Frédéric BROSSARD - brossardmaths@gmail.com

Corrigé Rapide et Succinct ESCP 2018 ECT

Exercice 1

1. (a) Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ avec $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$

   Si $A \in \mathscr{E}$ alors $ad - bc = 0$ donc A non inversible (question de cours)

   (b) Considérons la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$. En posant $a = 1, b = 1, c = -1, d = -1$, nous avons $a + d = 0$ et $ad - bc = 0$ donc $M \in \mathscr{E}$

   Il en va de même pour la matrice $N = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

   (c) L'énoncé nous suggère implicitement d'utiliser les matrices N et M de la question précédente afin de répondre à la question

   $M + N = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$. On constate que $2 * (-2) + 0 * 0 = -4$ et $-4 \neq 0$ donc $M + N \notin \mathscr{E}$

   De même $MN = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$. On a $2 + 2 = 4$ et $4 \neq 0$ donc $MN \notin \mathscr{E}$

   Donc somme et produit de deux éléments de $\mathscr{E}$ ne sont pas nécessairement des éléments de $\mathscr{E}$

   (d) $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ alors $A^2 = \begin{pmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ac + dc & cb + d^2 \end{pmatrix}$. Or $A \in \mathscr{E}$ donc $bc = ad$ et $a + d = 0$ d'où

   $A^2 = \begin{pmatrix} a^2 + ad & b(a+d) \\ c(a+d) & ad + d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a(a+d) & 0 \\ 0 & d(a+d) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

   Soit $n \geq 2$ un entier alors $A^n = A^2 A^{n-2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} A^{n-2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ Donc $\forall n \geq 2, A^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

2. (a) Le déterminant de A est $1 * 5 - 2 * (-2) = 9$ et $9 \neq 0$ donc A est inversible

   (b) $K = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$ On a bien $2 + (-2) = 0$ et $-2 * 2 - (-2) * 2 = -4 + 4 = 0$ donc $K \in \mathscr{E}$

(c) On a $A^0 = I$ puis $A = K + 3I$

Soit $n \geq 2$, comme K et $3I$ commutent puisque I commute avec toute matrice, on peut calculer A^n grâce à la formule du binôme de Newton : $A^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} K^k (3)^{n-k} I^{n-k}$

Mais, on sait que $K \in \mathscr{E}$ donc $\forall k \geq 2$, $K^k = O$ (où O est la matrice nulle).

Donc, en reprenant la formule du binôme : $A^n = \sum_{k=0}^{1} \binom{n}{k} K^k (3)^{n-k} I^{n-k} = 3^n I + 3^{n-1} nK$

On remarque que ce résultat reste vrai si $n = 1$ puisque $A = 1.3^0.K + 3^1 I$

Donc pour $n \in \mathbb{N}^*$ on a $A^n = \begin{pmatrix} -2.3^{n-1}n + 3^n & 2.3^{n-1}n \\ -2.3^{n-1}n & 2.3^{n-1}n + 3^n \end{pmatrix}$

3. (a) Cherchons s'il existe deux réels α et β tels que $A^2 + \alpha A + \beta I = O$

Ces réels doivent vérifier : $\begin{pmatrix} -3 & 12 \\ -12 & 21 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha & 2\alpha \\ -2\alpha & 5\alpha \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

On obtient un système à 4 équations et 2 inconnues :

$$\left[\begin{array}{r} \alpha + \beta = 3 \\ 2\alpha = -12 \\ -2\alpha = 12 \\ 5\alpha + \beta = -21 \end{array}\right.$$

Ce système admet comme solution unique $\alpha = -6$ et $\beta = 9$.

