - \delta \frac{1}{2}mL\omega^2a \sin(\omega t) \cos(\theta_{moy})$$

On obtient en identifiant les termes « grands » :

$$\frac{1}{3}mL^2\ddot{\delta} = -\frac{1}{2}mL\omega^2a \sin(\omega t) \sin(\theta_{moy})$$

d'où $\ddot{\delta} = -\frac{3}{2} \frac{\omega^2 a}{L} \sin(\omega t) \sin(\theta_{moy})$, qu'on intègre en considérant $\sin(\theta_{moy})$

constant :

$$\delta = \frac{3}{2} \frac{a}{L} \sin(\omega t) \sin(\theta_{moy})$$

Cela correspond à la valeur de l'angle δ sur un petit intervalle de temps pour lequel θ_{moy} est fixé. On voit logiquement que lorsque le pendule est à une position moyenne $\theta_{moy} = 0$ verticale, l'angle δ ne varie pas et est toujours nul.

On détermine maintenant l'équation du mouvement moyen du pendule sur une petite oscillation de δ :

$$\frac{1}{3}mL^2(\theta_{moy}'' + \delta) = \frac{1}{2}mgL \sin(\theta_{moy}) + \delta \frac{1}{2}mgl \cos(\theta_{moy}) - \frac{1}{2}mL \omega^2 a \sin(\omega t) \sin(\theta_{moy}) - \delta \frac{1}{2}mL \omega^2 a \sin(\omega t) \cos(\theta_{moy})$$

$$\frac{1}{3}mL^2\theta_{moy}'' = \frac{1}{2}mgL \sin \theta_{moy} - \delta \frac{1}{2}mL \omega^2 a \sin(\omega t) \cos \theta_{moy}$$

en remplaçant δ par son expression trouvée précédemment la simplification apparaît !

$$\frac{1}{3}mL^2\theta_{moy}'' = \frac{1}{2}mgL \sin \theta_{moy} - \frac{3}{4}m \omega^2 a^2 \sin^2(\omega t) \cos \theta_{moy} \sin \theta_{moy}$$

$$\frac{1}{3}mL^2\theta_{moy}'' = \frac{1}{2}mgL \sin \theta_{moy} - \frac{3}{8}m \omega^2 a^2 \overline{\sin^2(\omega t)} \sin(2\theta_{moy})$$

or $\overline{\sin^2(\omega t)} = \frac{1}{T} \int_0^T \sin^2(\omega t) dt = \frac{1}{2}$, on obtient donc :

$$\frac{1}{3}mL^2\theta_{moy}'' = \frac{1}{2}mgL \sin \theta_{moy} - \frac{3}{16}m \omega^2 a^2 \sin(2\theta_{moy})$$

Remarquons au passage que cette équation peut se réécrire :

$$-J_{\Delta}\theta_{moy}'' = -\frac{dU}{d\theta}(\theta_{moy}) + \frac{d}{d\theta}\left(\frac{1}{2}J_{\Delta}\overline{\delta^2}(\theta_{moy})\right)$$

$$= \frac{d}{d\theta}L_{\Delta}$$

avec $U(\theta) = \frac{1}{2}mgL(1 - \cos \theta_{moy})$

et $\overline{\delta^2}(\theta_{moy}) = \frac{9}{8} \frac{\omega^2 a^2}{L^2} \sin^2 \theta_{moy}$

On peut ainsi définir l'énergie potentielle effective du pendule.

$$U_{eff} = U + \frac{1}{2}J_{\Delta}\overline{\delta^2}$$

On linéarise maintenant l'équation en supposant que θ_{moy} reste proche de 0, et on simplifie par m. On obtient finalement :

$$\theta_{moy}'' = \left(\frac{3}{2} \frac{g}{L} - \frac{9}{8} \frac{\omega^2 a^2}{L^2}\right) \theta_{moy} \quad (\#)$$

De cette équation, on tire les conclusions suivantes :

Si $\frac{3}{2} \frac{g}{L} > \frac{9}{8} \frac{\omega^2 a^2}{L^2}$, les oscillations en position inversée sont impossibles. Ceci est logique car on se doute bien que le moment de la force d'inertie d'entraînement doit être assez fort pour contrer le moment du poids.

Cette condition de stabilisation peut se réécrire (avec $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$) :

$$\frac{2\sqrt{3}}{3} < \frac{\omega a}{\omega_0 L}$$

On voit qu'un pendule long est plus difficile à stabiliser qu'un pendule court. Des oscillations rapides avec une amplitude élevée aident par contre à stabiliser.

Si cette condition est respectée et que θ_{moy} est petit, alors l'équation trouvée est celle d'un oscillateur harmonique de pulsation $\Omega = \sqrt{\frac{9}{8} \frac{\omega^2 a^2}{L^2} - \frac{3}{2} \frac{g}{L}}$ et décrit bien le mouvement général du pendule. Par contre, si la condition n'est pas respectée, l'équation n'est plus du tout valable puisque le pendule tombe et θ_{moy} devient grand. On s'intéressera à ce cas particulier dans la partie III)-1).

II - Système physique considéré et simulations

II.1) Présentation du système physique

Le pendule de Kapitza « fait-maison » construit pour observer le phénomène a pour l'instant connu trois versions différentes.

