Copie n° 3b - DA(

Coller ci-dessous l'étiquette code barre correspondant à l'épreuve

Z7 - 00116
0281-00-544645
ESSECMATS

Date : 02/05/2018 Epreuve / Sous épreuve : Mathématiques S ESSEC

Code Epreuve : 281

Nombre de copies supplémentaires :

Note attribuée : 20

Partie I

1) $\forall x \in [-r, r], \forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq n^k |a_n| |x|^n \leq n^k |a_n| r^n$

Par comparaison de séries à termes positifs, comme $(\sum n^k |a_n| r^n)$ converge alors $(\sum n^k |a_n| |x|^n)$ converge

Donc $\forall x \in [-r, r]$, $A(r) \subset A(|x|)$

donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $0 \leq |x| \leq r$, $A(r) \subset A(|x|)$

avec $r = r'$ et $|x| = r$

$\forall r' \in \mathbb{R}, 0 \leq r \leq r', A(r') \subset A(r)$

2) Soit $0 \leq r \leq r'$, $B(r') = \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, (a_n r'^n)_{n\in\mathbb{N}} \to 0\}$

or si $a_n r'^n \to 0$

comme $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leq a_n r^n \leq a_n r'^n$

alors $a_n r^n \to 0$

donc $B(r') \subset B(r)$

Enfin si $(\sum n^k |a_n| r^n)$ converge, nécessairement $n^k |a_n| r^n \to 0$

donc $|a_n| r^n = o\left(\frac{1}{n^k}\right)$ donc $|a_n| r^n \to 0$

donc $a_n r^n \to 0$ donc $A(r) \subset B(r)$

3) . $A(r) \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$

. $A(r) \neq \emptyset$ car $0_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}} \in A(r)$

. soit $(a_n, b_n) \in A(r)^2$, $\lambda \in \mathbb{R}$

alors $\left(\sum n^k |a_n| r^n\right)$ converge et $\left(\sum n^k |b_n| r^n\right)$ converge

donc $\left(\sum n^k (|a_n| + |\lambda| |b_n|) r^n\right)$ converge

donc $\left(\sum n^k (|a_n| + |\lambda b_n|) r^n\right)$ converge

or $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leq |a_n + \lambda b_n| \leq |a_n| + |\lambda b_n|$

par comparaison de séries à termes positifs

$$\left(\sum n^k (|a_n + \lambda b_n|) r^n\right) \text{ converge}$$

donc $a_n + \lambda b_n \in A(r)$

donc $A(r)$ est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$

4 a) $$\frac{u_{n+1}(k)}{u_n(k)} = \frac{(n+1)^{k+2} r^{n+1}}{(n+1)!} \times \frac{n!}{n^{k+2} r^n}$$

$$= \frac{1}{n+1} \times \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{k+2} \times r$$

$$\xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

donc $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, \left|\frac{u_{n+1}(k)}{u_n(k)}\right| \leq \varepsilon$

donc $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0 \quad |u_{n+1}(k)| \leq \varepsilon |u_n(k)|$

pour $\varepsilon = \frac{1}{2}$ on a donc l'existence d'un rang n_0 tel que

pour $n \geq n_0$ $\left|\frac{u_{n+1}(k)}{u_n(k)}\right| \leq \frac{1}{2}$

donc $$\prod_{i=n_0}^{n} \left|\frac{u_{i+1}(k)}{u_i(k)}\right| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-n_0+1}$$

donc $$|u_{n+1}(k)| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-n_0+1} u_{n_0}(k) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

donc $u_n(k) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$

donc $\frac{n^k r^n}{n!} = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$

or $\frac{1}{n^2} \geqslant 0$ et $\left(\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n^2}\right)$ converge

donc $\left(\sum_{n \geqslant 1} \frac{n^k r^n}{n!}\right)$ converge

donc $\underline{d \in A(r)}$

b) si $B(\lambda) \in B(r)$

alors $\lambda^n \in B(r)$

alors $(\lambda r)^n_{n \in \mathbb{N}} \longrightarrow 0$

alors $|\lambda r| < 1$

alors $|r| < \frac{1}{\lambda}$

alors $\underline{-\frac{1}{\lambda} < r < \frac{1}{\lambda}}$

Réciproquement si $-\frac{1}{\lambda} < r < \frac{1}{\lambda}$ alors $0 \leqslant \lambda r < 1$