(b) On a donc $A^2 - 6A + 9I = O$ donc $A^2 - 6A = -9I$ donc $A(-\frac{1}{9}(A - 6I)) = (-\frac{1}{9}(A - 6I))A = I$

A est donc inversible et $A^{-1} = -\frac{1}{9}A + \frac{2}{3}I$

(c) On remplace A par $K + 3I$ dans l'expression précédente et on obtient $A^{-1} = -\frac{1}{9}(K + 3I) + \frac{2}{3}I = \frac{1}{3}I - \frac{1}{9}K$

Si $n \geq 2$ on peut encore utiliser la formule du binôme pour calculer $(A^{-1})^n$:

$$(A^{-1})^n = \sum_{k=0}^{1} \binom{n}{k} \frac{1}{(-9)^k} K^k \frac{1}{3^{n-k}} I^{n-k} = \frac{1}{3^n} I + \frac{1}{(-9)} \frac{1}{3^{n-1}} nK = (3)^{-n} I - \frac{1}{3^2.3^{-n-1}} nK = 3^{-n} I - \frac{1}{3^{n+1}} nK =$$
$$= 3^{-n} I - (3)^{-n-1} nK$$

Posons $n' = -n$. n' est un entier négatif et nous avons donc $(A^{-1})^n = A^{-n} = A^{n'} = 3^{n'} I + 3^{n'-1} n' K$

On constate que cette formule reste vraie quand $n' = -1$ et comme lorsque n décrit l'ensemble des entiers positifs, n' décrit l'ensemble des entiers négatifs, la formule trouvée en 2)c) demeure vraie sur $\mathbb{Z}$ (en $n = 0$, on a $A^0 = I$)

4. (a) Le polynôme $X^2 - 6X + 9$ est annulateur pour A (question 3) a)) or $X^2 - 6X + 9 = (X - 3)^2$ donc 3 est la seule racine. On sait que les valeurs propres sont incluses dans l'ensemble des racines d'un polynôme annulateur donc 3 est la seule valeur propre possible de A.

(b) Pour vérifier que 3 est bien valeur propre, on doit résoudre le système $AX = 3X$ (où $X \in \mathscr{M}_{21}(\mathbb{R})$) et montrer que l'ensemble des solutions ne se réduit pas au vecteur nul. On constate que $AX = 3X \Leftrightarrow KX = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Posons ce système : $\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Il se ramène à la seule équation $-2x + 2y = 0$ soit $x = y$

Les solutions de ce système sont donc les vecteurs $\alpha\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$ soit $Vect(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix})$. 3 est donc bien valeur propre.

Exercice 2

1. (a) $I_0 = \int\limits_1^e t dt = [\frac{t^2}{2}]_1^e = \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2}$

   (b) Soit $n \in \mathbb{N}$, sur l'intervalle $[1,e]$ la fonction $t \to t(lnt)^n$ est continue comme produit de fonctions continues et à valeurs positives. Donc par positivité croissance de l'intégrale $I_n \geq 0$

   (c) La suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par 0 puisque $\forall n \in \mathbb{N}; I_n \geq 0$

   Soit $n \in \mathbb{N}$, $I_{n+1} - I_n = \int\limits_1^e t((lnt)^{n+1} - (lnt)^n)dt = \int\limits_1^e t(lnt)^n(lnt-1)dt$ Or sur l'intervalle $[1,e]$ la fonction $t \to t(lnt)^n(lnt-1)$ est continue comme somme et produit de fonctions continues. D'autre part : $\forall t \in [1,e]$ on a $lnt \leq 1$ donc $t(lnt)^n(lnt-1) \leq 0$ et par intégration de cette inégalité entre 1 et e, les bornes étant dans l'ordre croissant on a donc $I_{n+1} - I_n \leq 0$ donc la suite est décroissante.

   $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée par 0 donc par le théorème de la limite monotone, elle est convergente.

