

Sujet groupe 5

On considère une entreprise produisant un bien q avec deux facteurs K et L selon la technologie suivante :

$$q = K^{1/2} L^{1/2}$$

Le travail coûte 10 € par heure et le prix unitaire du capital est de 20 €. A court terme, la quantité de capital est fixe à 100.

1) Calculez la fonction de coût de court terme.

2) Calculez la fonction de coût de long terme (vous utiliserez le $TMST_{K-L}$). Montrez qu'elle s'écrit $CT(q) = q [20(1/20)^{2/3} + 20^{2/3}]$

Corrigé

1) La fonction de coût désigne le niveau de dépense minimale pour tout niveau de production. **XX**

Pour obtenir cette fonction, il faut trouver la fonction de demande de travail.

$$q = 10L^{1/2} \quad \mathbf{X}$$

$$L^d = q^2/100 \quad \mathbf{X}$$

$$CT(q) = 20 \cdot 100 + 10 (q^2/100)$$

$$CT(q) = 2000 + q^2/10 \quad \mathbf{XX}$$

2) Pour obtenir cette fonction, il faut résoudre le programme d'acheteur du producteur. La firme minimise ses dépenses sous contrainte de sa technologie pour chaque niveau de production **X**.

$$\min_L D = 20K + 10L$$

$$Sc : q = K^{1/2} L^{1/2} \quad \mathbf{XX}$$

Le $TMST_{K-L}$ désigne la quantité de capital que l'entreprise doit utiliser pour compenser la perte d'une unité de travail, tout en conservant le même niveau de production **XX (0 si élément maquant)**.

$$TMST_{K-L} = P_{m_L}/P_{m_K} \quad \mathbf{X}$$

$$TMST_{K-L} = K/L \quad \mathbf{X}$$

Le $TMST$ est décroissant en fonction de L , il existe donc une solution intérieure. **X**

A l'optimum, il n'existe plus aucune modification de la répartition du capital et du travail qui permette de réduire les dépenses. **X**

$$CO : TMST_{K-L} = K/L = 10/20 \quad \mathbf{XX}$$

$$Sc : q = K^{1/2} L^{1/2}$$

$$K = (1/2)L \quad \mathbf{X}$$

Et

$$L = 2K \text{ X}$$

$$\text{Pour } K : q = K^{-1/2} (2K)^{1/2} \Rightarrow q = \sqrt{2} K$$

$$K^d = q/\sqrt{2} \text{ XX}$$

$$\text{Pour } L : q = (1/2)^{1/2} L^{1/2} L^{1/2}$$

$$L^d = q\sqrt{2} \text{ XX}$$

La fonction de coût va donc s'écrire :

$$CT(q) = 20 (q/\sqrt{2}) + 10 (q\sqrt{2})$$

On factorise q

$$CT(q) = q (20/\sqrt{2} + 10\sqrt{2}) \text{ XXXX}$$

Sujet groupe 10

On considère une entreprise produisant un bien q avec deux facteurs K et L selon la technologie suivante :

$$q = KL$$

Le travail coûte 10 € par heure et le prix unitaire du capital est de 20 €. L'entreprise se fixe un niveau de production pour $q = 200$

1) Calculez la répartition ainsi que le niveau de dépenses optimales pour produire cette quantité (vous utiliserez le $TMST_{K-L}$).

2) Si la fonction de production s'écrivait $q = K + L$, serait-il profitable pour l'entreprise d'investir dans du capital ? Justifiez par un raisonnement marginal.

Corrigé

1) Si l'entreprise veut produire pour $q = 200$, elle cherche à minimiser ses dépenses sous contrainte de sa technologie **X**.

$$\text{Min}_L D = 20K + 10L$$

$$\text{Sc} : q = K^{1/2} L^{1/2} \quad \mathbf{XX}$$

Le $TMST_{K-L}$ désigne la quantité de capital que l'entreprise doit utiliser pour compenser la perte d'une unité de travail, tout en conservant le même niveau de production **XX (0 si élément maquant)**.

$$TMST_{K-L} = P_{m_L}/P_{m_K} \quad \mathbf{X}$$

$$TMST_{K-L} = K/L$$

Le $TMST$ est décroissant en fonction de L , il existe donc une solution intérieure. **X**