donc $(\lambda r)^n \longrightarrow 0$

donc $B(\lambda) \in B(r)$

donc $B(\lambda) \in B(r) \iff -\frac{1}{\lambda} < r < \frac{1}{\lambda}$

$\iff 0 < r < \frac{1}{\lambda}$ car $r > 0$

si $B(\lambda) \in A(r)$ alors $\left(\sum n^k (|\lambda| r)^n\right)$ converge

alors $n^k (|\lambda| r)^n \to 0$ donc $(|\lambda| r)^n \longrightarrow 0$

donc $0 < r < \frac{1}{\lambda}$

si $0 < r < \frac{1}{\lambda}$ alors $(\lambda r)^n \longrightarrow 0$ donc $n^{k+2} (\lambda r)^n \longrightarrow 0$ par croissance comparée donc

$B(\lambda) \in A(r) \iff 0 < r < \frac{1}{\lambda}$

5) $a_n \in B(\rho)$

donc $a_n \rho^n \to 0$

soit $r \in]0, \rho[$

$n^k |a_n| r^n = |a_n| \rho^n n^k \left(\frac{r}{\rho}\right)^n$

or $a_n \rho^n \to 0$

et $n^{k+2} \left(\frac{r}{\rho}\right)^n \to 0$ par croissance comparée

donc $n^k |a_n| r^n = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$

donc $\left(\sum_{n \geq 1} n^k |a_n| r^n\right)$ converge

donc $a_n \in A(r)$

Partie II

6) D'après 5) si R désigne un réel strictement positif et $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de $B(R)$ alors

$\forall x \in]0,R[,\ a_n \in A(r)$

donc $\forall x \in]0,R[,\ \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n| x^n n^k$ converge

de même si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de $B(R)$

alors $\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n| x^n n^k$ converge

donc, comme $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq |a_n| x^n \leq |a_n| x^n n^k$

par comparaison on a :

$\forall x \in]0,R[,\ \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n| x^n$ converge

en reprenant la question 5) on a en fait

$\forall\ r \in]-\rho,\rho[,\ n^k |a_n| r^n = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$

avec $r \in \mathbb{R}$

donc $\forall x \in]-R,R[,\ \sum_{n\geq 0} |a_n| x^n$ converge

<u>donc f_a est définie sur $]-R,R[$</u>

7) En utilisant l'inégalité des accroissements finis à $f(x) = x^n$ de classe C^1 entre x et $x+h$:

$|(x+h)^n - x^n| \leq \sup_{x\in[-r,r]} (f'(x)\ |h|)$

$\leq \sup_{x\in[-r,r]} (n x^{n-1})\ |h|$

$\underline{\leq n\, r^{n-1} |h|}$

$|f_a(x+h) - f_a(x)| =$

$\left| \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \left((x+h)^n - x^n \right) \right|$

$\leq \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n| \, |(x+h)^n - x^n|$

$\leq \frac{1}{r} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n| r^n \right) |h|$ d'après la question précédente

c) Soit $x \in]-r, r[$

$\sum_{n=0}^{+\infty} n|a_n|r^n = \sum_{n=0}^{+\infty} n \times |a_n| R^n \times \left(\frac{r}{R}\right)^n$

$|a_n|R^n \to 0$ et $n^3 \left(\frac{r}{R}\right)^n \to 0$

donc $n \left(\frac{r}{R}\right)^n = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$

donc $\sum_{n=0}^{+\infty} n|a_n|r^n$ converge

donc $\forall x \in [-r, r], \forall r \in [0, R[, \; f_a(x+h) \underset{h \to 0}{\to} f_a(x)$

donc f_a est continue sur $[-r, r]$ pour $r \in [0, R[$

donc f_a est continue sur $]-R, R[$

8) a) $na_n\rho^n = na_nR^n\left(\frac{\rho}{R}\right)^n \longrightarrow 0$

car $a_n \in B(R)$ donc $a_nR^n \to 0$

et $n\left(\frac{\rho}{R}\right)^n \to 0$ car $\rho \in [r, R[$ par

croissance comparée

donc $na_n \in B(\rho)$

soit $\rho \in [r, R[$, $r \in]a, R[$

d'après 6) comme $\rho > 0$ et $(na_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $B(\rho)$

