Epreuve de Moyenne Durée

le 07/02/2016 – Durée 1h 30mn – documents non autorisés

EXERCICE 1 : (*6 pts*)

Soit L l'ensemble des mots palindromes construits sur l'alphabet {a, b}, et $\overline{L}$ son complémentaire.

1) Les mots suivants sont ils dans L ? il s'agit de : *abbab, baab, aaab, aba*. ***(2 pts)***

2) Donner une grammaire, de type 2, qui génère L. ***(1,5 pts)***

3) Caractériser les mots du langage $\overline{L}$. ***(1 pt)***

4) Trouver une grammaire, de type 2, qui génère $\overline{L}$. ***(1,5 pts)***

EXERCICE 2 : (*5 pts*)

Pour chacun des langages suivants, trouver des grammaires les engendrant :

1) $L_1 = \{ a^n.b.c^{2m-1} \ / \ n \geq 0, m \geq 1 \}$; ***(1,5 pts)***

2) $L_2 = \{ w \in \{a, b, c\}^* \ / \ |w|_a = |w|_c$ et $|w|_b$ quelconque $\}$; ***(1,5 pts)***

3) $L_3 = \{ a^n.b^{2^n} \ / \ n \geq 0 \}$. ***(2 pts)***

EXERCICE 3 : (*6 pts*)

1) Soient Aut1 et Aut2 deux automates simples déterministes acceptant respectivement deux langages réguliers *L1* et *L2*.

Décrire un algorithme permettant de vérifier si $L_1 = L_2$; en supposant disponibles les procédures et fonction suivantes : ***(1,5 pts)***

- procédure Union(A1, A2, A3) : fait l'union des deux automates A1 et A2, résultat dans A3 ;
- procédure Inter(A1, A2, A3) : fait l'intersection de A1 et A2, résultat dans A3 ;
- procédure Compl(A1, A2) : calcule l'automate A2 complémentaire de A1 ;
- fonction TestVide(A) : teste si le langage accepté par l'automate A est vide, résultat booléen.

2) Trouver un automate d'états finis reconnaissant les chaînes de 0 et 1 représentant les nombres pairs (dans le système de numération binaire naturel). ***(1,5 pts)***

3) Même question que 2) mais les chaînes représentent les entiers divisibles par trois (3). ***(1,5 pts)***

4) Trouver un automate acceptant l'intersection des langages de 2) et 3) de cet exercice. ***(1,5 pts)***

EXERCICE 4 : (*3 pts*)

1) En utilisant les dérivées, montrer que le langage suivant est régulier :

$L = \{ a^n.b.c^{2m-1} \ / \ n \geq 0, m \geq 1 \}$ ***(1,5 pts)***

2) Le langage : $L = \{ a^n.b.c^n \ / \ n \geq 0 \}$ est-il régulier ? Justifier. ***(1,5 pts)***

Bon courage !

<u>**Bref corrigé :**</u> (E.M.D de ThL – L2 informatique – 2015/2016)

<u>EX.**1** :</u>

1) Les mots suivants sont dans L : *baab*, *aba*

les mots qui ne sont pas dans L : *abbab*, *aaab*

2) Une grammaire, de type 2, pour L : G = ({a, b}, {S}, S, P)

P : S → aSa | bSb | a | b | ε

3) Un mot w de $\overline{L}$ peut être caractérisé comme suit :

$w \in \overline{L}$ ssi $\exists\, i \in 1..n \,/\, w_i \neq w_{n-i+1}$ où $n = |w|$ et w_i = i^ième^ lettre du mot w.

4) Une grammaire, de type 2, pour $\overline{L}$: G = ({a, b}, {S, A}, S, P')

P' : S → aSa | bSb | aAb | bAa

A → aA | bA | ε

<u>EX.**2** :</u>

1) Une grammaire pour L_1 : G_1 = ({a, b, c}, {S, A}, S , P_1)

P_1 : S → aS | bA ; A → ccA | c

2) Une grammaire pour L_2 : G_2 = ({a, b, c}, {S}, S , P_2)

P_2 : S → aSc | cSa | SS | bS | ε

3) Une grammaire pour L_3 : G_3 = ({a}, {S, A, B, C, D}, S , P_3)

P_3 : S → CbD

C → aCA | B

Ab → bbA

AD → D

Bb → bB

BD → ε

<u>EX. **3** :</u>

1) Pour savoir si les deux langages réguliers *L1* et *L2* sont égaux il faut et il suffit de tester si le langage régulier : $(L1 \,\cap\, \overline{L2}) \cup (\overline{L1} \,\cap L2)$ est vide.

En représentant chaque automate par sa table de transition, on procède comme suit, pour tester l'égalité :

Algorithme Aut_égaux ;

Entrée : Automates Aut1, Aut2 ;

Sortie : booléen egal = vrai si *L1 = L2* ; = faux sinon ;

Variables locales : Automates B1, B2, B3, B4, B5 ;

Début

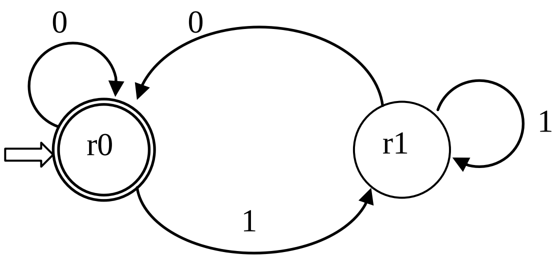
Compl(Aut2, B1) ;

Inter(Aut1, B1, B2) ;