Première version :



Deuxième version :



Détails :



La troisième version n'est qu'une variante de la deuxième avec un pendule plus long. Dans les trois cas les oscillations verticales sont fournies par une scie-sauteuse Tecnum® MS-800 classique qui dispose de 6 vitesses (de 500tr/min à 3000tr/min). On sacrifie une lame en coulant une de ses extrémités dans de la résine et du micro-ballon. Elle est insérée parfaitement verticalement dans un tube de métal, qui dispose d'un coude métallique. La lame est ainsi coincée dans le tube. Le coude métallique est perpendiculaire à la verticale, et son axe à pour diamètre 8mm. On y glisse un roulement de skateboard, qui s'insère dans le pendule. Le roulement de skateboard est de qualité et les frottements sont minimisés.

Les contraintes sur le système expérimental sont importantes, surtout au niveau du roulement de skateboard, où le collage de la pièce en bois doit être très fort. La lame de la scie sauteuse doit être suffisamment résistante pour ne pas casser latéralement.

Le problème du premier modèle résidait dans le fait que le pendule était déséquilibré. Le modèle de la barre homogène ne convenait pas pour l'étudier. Les pendules 2 et 3 sont mieux adaptés pour l'étude.

II.2) Grandeurs et paramètres utiles

$a = 10\text{m}$ (amplitude des oscillations de la scie sauteuse)

$\omega_6 = 2\pi \times f_6$ avec $f_6 = 50\text{Hz}$ (vitesse 6)

$\omega_5 = 2\pi \times f_5$ avec $f_5 = 40\text{Hz}$ (vitesse 5)

$\omega_4 = 2\pi \times f_4$ avec $f_4 = 32\text{Hz}$ (vitesse 4)

$\omega_3 = 2\pi \times f_3$ avec $f_3 = 24\text{Hz}$ (vitesse 3)

$g = 9,81\text{m/s}^2$

$L_1 = 20\text{cm}$

$L_2 = 28\text{cm}$

$L_3 = 32\text{cm}$

II.3) Simulations (Scilab, fonction ODE)

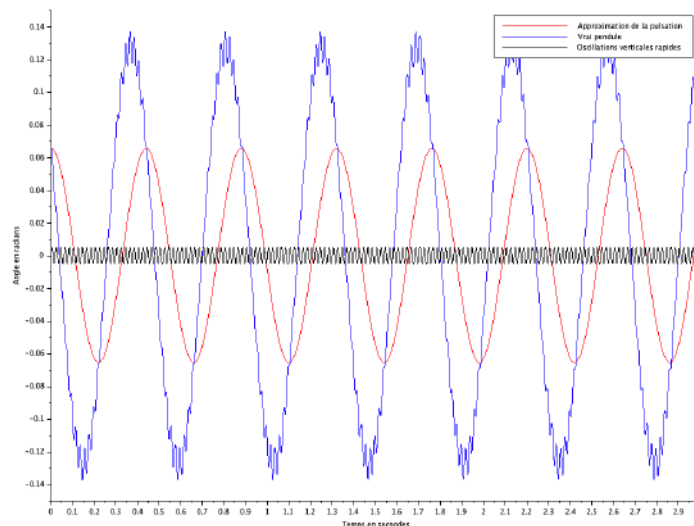
On se propose d'utiliser Scilab pour observer l'équation (*) (correspondant au modèle mathématique complet) et l'équation (#) (correspondant à l'approximation de ce modèle).

```

Test_ODE.sce (/Users/yanndeleunay/Scilab/Test_ODE.sce) - SciNotes
Test_ODE.sce (/Users/yanndeleunay/Scilab/Test_ODE.sce) - SciNotes
Save and execute
Test_ODE.sce
1  clf();
2
3  w=2*pi*50; //pulsation scie sauteuse : v_6=50Hz ; v_5=40Hz ; v_4=32Hz ; v_3=24Hz
4  a=0.10; //amplitude oscillations
5  g=9.81; //gravité
6  l=0.20; //longueur pendule : l_1=28cm ; l_2=20cm
7
8  // à tester: l_crit=(3/4)*(w^2*a^2)/g = 0.75m pour v_6
9  // observation : le vrai pendule chute avant à 0.69m
10
11 fonction [thetadot1]=kapitza(t,y) //équation brute du pendule
12 thetadot1=[y(2),(-3/(2*l))*(w^2)*a*sin(w*t)+a*sin(y(1))+(3/2)*(g/l)*sin(y(1))];
13 endfunction;
14
15 fonction [thetadot2]=approx(t,x) //approximation des oscillations moyennes
16 thetadot2=[x(2),((3/2)*(g/l)-(9/8)*(w^2)*(a^2))/(L^2)*x(1)];
17 endfunction;
18
19 xo=[0.001,0]'; //angle de départ et vitesse angulaire de départ
20 // ne pas prendre des angles trop grands !!
21 // pour xo(1) proche %pi/2 le pendule tourne!
22 to=0; t=0:0.001:3;
23 y=ode(xo,to,t,kapitza);
24 x=ode(xo,to,t,approx);
25 plot2d(t,x(1,:));
26 plot2d(t,y(1,:));
27 plot2d(t,(3/2)*(a/l)*sin(w*t)+sin(x(1))) //approximation petites oscillations