alors $\sum_{n=0}^{+\infty} na_nx^n$ est définie sur $]-\rho, \rho[$

donc $\forall \rho \in [r, R[$, $\sum_{n=0}^{+\infty} na_nx^{n-1}$ est définie sur $]-\rho, \rho[$

donc g_a est définie sur $]-R, R[$

et d'après 7) avec $r \in]0, \rho[$, g_a est continue

sur $]-R, R[$

b) $a_0 + \int_0^x S_n'(t)dt = a_0 + \sum_{k=1}^{n}\int_0^x ka_kt^{k-1}dt$

car le terme en $k=0$ est nul

$= a_0 + \sum_{k=1}^{n} a_kx^k$

$= S_n(x)$

c) $\left|\int_0^x (g_a(t) - S_n'(t))dt\right|$

$= \left|\int_0^x g_a(t)dt - S_n(x) - a_0\right|$

$= \left|\sum_{n=0}^{+\infty} a_nx^n - \sum_{k=0}^{n} a_kx^k - a_0\right| = \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} a_kx^k\right| \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} k|a_k|r^k$

car $|x| < r$ et $k \geq n+1 \geq 1$

d) or $\left(\sum_{n\geq 1} n|a_n|r^n\right)$ converge car

$n|a_n| \in B(\rho)$ donc $\left(\sum_{n\geq 1} n|a_n|r^n\right)$ converge d'après 8a)

donc $\sum_{k=n+1}^{+\infty} k|a_k|r^k \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$

donc $\int_0^x g_a(t)\,dt = \lim_{n\to+\infty} \int_0^x S_n'(t)\,dt$

donc $\lim_{n\to+\infty} S_n(x) = f_a(x) = a_0 + \int_0^x g_a(t)\,dt$ d'après 8b)

e) Comme g_a est continue sur $]-R,R[$

alors, avec $x \in [-r,r] \subset]-R,R[$

$\int_0^x g_a(t)\,dt$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-R,R[$

donc f_a est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-R,R[$

puis $f_a'(x) = \left(a_0 + \int_0^x g_a(t)\,dt\right)'$

$= g_a(x)$

g) Soit $a_n \in A(r)$

alors $\forall k \in \mathbb{N}$, $\sum_{n\geq 0} n^k|a_n|r^n$ converge

alors $\forall k \in \mathbb{N}$, $\sum_{n\geq 0} \left(\frac{n}{r}\right)^k |a_n| r^{n-k}$ converge

alors $\forall k \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{r^k} \sum_{n\geq k} n^k |a_n| r^{n-k}$ converge

donc $\forall k \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{k!} \sum_{n\geq k} n^k |a_n| r^{n-k}$ converge

or $\frac{n^k}{k!} \underset{+\infty}{\sim} \binom{n}{k}$ donc $\forall k \in \mathbb{N}$, $\sum_{n\geq k} \binom{n}{k} |a_n| r^{n-k}$ converge

De même si $\forall k \in \mathbb{N}$, $\sum_{n \geq k} \binom{n}{k} |a_n| r^{n-k}$ converge

alors $\forall k \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{k!} \sum_{n \geq k} n^k |a_n| r^{n-k}$ converge

donc $\forall k \in \mathbb{N}$ $\frac{1}{r^k} \sum_{n \geq 0} n^k |a_n| r^{n-k}$ converge
(car $k \in [0, +\infty[$)

donc $a_n \in A(r) \iff \forall k \in \mathbb{N}$ $\sum_{n \geq k} \binom{n}{k} |a_n| r^{n-k}$ converge

b) D'après 8 :