2. (a) f_n est bien dérivable sur $[1,e]$ en tant que composée (puissance) d'une fonction dérivable (ln) et $\forall t \in [1,e]$, $f_n'(t) = (n+1)\frac{(lnt)^n}{t}$

   (b) Partons de $I_{n+1} = \int\limits_1^e t(lnt)^{n+1}dt$

   On pose $u(t) = (lnt)^{n+1}$ donc $u'(t) = (n+1)\frac{(lnt)^n}{t}$
   On pose $v'(t) = t$ donc $v(t) = \frac{t^2}{2}$
   Les fonctions u et v sont C^1 donc l'IPP est licite et :
   $I_{n+1} = [\frac{t^2}{2}(lnt)^{n+1}]_1^e - (n+1)\int\limits_1^e \frac{t^2}{2t}(lnt)^n dt$

   D'où $I_{n+1} = \frac{e^2}{2} - (n+1)\frac{I_n}{2}$ donc $2I_{n+1} + (n+1)I_n = e^2$

   (c) On applique la formule précédente avec $n = 0$
   On a : $2I_1 + I_0 = e^2$ or $I_0 = \frac{e^2-1}{2}$ donc $I_1 = \frac{e^2+1}{4}$

   (d) $I_{n+1} \leq I_n$ donc $2I_{n+1} + (n+1)I_n \leq 2I_n + (n+1)I_n$ donc $2I_{n+1} + (n+1)I_n \leq I_n(n+3)$
   Or $2I_{n+1} + (n+1)I_n = e^2$ donc $e^2 \leq (n+3)I_n$ d'où $\frac{e^2}{n+3} \leq I_n$

   De même, on a $2I_{n+1} + (n+1)I_n \geq (n+3)I_{n+1}$ d'où $e^2 \geq (n+3)I_{n+1}$ donc $\frac{e^2}{n+3} \geq I_{n+1}$ soit $\frac{e^2}{(n+1)+2} \geq I_{n+1}$

   Or cette relation est vraie pour tout entier donc elle est aussi vraie pour n et $\frac{e^2}{n+2} \geq I_n$

   (e) $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{e^2}{n+2} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{e^2}{n+3} = 0$ donc par encadrement $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} I_n = 0$

   De même $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{ne^2}{n+2} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{ne^2}{n+3} = e^2$ et comme $\frac{ne^2}{n+3} = e^2 \leq nI_n \leq \frac{ne^2}{n+2}$ alors par encadrement $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} nI_n = e^2$

(f) $I = 1/2*(e^2-1)$ (valeur initiale c'est à dire I_0)
$I = e^2 - 1/2*(n+1)*I$ (relation de récurrence entre un terme et le précédent)

3. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$ $2I_{n+1} \geq \frac{2e^2}{(n+1)+3}$ d'après 2)d) appliquée à $n+1$.
Donc $2I_{n+1}+I_n \geq e^2(\frac{2}{n+4}+\frac{1}{n+3})$ et en réduisant au même dénominateur on obtient $2I_{n+1}+I_n \geq \frac{(3n+10)e^2}{(n+3)(n+4)}$
On obtient l'autre inégalité de la même manière en utilisant $2I_{n+1} \leq \frac{2e^2}{(n+1)+2}$ d'après 2)d)

(b) Soit $n \in \mathbb{N}$, $e^2 - nI_n = 2I_{n+1}+I_n$ en utilisant (*)
Donc on a : $n\frac{(3n+10)e^2}{(n+3)(n+4)} \leq n(e^2-nIn) \leq n\frac{(3n+7)e^2}{(n+3)(n+2)}$
Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} n\frac{(3n+10)e^2}{(n+3)(n+4)} = \lim\limits_{n\to+\infty} n\frac{(3n+10)e^2}{(n+3)(n+2)} = 3e^2$
alors par encadrement $\lim\limits_{n\to+\infty} n(e^2-nI_n) = 3e^2$

4. $\forall n \in \mathbb{N}$ on pose $P(n) : I_n = \frac{(-1)^n n!}{2^{n+1}}(e^2\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{(-2)^k}{k!}-1)$