```

Simulation :

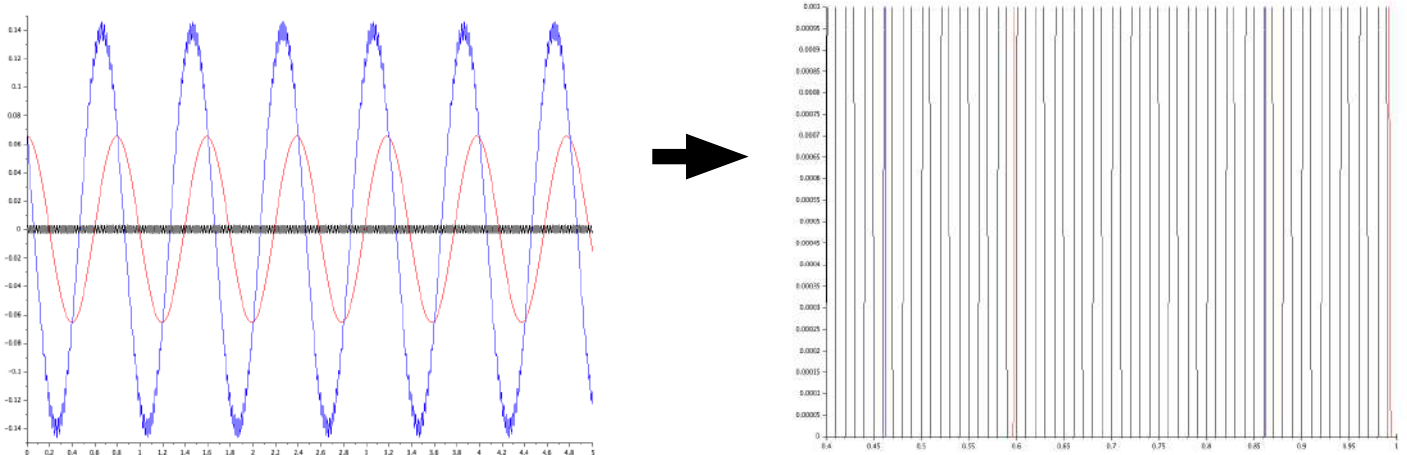


Dans cette simulation, la scie sauteuse oscille à sa vitesse maximale de fréquence 50 Hz. Ces oscillations sont représentées en noir sur la figure. Le pendule est court (20cm) et oscille autour de la verticale avec un angle petit $\pi/48$. On observe en bleu le mouvement du pendule régit par l'équation (*). Il se dessine un mouvement lent, clairement périodique, perturbé par les oscillations verticales rapides. La courbe rouge représente le mouvement régit par l'équation (#). Il s'agit de l'approximation du mouvement lent du pendule. On voit clairement que la courbe rouge a la même période que la courbe bleue. L'approximation de la pulsation fournie par (#) semble être valide pour ces paramètres. En revanche la courbe rouge et la courbe bleue n'ont pas du tout la même amplitude, ce qui est peut être une conséquence de l'averaging.

On retrouvera en appendice d'autres simulations. Elles montrent la validité de l'approximation mais aussi ses limites. On remarquera par exemple que :

- Plus on augmente la taille du pendule, plus les oscillations sont lentes.
- Il existe une taille critique de pendule à partir de laquelle ce dernier ne tient plus. Pour une scie sauteuse oscillant à 50Hz, cette longueur est de 68,3cm pour (*) et de 75,5cm pour (#).
- Lorsqu'on fait tendre les paramètres vers des valeurs limites, i.e on choisit des paramètres tels que le pendule tombe presque, le modèle (#) approche mal la pulsation de (*).
- Lorsqu'on choisit un angle de départ grand comme $\pi/8$, le modèle (#) approche mal la pulsation de (*), ce qui n'est pas surprenant puisqu'on a linéarisé l'équation(*) en considérant des angles petits.

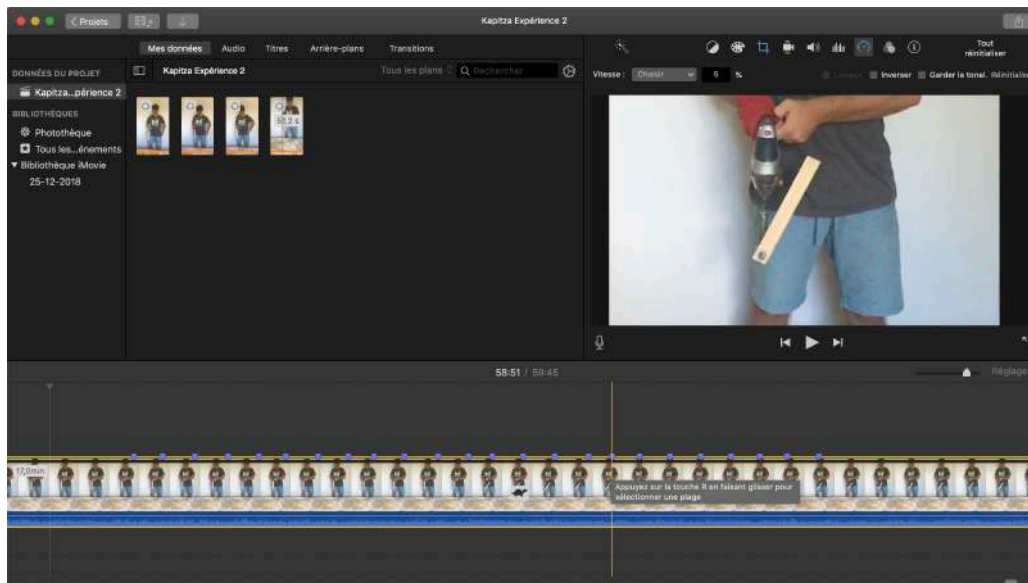
Pour mesurer la pulsation du pendule simulé par (*), on utilise la fonction `zoom_rect` de `scilab`. Par exemple pour le graphique suivant à gauche, on entre dans la console `zoom_rect([0.4,0,1,0.001])`. On effectue la mesure précise d'une demie période sur le graphique de droite.