$k! \binom{n}{k} a_n \in B(r)$ car $k! \binom{n}{k} a_n R^n \times \frac{r^n}{R^n} \to 0$

donc $\forall k \in \mathbb{N}$, $h_a : x \mapsto \sum_{n=k}^{+\infty} k! \, a_n \binom{n}{k} x^{n-k}$ est définie et

continue sur $]-R, R[$, donc f_a est de classe C^k $\forall k \in \mathbb{N}$

sur $]-R, R[$ et $f_a^{(k)} = h_a$

donc f_a est de classe C^∞ sur $]-R, R[$ et

$\forall k \in \mathbb{N}$, $f_a^{(k)}(x) = h_a(x)$

c)

f_a est de classe C^∞ sur $]-R, R[$, d'après

la formule de Taylor-Lagrange :

$$f_a(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f_a^{(k)}(0)}{k!} x^k = \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{f_a^{(n-k)}(0)}{(n-k)!} x^{n-k}$$

par unicité : $a_n = f_a^{(n)}(0) \times \frac{1}{n!}$

1a) $\forall x \in \mathbb{R}, \ f_\alpha(x) = \exp(x)$

donc $\forall k \in \mathbb{N}, \ f_\alpha^{(k)}(1) = e$

et $\forall k \in \mathbb{N}, \ f_\alpha^{(k)}(0) = 1 = n!\,\alpha$

b) $\forall x \in \left]-\frac{1}{\lambda}, \frac{1}{\lambda}\right[,$

$$f_\beta(x) = \frac{1}{1-\lambda x}$$

donc f_β est de classe C^∞ par opérations donc

d'après a) $\forall k \in \mathbb{N}, \forall x \in \left]-\frac{1}{\lambda}, \frac{1}{\lambda}\right[, \ \sum_{n \geq k} \binom{n}{k} (\lambda x)^{n-k}$

converge et $\displaystyle\sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} (\lambda x)^{n-k} = f_\beta^{(k)}(x) = \left(\frac{1}{1-\lambda x}\right)^{(k)} = \frac{1}{(1-\lambda x)^{k+1}}$

Partie III

11 a) soit f_a de classe C^{N+1}, en appliquant l'égalité de Taylor reste intégral à f_a entre 1 et 0 :

$$f_a(0) = \sum_{p=0}^{N} \frac{f_a^{(p)}(1)}{p!}(0-1)^p + \int_1^0 \frac{(t)^N}{N!} f_a^{(N+1)}(t)\,dt$$

$$= \sum_{p=0}^{N} (-1)^p b_p + (-1)^{N+1} \int_0^1 \frac{t^N}{N!} f_a^{(N+1)}(t)\,dt$$

b) $f_a^{(N+1)}$ est continue sur $[0,1]$ donc

$\exists M \in \mathbb{R},\ \forall x \in [0,1],\ |f_a^{(N+1)}(x)| \leq M$

donc $\left| \int_0^1 f_a^{(N+1)}(t) \frac{t^N}{N!}\,dt \right| \leq \frac{M}{N!} \times \frac{1}{(N+1)} \underset{N \to +\infty}{\longrightarrow} 0$

c) En passant à la limite dans 11 a)

on a donc $f_a(0) = \sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^p b_p$ car

$(-1)^{N+1} \times \int_0^1 \frac{t^N}{N!} f_a^{(N+1)}(t)\,dt \to 0$

or $f_a(0) = a_0$ donc $a_0 = \sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^p b_p$

12) a) On réapplique la formule de 11 a) à $f_a^{(s)}$ de classe C^N entre 1 et 0 :

$$f_a^{(s)}(0) = \sum_{p=0}^{N} \frac{f_a^{(p+s)}(1)}{p!}(-1)^p + (-1)^{N+1} \int_0^1 \frac{t^N}{N!} f_a^{(N+s+1)}(t)\,dt$$

b) $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n \geq 0$

f_a est de classe C^∞ sur $]-R,R[$

et d'après 9 b) $f_a^{(k)}(x) = k!\left(\sum_{n=k}^{+\infty}\binom{n}{k}a_n x^{n-k}\right)$

donc $f_a^{(N+s+2)}$ est positive sur $[0,1]$

donc $f_a^{(N+s+1)}$ est croissante sur $[0,1]$

donc $\forall N \in \mathbb{N},\ \left|\int_0^1 \frac{t^N}{N!} f_a^{(N+s+1)}(t)\,dt\right|$