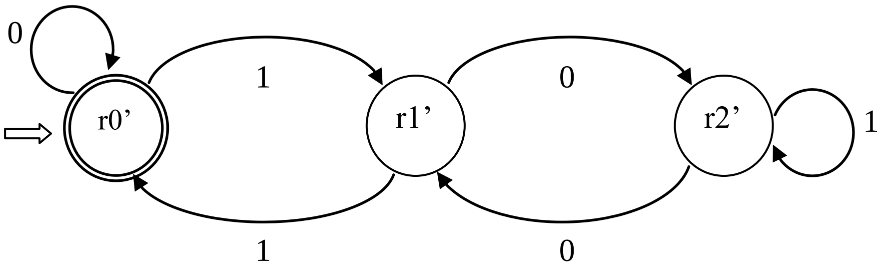
Compl(Aut1, B3) ;

Inter(B3, Aut2, B4) ;
Union(B2, B4, B5) ;
egal := TestVide(B5);
Fin

2)



3)



4) Pour construire l’automate de l’intersection on procède par la méthode suivante :

Soient A = <V_1, S_1, F_1, S_{01}, I_1> l’automate qui accepte un langage L, et B = <V_2, S_2, F_2, S_{02}, I_2> l’automate qui accepte le langage L’.

L’automate qui accepte L ∩ L’ est : C = <V, S, F, S_0, I> où :

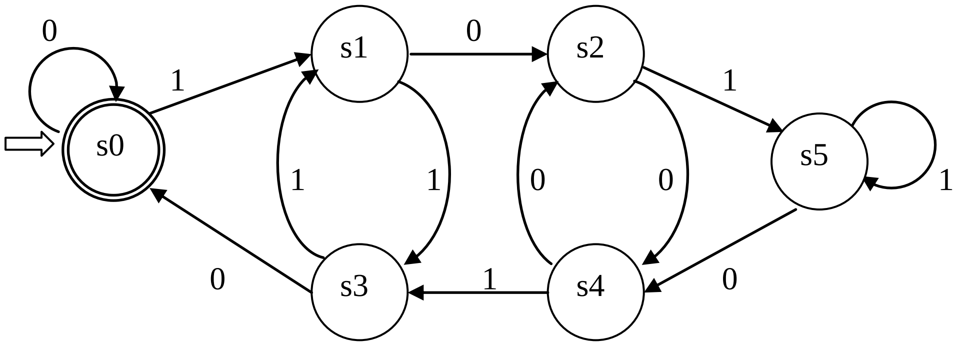
$V = V_1 = V_2$, $S = S_1 \times S_2$, $F = F_1 \times F_2$, $S_0 = (S_{01}, S_{02})$ et I est tel que :

$(a , (S_{i1},S_{j2}) , (S_{k1},S_{l2})) \in I$ si et seulement si : $(a , S_{i1} , S_{k1}) \in I_1$ et $(a , S_{j2} , S_{l2}) \in I_2$.

Pour les automates de 2) et 3), on obtient la table de transition de l’intersection :

	0	1
(r0,r0’) = s0	(r0,r0’)	(r1,r1’)
(r1,r0’) = s3	(r0,r0’)	(r1,r1’)
(r0,r1’) = s4	(r0,r2’)	(r1,r0’)
(r1,r1’) = s1	(r0,r2’)	(r1,r0’)
(r0,r2’) = s2	(r0,r1’)	(r1,r2’)
(r1,r2’) = s5	(r0,r1’)	(r1,r2’)

D'où le graphe de l'automate :



<u>Remarque :</u> L'automate obtenu représente les chaînes de 0 et 1 qui symbolisent les entiers naturels divisibles par six (6).

<u>EX. **4** :</u>

1)

1-a) Soit $S0 = L = \{ a^n.b.c^{2m-1} / n \geq 0, m \geq 1 \}$. Ce langage est bien régulier, car ses dérivées par rapport aux mots de {a, b}* sont finies :

$S0 \,||\, a = \{ a^n.b.c^{2m-1} / n \geq 0, m \geq 1 \} = S0$

$S0 \,||\, b = \{ c^{2m-1} / m \geq 1 \} = S1$

$S0 \,||\, c = ø$

$S1 \,||\, a = ø$

$S1 \,||\, b = ø$

$S1 \,||\, c = \{ c^{2m} / m \geq 0 \} = S2$

$S2 \,||\, a = ø$

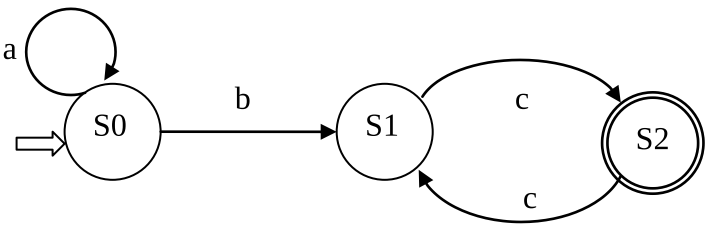
$S2 \,||\, b = ø$

$S2 \,||\, c = \{ c^{2m-1} / m \geq 1 \} = S1$

Après S2, on n'obtient plus de nouveaux états.

<u>Remarque :</u> l'automate d'états finis qui accepte L est le suivant :

(S2 est le seul état final car c'est le seul qui contient ε)



2) On suppose que L est régulier, donc d'après le théorème de Nerode, le nombre de ses dérivées par rapport aux mots sur V ={a, b, c} est fini. Donc il existe deux entiers p et q tels que $p \neq q$ et $L \,||\, a^p = L \,||\, a^q$. De plus, on sait que : $a^p\, b\, c^p \in L \Rightarrow b\, c^p \in L||a^p \Longrightarrow b\, c^p \in L||a^q \Longrightarrow a^q\, b\, c^p \in L$ avec $p \neq q \Longrightarrow$ contradiction. D'où L n'est pas régulier.