III - Expérimentations

III.1) Expériences

III.1.a) Méthode expérimentale



On filme avec une caméra au ralenti (plus de 200 images par secondes) le mouvement du pendule, pour différentes vitesses et longueurs. On effectue ensuite des pointages avec un logiciel de traitement vidéo (dans mon cas, iMovie®) pour déterminer la fréquence moyenne des oscillations. La fréquence expérimentale est donnée par :

$$f_{exp} = 100 \frac{k}{n \Delta t_{video}}$$

où k est le nombre de périodes observées, n la vitesse en pourcentage, Δt_{video} le temps pris pour observer les k périodes. On déduit la pulsation expérimentale $\Omega_{exp} = 2\pi f_{exp}$

III.1.b) Mesures

$$\Omega = \sqrt{\frac{9}{8} \frac{\omega^2 a^2}{L^2} - \frac{3}{2} \frac{g}{L}}$$

Pendule de longueur $L_1 = 20\text{cm}$

Vitesse	Ω_{exp}	Ω	écart
6 (50Hz)	Pas mesurable : stabilisation trop forte !	14,28	
5 (40Hz)	12,6	10,212	23,1 %
4 (32Hz)	8,8	6,334	38,9 %
3 (24Hz)	Le pendule tombe !	$\frac{9}{8} \frac{\omega^2 a^2}{L^2} - \frac{3}{2} \frac{g}{L} < 0$	

Pendule de longueur $L_2 = 28\text{cm}$

Vitesse	Ω_{exp}	Ω	écart
6 (50Hz)	8,4	9,448	11,6 %
5 (40Hz)	7,5	6,171	22,2 %
4 (32Hz)	Le pendule tombe !	$\frac{9}{8} \frac{\omega^2 a^2}{L^2} - \frac{3}{2} \frac{g}{L} < 0$	
3 (24Hz)	Le pendule tombe !	$\frac{9}{8} \frac{\omega^2 a^2}{L^2} - \frac{3}{2} \frac{g}{L} < 0$	

Pendule de longueur $L_3 = 32\text{cm}$

Vitesse	Ω_{exp}	Ω	écart
6 (50Hz)	6,5	7,902	17,3 %
5 (40Hz)	5,3	4,849	9,8 %
4 (32Hz)	Le pendule tombe !	$\frac{9}{8} \frac{\omega^2 a^2}{L^2} - \frac{3}{2} \frac{g}{L} < 0$	
3 (24Hz)	Le pendule tombe !	$\frac{9}{8} \frac{\omega^2 a^2}{L^2} - \frac{3}{2} \frac{g}{L} < 0$	

II.2) Comparaison théorie-expérience et discussion :

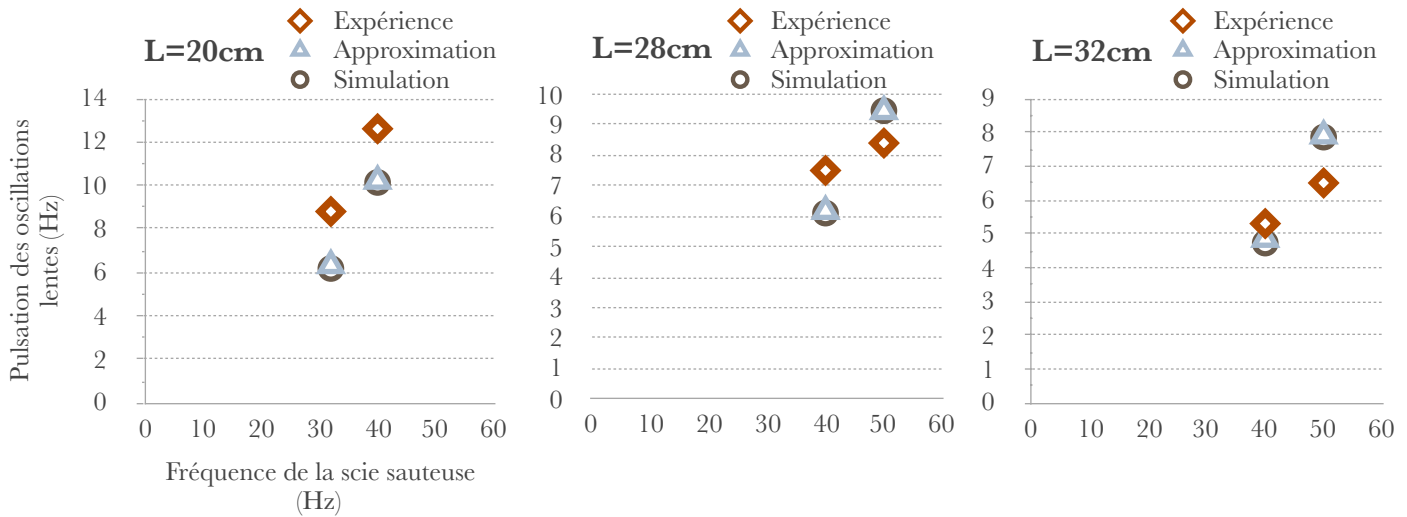
• Validité des approximations effectuées :