$\leq |f_a^{(N+s+1)}(1)| \times \frac{1}{(N+1)!} = f_a^{(N+s+1)}(1) \times \frac{1}{(N+1)!}$

car $f_a^{(N+s+1)}(1) \geq 0$ $\quad = \frac{f_a^{(N+s+1)}(1)}{(N+s+1)!} e^{N+s+1} \frac{(N+s+1)!}{(N+1)!} \frac{1}{e^{N+s+1}}$

$= u_{N+s+1}$

c)

$u_{N+s+1} = b_{N+s+1} e^{N+s+1} \times \frac{(N+s+1)!}{(N+1)!} \times \frac{1}{e^{N+s+1}}$

or $b_{N+s+1} e^{N+s+1} \to 0$ par (H)

et $\frac{(N+s+1)!}{(N+1)!} \times \frac{1}{e^{N+s+1}} \to 0$ car $\frac{(N+s+1)!}{(N+1)!} \underset{+\infty}{\sim} N^s$

et $\frac{N^s}{e^{N+s+1}} \xrightarrow[N\to+\infty]{} 0$

donc d'après 12 b) $\int_0^1 \frac{t^N}{N!} f_a^{(N+s+1)}(t)\,dt \xrightarrow[N\to+\infty]{} 0$

a) D'après 12b) en posant à la limite

$$f_a^{(s)}(0) = \sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^p \frac{f_a^{(p+s)}(1)}{p!}$$

$$= s! \sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^p b_{p+s} \binom{p+s}{s}$$

donc $\sum_{p\geq 0} (-1)^p \binom{p+s}{s} b_{p+s}$ converge et vaut

$$\frac{f_a^{(s)}(0)}{s!} = a_s = \sum_{n=s}^{+\infty} (-1)^{n-s} \binom{n}{s} b_n \quad \text{en posant } n = p+s$$

13) a) f_a est un polynôme de degré au plus d

b) si $\deg(f_a) < d$ alors $\frac{f_a^{(n)}(1)}{n!} = 0$

donc (H) est réalisée $\forall \rho > 0$

si $\deg(f_a) = d$ alors $\frac{f_a^{(n)}(1)}{n!} = a_n$

la suite $\left(\frac{f_a^{(n)}(1)}{n!} \rho^n\right)_{n \in \mathbb{N}} = \left(a_n \rho^n\right)_{n \in \mathbb{N}}$

étant nulle à partir du rang $d+1$, (H) est réalisée

c) D'après 12) et comme $\forall n \geq d+1$, $b_n = 0$

on a $a_s = \sum_{n=s}^{d+1} (-1)^{n-s} \binom{n}{s} b_n$

Partie IV

14. a) $$a_s = \sum_{n=s}^{+\infty} (-1)^{n-s} \binom{n}{s} \frac{f_a^{(n)}(1)}{n!}$$

$$= \frac{1}{s!} \sum_{n=s}^{+\infty} (-1)^{n-s} \frac{1}{(n-s)!} f_a^{(n)}(1)$$

$$|a_s| \leq \frac{1}{s!} \sum_{n=s}^{+\infty} \frac{1}{(n-s)!} f_a^{(n)}(1) = \frac{1}{s!} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} f_a^{(n+s)}(1)$$

$$\leq \frac{1}{s!} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}$$

car $f_a^{(n+s)}(1) \leq \sum_{n=0}^{+\infty} a_n = 1$

donc $|a_s| \leq \frac{e}{s!} \to 0$

donc $a_s \in B(1)$

b) D'après partie II, si a est une suite de $B(R)$

alors f_a est C^∞ sur $]-R,R[$ d'après 9 b)

donc comme $a \in B(1)$, G_x est de classe C^∞ sur $]-1,1[$

donc $\exists R > 1$ tel que G_x soit de classe C^∞ sur $]-R,R[$

15) a) $X \hookrightarrow \mathcal{P}(1)$

$$G_X(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X=n)\, x^n$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{-1} \times 1^n}{n!} x^n = e^{-1} \times e^{x}$$

Comme $x \mapsto e^x$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ alors G_X est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$

