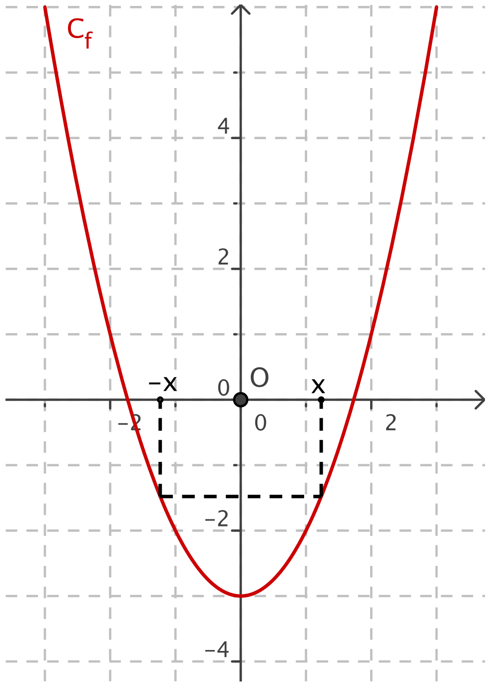
Parité d'une fonction   Centre et axe de symétrie d'une courbe

On considère une fonction f définie sur D_f.



Fonction paire

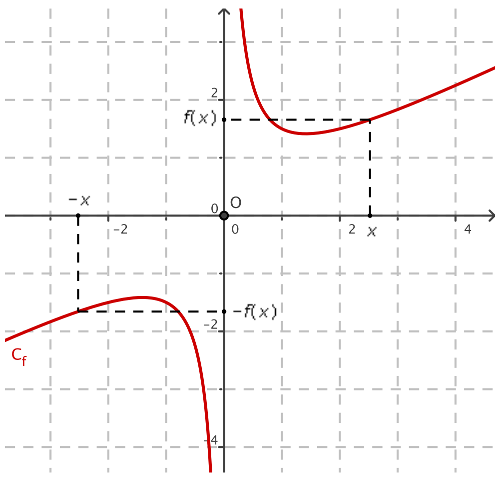
On dit que la fonction f est paire si l'ensemble D_f est centré en 0 (c'est-à-dire que si $x \in D_f$, alors $-x \in D_f$) et si pour tout x de D_f, $f(-x) = f(x)$.

Dans ce cas, la courbe représentative de la fonction f admet l'axe des ordonnées comme axe de symétrie.

Exemple: $f(x) = x^2 - 3$. Son ensemble de définition est $\mathbb{R}$ centré en 0; et pour tout x de $\mathbb{R}$, $f(-x) = (-x)^2 - 3 = x^2 - 3 = f(x)$.

Donc cette fonction f est paire.

La courbe ci-contre est sa représentation graphique et admet l'axe des ordonnées comme axe de symétrie.



Fonction impaire

On dit que la fonction f est impaire si l'ensemble D_f est centré en 0 (c'est-à-dire que si $x \in D_f$, alors $-x \in D_f$) et si pour tout x de D_f, $f(-x) = -f(x)$.

Dans ce cas, la courbe représentative de la fonction f admet l'origine du repère comme centre de symétrie.

Exemple: $f(x) = \frac{x}{2} + \frac{1}{x}$. Son ensemble de définition est $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ centré en 0; et pour tout x de $\mathbb{R}\backslash\{0\}$, $f(-x) = \frac{-x}{2} + \frac{1}{-x} = \frac{-x}{2} - \frac{1}{x} = -f(x)$.

Donc cette fonction f est impaire.

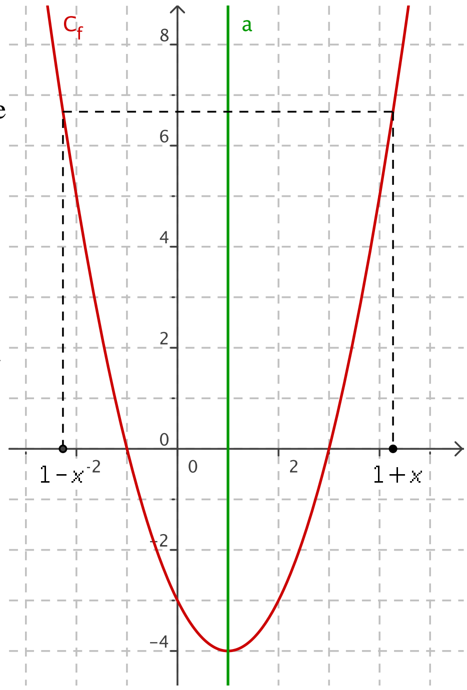
La courbe ci-contre est sa représentation graphique et admet l'origine du repère comme centre de symétrie.