Les graphiques ci-dessous synthétisent les mesures et les résultats.

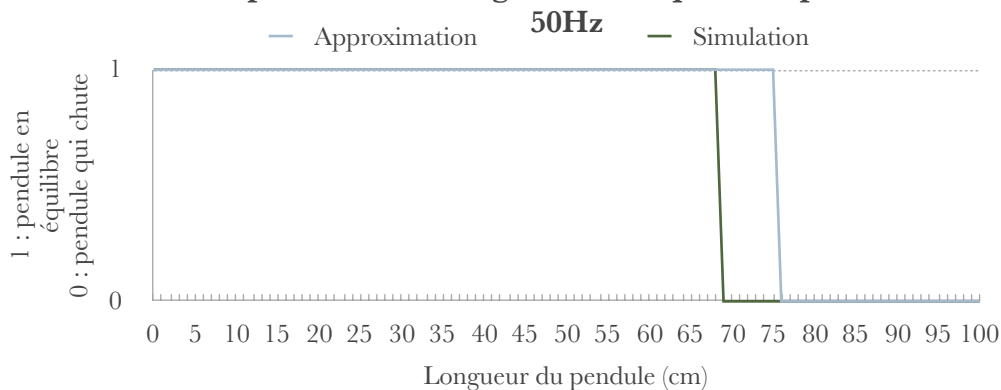
- Les points associés à « expérience » correspondent à la valeur de la pulsation des oscillations lentes mesurée sur le système expérimental pour une fréquence donnée.

- Les points associés à « approximation » correspondent à la valeur de la pulsation des oscillations lentes calculée grâce à la formule $\Omega = \sqrt{\frac{9}{8} \frac{\omega^2 a^2}{L^2} - \frac{3}{2} \frac{g}{L}}$ pour une fréquence donnée.

- Les points associés à « simulation » correspondent à la valeur de la pulsation des oscillations lentes mesurée sur les simulations de (*) pour une fréquence donnée.



Comparaison des longueurs critiques des pendules à



Les approximations effectuées sont convaincantes :

- Elles coïncident avec les simulations
- L'écart moyen entre la valeur de la pulsation donnée par l'approximation Ω et la valeur mesurée Ω_{exp} est d'environ 20%. Si on ne tient pas compte des mesures sur le pendule court de longueur $L_2 = 20cm$ qui furent difficiles à réaliser, l'écart tombe à 15%.

• **Limites des approximations :**

Le modèle du pendule ne décrit pas l'amplitude des oscillations, mais seulement la fréquence des oscillations.

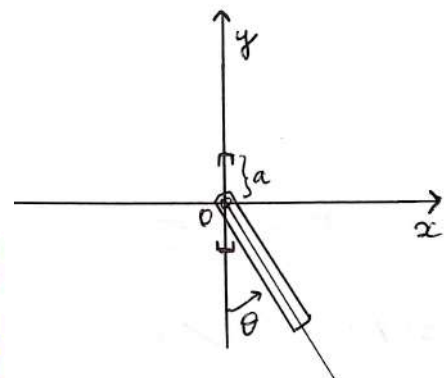
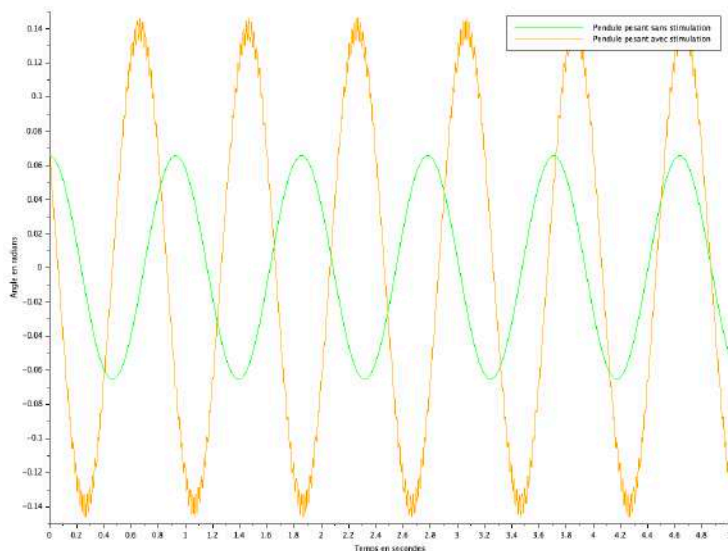
On observe des divergences importantes entre l'approximation et la simulation quand :

- Les angles de départ sont grands.
- La quantité $\frac{9}{8} \frac{\omega^2 a^2}{L^2} - \frac{3}{2} \frac{g}{L}$ s'approche de 0, par exemple quand on augmente la longueur, ou quand on diminue la pulsation des oscillations verticales.