$\forall s \in \mathbb{N}, \quad G_X^{(s)} = e^{-1} e^{x}$

donc $\underline{\forall s \in \mathbb{N}, \quad G_X^{(s)}(1) = e^{-1} e^{1} = 1}$

b) $\forall s \in \mathbb{N}, \quad b_s = \dfrac{g_a^{(s)}(1)}{s!} = \dfrac{1}{s!}$

$\forall \rho \in \mathbb{R}, \quad \dfrac{\rho^s}{s!} \to 0$ car $\displaystyle\sum_{s \geq 0} \frac{\rho^s}{s!} = \exp(\rho)$

donc (H) est réalisée

$$\forall s \in \mathbb{N}, \quad a_s = \sum_{n=s}^{+\infty} (-1)^{n-s} \binom{n}{s} \frac{1}{n!}$$

$$= \sum_{n=s}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-s}}{s!\,(n-s)!}$$

$$= \frac{1}{s!} \times \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} = \frac{e^{-1}}{s!}$$

$\underline{X \hookrightarrow \mathcal{P}(1)}$

16) a) $X+1 \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$

$P(X+1=k) = (1-p)^{k-1} p$

$P(X=k-1) = (1-p)^{k-1} p$

donc $P(X=n) = (1-p)^n p$

donc $a_n = (1-p)^n p$

donc $G_X = p \sum_{n=0}^{+\infty} ((1-p)x)^n$

G converge si et seulement si $|(1-p)x| < 1$

si et seulement si $x \in \left]-\frac{1}{q}, \frac{1}{q}\right[$

D'après partie II, G_X est donc de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\left]-\frac{1}{q}, \frac{1}{q}\right[$

et $\forall s \in \mathbb{N}$, $G_X^{(s)}(1) = f_a^{(s)}(1)$

$= s! \left(\sum_{n=s}^{+\infty} \binom{n}{s} a_n \right)$ d'après 9 b)

$= s!\, p \sum_{n=s}^{+\infty} \binom{n}{s} (1-p)^n$

$= (1-p)^s s! \times p \times \sum_{n=s}^{+\infty} \binom{n}{s} (1-p)^{n-s}$

$= (1-p)^s s! \times p \times \frac{1}{p^{s+1}}$ d'après 10 b)

$= \left(\frac{1-p}{p}\right)^s s!$

b) $\frac{q}{p} = \frac{1-p}{p} < 1$ car $1-p < p$ car $p > \frac{1}{2}$

$b_s = \frac{f_a^{(s)}(1)}{s!} = \left(\frac{q}{p}\right)^s =$

donc $b_s \rho^s = \left(\frac{q\rho}{p}\right)^s$

$b_s \rho^s$ converge vers 0 si et seulement si $\left|\frac{q\rho}{p}\right| < 1$

$\Leftrightarrow |\rho| < \frac{p}{q}$

comme $\frac{p}{q} > 1$ d'après b, (H) est réalisée

$\frac{f_a^{(s)}(1)}{s!} = \left(\frac{1-p}{p}\right)^s = b_s$

donc $f_a^{(s)}(1) = \left(\frac{1-p}{p}\right)^s s!$

$$a_s = \sum_{n=s}^{+\infty} (-1)^{n-s} \binom{n}{s} \left(\frac{1-p}{p}\right)^n$$

$$= \left(\frac{1-p}{p}\right)^s \sum_{n=s}^{+\infty} \binom{n}{s} \left(\frac{p-1}{p}\right)^{n-s}$$

$$= \left(\frac{1-p}{p}\right)^s \times \frac{1}{1-\left(\frac{p-1}{p}\right)^{s+1}} = (1-p)^s p$$

donc $P(X=s) = (1-p)^s p$

donc $P(X+1=s) = (1-p)^{s-1} p$

$X+1 \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$

17) $X(\Omega) \subset [\![0,d]\!]$

$(H_s)_{s\in[\![0,d]\!]}$ est une famille échelonnée en degrés

car $\forall s \in [\![0,d]\!]$, $\deg(H_s) = s$, c'est donc une famille libre et comme card $\left((H_s)_{s \in [\![0,d]\!]} \right) = d+1$

$= \dim(\mathbb{R}_d[X])$ c'est une base de $\mathbb{R}_d[X]$

b) soit $\lambda \in \mathbb{R}$, $(P, Q) \in \mathbb{R}_d[X]$

$\Delta(\lambda P + Q) = \lambda \Delta(P) + \Delta(Q)$ par l'inécrite de la somme