A l'optimum, il n'existe plus aucune modification de la répartition du capital et du travail qui permette de réduire les dépenses. **X**

$$\text{CO} : TMST_{K-L} = K/L = 10/20 \quad \mathbf{XX}$$

$$\text{Sc} : 200 = KL$$

$$L = 2K \text{ ou } K = (1/2)L \quad \mathbf{X}$$

$$200 = 2K^2 \text{ ou } 200 = (1/2)L^2$$

$$K^* = 10 \text{ et } L^* = 20 \quad \mathbf{XXXX}$$

$$D^* = 20 \cdot 10 + 10 \cdot 20$$

$$D^* = 400 \quad \mathbf{XX}$$

3) Si la fonction de production s'écrit $q = K + L$, $TMST = 1$ **X**

Le TMST est constant, il existe donc une solution en coin. X

TMST = 1 > 10/20 XX

Donc $P_{ml}/10 > P_{mK}/20$ XX

Pour chaque euro investi en travail ou en capital, le travail rapporte une productivité marginale deux fois plus élevée. Il s'ensuit que, pour chaque euro supplémentaire, l'entreprise a toujours intérêt à préférer le travail au capital. Il n'est donc pas profitable d'investir en capital. XXXX

Sujet groupe 24

Une firme démarre la production d'une quantité q par le biais de la technologie suivante :

$$q = KL$$

Le travail coûte 10 € par heure et le prix unitaire du capital est de 20 €.

La banque accorde à la firme un crédit de 10 000 € pour démarrer la production.

1) Quels seront les quantités de travail et de capital achetées et le niveau de production de l'entreprise (vous utiliserez le $TMST_{K-L}$) ?

Cette firme grandit et se développe sur le long terme. En 10 ans, les quantités de capital et de travail utilisées ont été multipliées par 5.

2) Caractériser les rendements d'échelle liés à cette augmentation. Interprétez économiquement.

3) Quel serait le niveau de production optimal de la firme sur le long terme si sa technologie s'exprimait $q = KL^{1/2}$

Corrigé

1) Si l'entreprise dispose d'un montant $D = 10\ 000$, elle cherche à maximiser sa production sous contrainte budgétaire **X**.

$$\text{Max}_{L,K} q = KL$$

$$Sc : 10\ 000 = 20K + 10L \quad \mathbf{XX}$$

Le $TMST_{K-L}$ désigne la quantité de capital que l'entreprise doit utiliser pour compenser la perte d'une unité de travail, tout en conservant le même niveau de production **XX (0 si élément maquant)**.

$$TMST_{K-L} = Pm_L/Pm_K \quad \mathbf{X}$$

$$TMST_{K-L} = K/L$$

Le $TMST$ est décroissant en fonction de L , il existe donc une solution intérieure. **X**

A l'optimum, il n'existe plus aucune modification de la répartition du capital et du travail qui permette de réduire les dépenses. **X**

$$CO : TMST_{K-L} = K/L = 10/20 \quad \mathbf{XX}$$

$$Sc : 10\ 000 = 20K + 10L$$

$$L = 2K \text{ ou } K = (1/2)L \quad \mathbf{X}$$

$$10\ 000 = 20K + 10(2K) \text{ ou } 10\ 000 = 20(1/2)L + 10L$$

$$K^* = 250 \text{ et } L^* = 500 \quad \mathbf{XXXX}$$

$$q^* = 250 \cdot 500$$

$$q^* = 125\,000 \text{ X}$$

2) Les rendements d'échelle désignent l'augmentation de la production suite à une augmentation simultanée et proportionnelle des facteurs de production. **XX** (0 si manque un élément) Si le capital et le travail sont multipliés par 10, ils passent respectivement de 250 à 2500 et de 500 à 5000.

Le nouveau niveau de production s'écrit donc :

$$q^* = 2500 \cdot 5000$$

$$q^* = 12\,500\,000 \text{ X}$$

Le niveau de la production a donc lui aussi été multiplié par 100. Les rendements sont croissants **X**

La production de cette firme augmente de manière plus que proportionnelle à l'augmentation des facteurs de production. **XX (0 si élément manquant)**

3) Si la technologie s'exprimait $q = KL^{1/2}$, les rendements d'échelle, pour $t > 1$, seraient caractérisés de la sorte :

$$q = tK(tL)^{1/2} \Rightarrow q = tKt^{1/2}L^{1/2}$$

$$q = t^{3/2}KL^{1/2}$$

$$\text{Alors que } tq = tKL^{1/2}$$

$$\text{Donc, } q = tK(tL)^{1/2} > tKL^{1/2} \text{ puisque } t^{3/2} > t. \text{ XX}$$

Les rendements seraient donc croissants **X**.

Puisque les rendements sont croissants, plus la quantité produite augmente, moins il est coûteux pour la firme d'augmenter sa production. Elle a donc intérêt à augmenter indéfiniment son niveau de production. Le niveau optimal de production de la firme à long terme est donc $q = +\infty$ **XX**