• **Remarques sur les expériences :**

- Il est difficile d'effectuer des mesures sur un pendule court car celui-ci se stabilise très vite. Les frottements ont tendance à arrêter presque immédiatement le pendule court.
- On préférera donc un pendule plus long qui permet de mieux distinguer le mouvement.
- Nous avons négligé les frottements au cours de notre étude.

III.3) Extension : étude du pendule de Kapitza en mode pendule pesant



Nous allons ici expliquer les effets des oscillations sur le pendule quand il est pesant, c'est-à-dire lorsqu'il oscille autour de sa position d'équilibre habituelle, vers le bas.

L'expérience et les simulations montrent que le pendule pesant stimulé par les oscillations verticales oscille plus rapidement que le pendule simplement soumis à son poids.

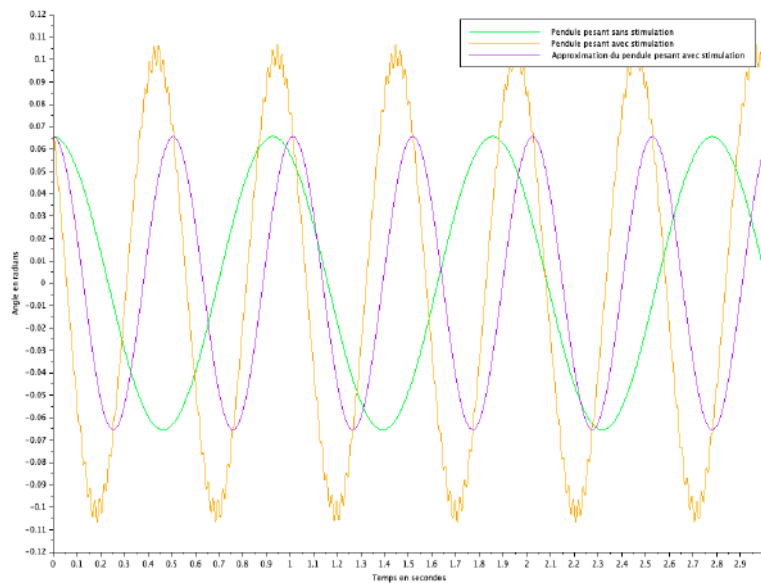
On peut établir la nouvelle équation du mouvement. Seul le signe du moment du poids change

$$\frac{1}{3} mL^2 \ddot{\theta} = -\frac{1}{2} mL \omega^2 a \sin(\omega t) \sin\theta - \frac{1}{2} mgL \sin\theta \quad (**)$$

En utilisant les méthodes d'averaging et d'approximation vues précédemment on obtient l'équation suivante :

$$\theta_{moy}'' = -\left(\frac{3}{2} \frac{g}{L} + \frac{9}{8} \frac{\omega^2 a^2}{L^2}\right) \theta_{moy} \quad (\&)$$

L'équation nous montre que les oscillations verticales rapides ont pour effet de renforcer le poids. La pulsation du pendule vaut $\Omega = \sqrt{\frac{9}{8} \frac{\omega^2 a^2}{L^2} + \frac{3}{2} \frac{g}{L}}$. Elle est toujours définie, quelque soit la fréquence des oscillations de la scie, et la longueur du pendule.



L'approximation de la pulsation du pendule pesant stimulé est convaincante. Remarquons quand même que l'amplitude de l'approximation des oscillations du pendule pesant stimulé vaut exactement l'amplitude des oscillations du pendule pesant libre. C'est normal puisque leurs courbes respectives représentent la solution d'une équation différentielle linéaire d'ordre 2 pour les mêmes conditions initiales : (angle de départ $\pi/48$ et vitesse angulaire de départ nulle).

IV - Conclusion

Nous avons réussi à expliquer pourquoi le pendule de Kapitza se stabilise en position inversée et nous avons établi l'équation qui régit le mouvement. Cette équation non-linéaire a été simplifiée:

- en décomposant dans un premier temps le mouvement en deux sous-mouvements : un mouvement moyen lent, et un mouvement rapide. C'est le raisonnement perturbatif.
- en effectuant ensuite une moyenne sur une période de petites oscillations. C'est l'averaging.
- en linéarisant le résultat en supposant les angles petits. C'est la linéarisation.

On a ainsi aboutit à une approximation correspondant au mouvement lent du pendule et a une expression de la pulsation des oscillations lentes.

De nombreuses simulations ont été effectuées pour comparer le système réel à son approximation. Elles ont mis en évidence l'efficacité des approximations pour prévoir la pulsation des oscillations lentes dans le cas général, mais aussi ses limites.