Exemples importants:

Des fonctions paires: La fonction carrée, la fonction cosinus, $x \mapsto \frac{1}{x^2+1}$,

Des fonctions impaires: La fonction inverse, la fonction cube, la fonction sinus, les fonctions linéaires ($x \mapsto ax$),

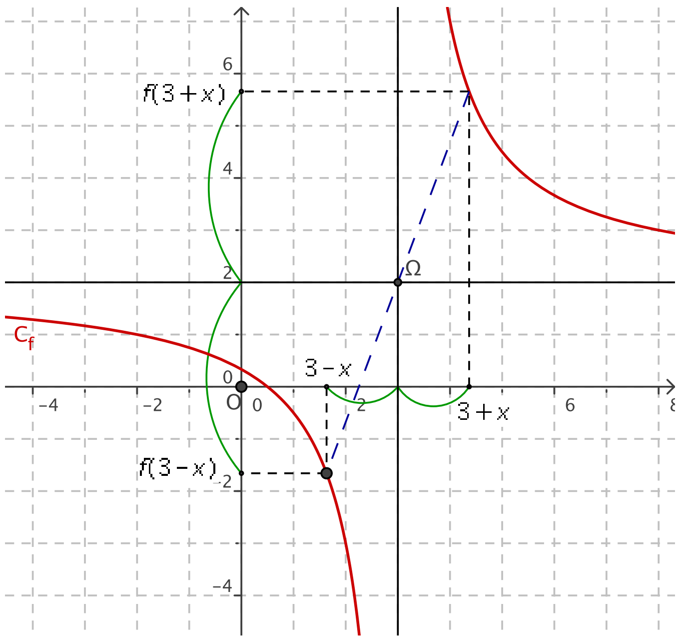
Axe de symétrie



Si la fonction f vérifie: pour tout x de D_f tel que $a - x$ et $a + x \in D_f$, $f(a - x) = f(a + x)$, alors la droite d'équation $x = a$ est un axe de symétrie de la courbe représentative de f.

Exemple: $f(x) = x^2 - 2x - 3$. Son ensemble de définition est $\mathbb{R}$. Pour tout x de $\mathbb{R}$, $1 - x$ et $1 + x \in D_f$, $f(1 - x) = (1 - x)^2 - 2(1 - x) - 3 = x^2 - 4$, et $f(1 + x) = (1 + x)^2 - 2(1 + x) - 3 = x^2 - 4$; $f(1 - x) = f(1 + x)$, donc la droite d'équation $x = 1$ est un axe de symétrie de la courbe représentative de f.
La courbe ci-contre est sa représentation graphique et admet la droite d'équation $x = 1$ comme axe de symétrie.

Centre de symétrie



Si la fonction f vérifie: pour tout x de D_f tel que $a - x$ et $a + x \in D_f$, $f(a - x) + f(a + x) = 2b$, alors le point de coordonnées $(a; b)$ est un centre de symétrie de la courbe représentative de f.

Exemple: $f(x) = \dfrac{2x-1}{x-3}$. Son ensemble de définition est $\mathbb{R}\backslash\{3\}$; de plus la fonction f peut s'écrire

$f(x) = 2 + \dfrac{5}{x-3}$.

Pour tout x de $\mathbb{R}\backslash\{3\}$, tel que $3 - x$ et $3 + x \in D_f$,

$f(3 - x) + f(3 + x) = 2 + \dfrac{5}{(3-x)-3} + 2 + \dfrac{5}{(3+x)-3} = 4 = 2 \times 2$, alors le point de coordonnées $(3; 2)$ est un centre de symétrie de la courbe représentative de f.
La courbe ci-contre est sa représentation graphique.

Résumé

- f est <u>paire</u> si l'ensemble D_f est centré en 0 et si pour tout x de D_f, $f(-x) = f(x)$.
- f est <u>impaire</u> si l'ensemble D_f est centré en 0 et si pour tout x de D_f, $f(-x) = -f(x)$.
- Si pour tout x de D_f tel que $a - x$ et $a + x \in D_f$, $f(a - x) = f(a + x)$, alors la droite d'équation $x = a$ est un <u>axe de symétrie</u> de C_f.
- Si pour tout x de D_f tel que $a - x$ et $a + x \in D_f$, $f(a - x) + f(a + x) = 2b$, alors $\Omega(a; b)$ est un <u>centre de symétrie</u> de C_f.