De plus, si $\deg(P) = d$

alors $\deg(\Delta(P)) = d$

donc Δ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_d[X]$

c) $\Delta(H_0) = \Delta(1) = 1 - 1 = 0$

soit $s \in [\![1, d]\!]$

$$\Delta(H_s) = \frac{1}{s!}\left(\prod_{k=0}^{s-1}(x+1-k) - \prod_{k=0}^{s-1}(x-k)\right)$$

$$= \frac{1}{s!}\left((x+1)x(x-1)\ldots(x-s+2) - x(x-1)\ldots(x-s+1)\right)$$

$$= \frac{1}{s!} x(x-1)\ldots(x-s+2)\left((x+1) - (x-s+1)\right)$$

$$= \frac{x(x-1)\ldots(x-s+2)}{s!} \times s = \underline{H_{s-1}}$$

$$H_s(0) = 0 \times \frac{(-1)\ldots(-s+1)}{s!} = 0$$

d) $(H_s)_{s \in [\![0,d]\!]}$ est une base de $\mathbb{R}_d[X]$ donc $\exists (a_s)_{s \in [\![0,d]\!]}$,

$$\forall P \in \mathbb{R}_d[X], \forall x \in \mathbb{R}, P(x) = \sum_{s=0}^{d} a_s H_s(x)$$

donc $\Delta^s(P)(x) = \sum_{s=0}^{d} a_s \Delta^s(H_s(x))$

$$= \sum_{s=0}^{d} a_s H_0(x)$$

donc $\underline{\Delta^s(P)(0) = a_s}$

donc $P(x) = \sum_{s=0}^{d} \Delta^s(P)(0)\ H_s(x)$

e) $x^k = \sum_{s=0}^{k} \Delta^s(x^k)(0)\ H_s(x)$

$$= \sum_{s=0}^{k} \Delta^s(e_k)(0)\ H_s(x)$$

en $x = n$

$$\underline{n^k = \sum_{s=0}^{k} \Delta^s(e_k)(0)\ H_s(n)}$$

f) $E(X^k) = \sum_{s=0}^{d} \Delta^s(e_k)(0)\ E(H_s(X))$ par linéarité

$E(H_s(X)) = \frac{1}{s!} E(X(X-1)\dots(X-s+1))$

or $G_X(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X=n)\, x^n$

donc $G_X^{(s)}(1) = \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)\dots(n-s+1)\, P(X=n) = E(X(X-1)\dots(X-$

donc

donc $E(X^k) = \sum_{s=0}^{d} \Delta^s(e_k)(0)\ \frac{g_a^{(s)}(1)}{s!}$ car $G_X = g_a$

g.) $b_0 = \frac{g_a(1)}{1}$

$g_a(1) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X=n) = 1$ donc $b_0 = 1$

$g_a'(1) = \sum_{n=0}^{+\infty} n P(X=n) = E(X) = 1$

$g_a''(1) = \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1) P(X=n) = E(X^2) - E(X)$

$= \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2}$

donc $b_1 = 1$

$b_2 = \frac{\frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{4}$

$a_0 = \sum_{n=0}^{2} (-1)^n \binom{n}{0} b_n$

$= b_0 - b_1 + b_2$

$= 1 - 1 + \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$

$a_1 = \sum_{n=1}^{2} (-1)^{n-1} \binom{n}{1} b_n$

$= \cancel{1} b_1 - 2 b_2$

$= \cancel{1} (b_1 - 2b_2) = \cancel{1} \left(1 - \frac{2}{4}\right) = \frac{3 \times 1}{4} = \frac{1}{2}$

$a_2 = \sum_{n=2}^{2} (-1)^{n-2} \binom{n}{2} b_n$

$= \frac{2(2-1)}{2} b_2 = \frac{2(2-1)}{8} = \frac{1}{4}$

$P(X=0) = \frac{1}{4}$ $\quad$ $P(X=2) = \frac{1}{4}$

$P(X=1) = \frac{1}{2}$ $\quad$ $X(\Omega) = \{0, 1, 2\}$