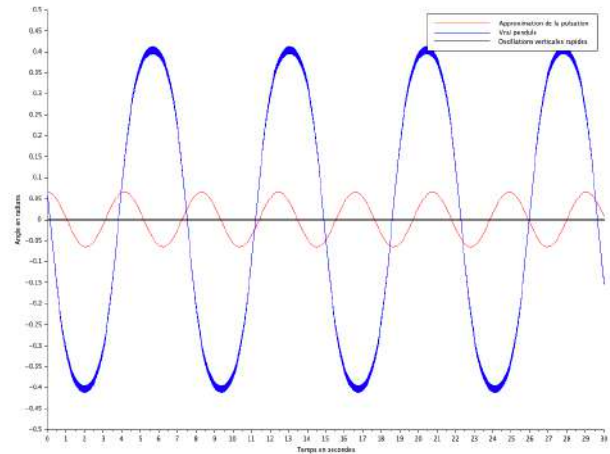
Un système expérimental a été construit pour confronter les résultats théoriques à la réalité. Les résultats sont satisfaisants avec une précision d'environ 15-20%.

Appendices

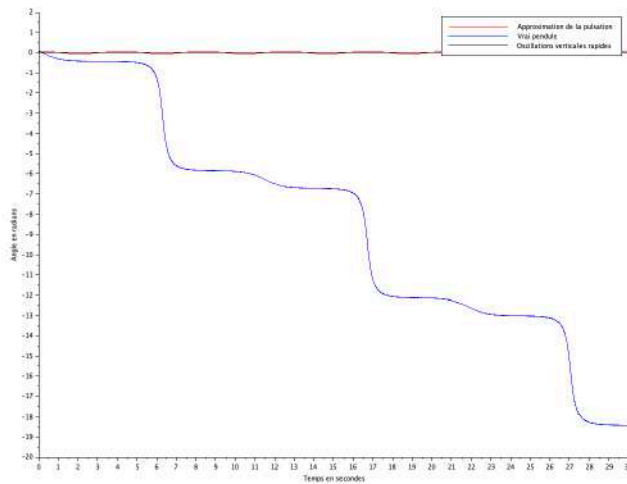
I) Résultats de simulations extensives :

Les paramètres utilisés pour les simulations sont notés de la manière suivante :
(pulsation de la scie, longueur du pendule, angle de départ initial). L'amplitude des oscillations est toujours constante (10mm)

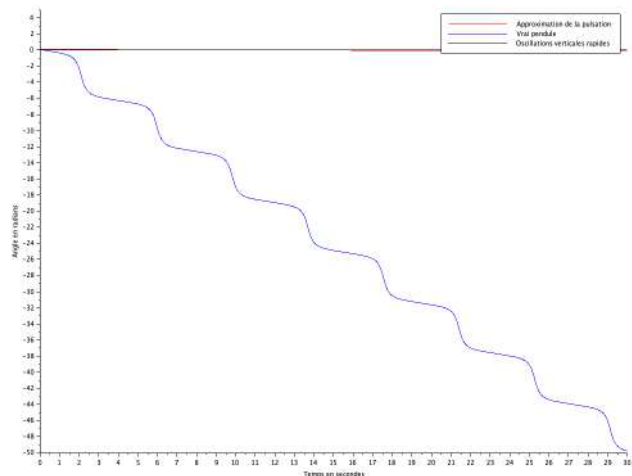
$$(\omega_6, L = 68,2cm, \pi/48)$$



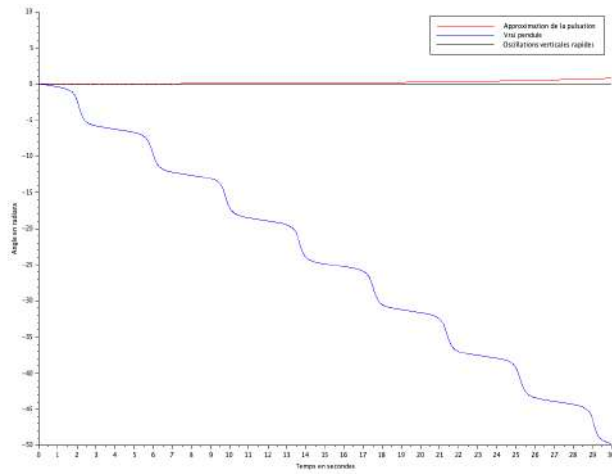
$$(\omega_6, L = 68,3cm, \pi/48)$$



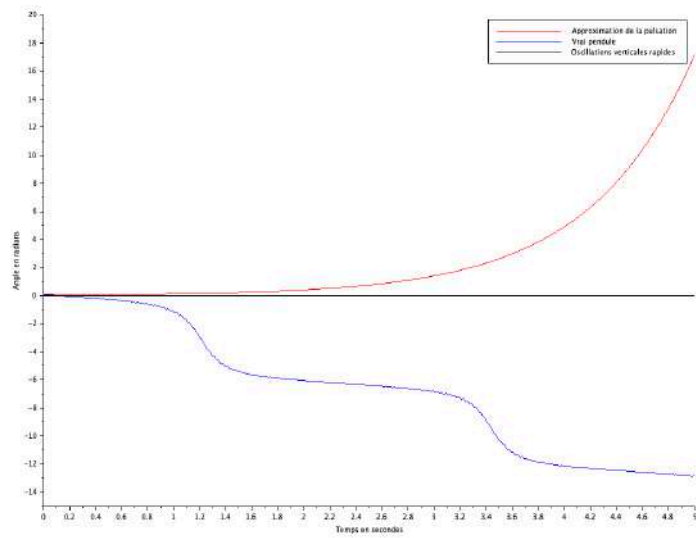
$$(\omega_6, L = 75,4cm, \pi/48)$$



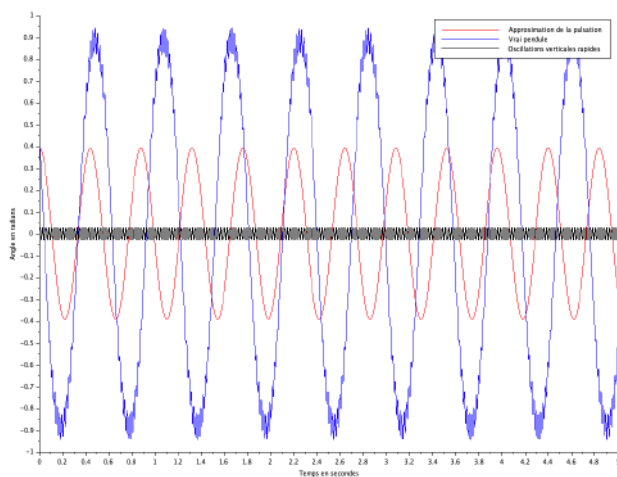
$(\omega_6, L = 75,5cm, \pi/48)$



$(30Hz, L_2, \pi/48)$

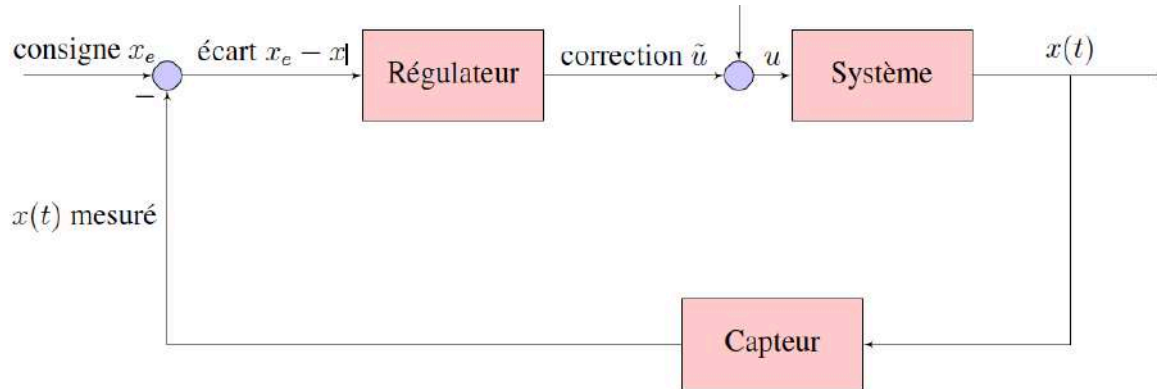


$(\omega_6, L_1, \pi/8)$



II) Applications pour l'ingénieur :

L'idée de rendre un équilibre instable stable est très répandue dans l'ingénierie. Les méthodes pour y parvenir diffèrent. L'une des plus répandue est la stabilisation par « feedback » avec utilisation du contrôleur PID. Le principe est résumé sur le schéma ci-dessous:



Ce qui est intéressant avec le pendule de Kapitza est qu'on arrive à stabiliser un système instable en « boucle ouverte », c'est à dire sans « regarder » et « compenser » ce que fait le pendule, autrement dit on le stabilise de façon aveugle sans capteur.

Certains systèmes ne sont pas très difficiles à contrôler mais d'autres le sont. Pour contrôler des systèmes mécaniques sous-actionnés (moins de moteurs que de degrés de libertés) l'idée d'osciller est utile, et c'est parfois une nécessité.

On peut prendre l'exemple de la voiture. Il y a trois degrés de liberté x, y, θ (x et y définissent la position du centre de gravité de la voiture et θ son orientation) mais seulement deux moteurs : on peut faire tourner les roues pour avancer et tourner le volant pour se diriger, mais on ne peut pas faire tourner la voiture sur place. Ainsi, il est impossible de translater directement sur le côté avec la voiture. Dans le domaine de l'Automatique, cette situation est bien connue. Elle correspond à un système linéarisé non contrôlable. Il est cependant possible de contourner le problème en faisant osciller la voiture : c'est le créneau, qui permet de se garer !



III) Bibliographie :

- L.D Landau & E.M Lifshitz. *Mechanics, Third Edition. Volume 1 of Course of Theoretical Physics.* Institute of Physical Problems. U.S.S.R Academy of Sciences. 1976
- A. M. Budge E. Frazzoli. *Lab Report #2: Kapitsa's Stable Inverted Pendulum.* December 14, 1997
- Eugene I. Butikov. *Kapitza Pendulum: A Physically Transparent Simple Explanation* St. Petersburg State University, St. Petersburg, Russia.