Initialisation : $I_0 = \frac{e^2-1}{2} = \frac{(-1)^0 0!}{2^{0+1}}(e^2\sum\limits_{k=0}^{0}\frac{(-2)^k}{k!}-1)$
Donc $P(0)$ est vraie. La récurrence est initialisée.
Hérédité : on suppose qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $P(n)$ soit vraie montrons que $P(n+1)$ est vraie.
On sait que $I_{n+1} = \frac{1}{2}(e^2-(n+1)I_n)$
Or $P(n)$ est vraie donc $I_{n+1} = \frac{1}{2}(e^2-(n+1)\frac{(-1)^n n!}{2^{n+1}}(e^2\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{(-2)^k}{k!}-1))$
D'où $I_{n+1} = \frac{e^2}{2} - \frac{(-1)^n(n+1)!}{2^{n+2}}(e^2\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{(-2)^k}{k!}-1)$
On a $-(-1)^n = (-1)^{n+1}$ donc $I_{n+1} = \frac{e^2}{2} + \frac{(-1)^{n+1}(n+1)!}{2^{n+2}}(e^2\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{(-2)^k}{k!}-1)$
D'autre part $\frac{e^2}{2} = e^2\frac{(-1)^{n+1}(n+1)!}{2.2^{n+1}}\frac{((-2)^{n+1}}{(n+1)!}$
D'où $I_{n+1} = \frac{(-1)^{n+1}(n+1)!}{2^{n+2}}(e^2\sum\limits_{k=0}^{n+1}\frac{(-2)^k}{k!}-1)$
Donc $P(n+1)$ est vraie
Conclusion : par le principe de récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout entier n

Exercice 3

1. (a) L'urne contient initialement 1 rouge. Si on tire la rouge, on la remet dans l'urne et on rajoute une rouge donc l'urne contient alors 2 rouges après la première expérience. Si on tire la blanche, on la remet dans l'urne et on ajoute une blanche donc l'urne contient toujours une rouge. Donc $X_1(\Omega) = \{1,2\}$

(b) Dans cette situation, les tirages (soit rouge, soit blanche) sont équiprobables de probabilité $\frac{1}{2}$ donc $P(X_1=1) = P(B_1) = \frac{1}{2}$ et $P(X_1=2) = P(R_1) = \frac{1}{2}$
X_1 étant à support fini admet une espérance et $E(X_1) = 1.P(X_1=1)+2.P(X_1=2) = \frac{3}{2}$

La formule de Koenig-Huygens donne $V(X_1) = E((X_1)^2) - E(X_1)^2$
Par le théorème de transfert : $E((X_1)^2) = 1.P(X_1 = 1) + 4.P(X_1 = 2) = \frac{5}{2}$
Donc $V(X_1) = \frac{5}{2} - \frac{9}{4} = \frac{1}{4}$

(c) $X_2(\Omega) = \{1,2,3\}$ car on peut tirer 2 blanches et donc n'avoir toujours qu'une rouge après les 2 tirages et les remises ou alors tirer une blanche une rouge et donc avoir 2 rouges ou alors tirer 2 rouges donc en remettre une après le premier tirage dans l'urne puis en remettre une autre après le 2e tirage donc en avoir 3 dans l'urne après l'expérience.
$(X_2 = 1) = B_1 \bigcap B_2$ (tirer 2 blanches)
$(X_2 = 3) = R_1 \bigcap R_2$ (tirer 2 rouges)
$(X_2 = 2) = (B_1 \bigcap R_2) \bigcup (R_1 \bigcap B_2)$ (deux tirages possibles amenant une rouge et une blanche)

(d) Pour calculer les probabilités définissant la loi de X_2 on utilise la formule des probabilités conditionnelles car le contenu de l'urne est modifié à chaque tirage.
$P(B_1) \neq 0$ donc $P(X_2 = 1) = P(B_1)P_{B_1}(B_2) = \frac{1}{2} * \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$
De même $P(R_1) \neq 0$ donc $P(X_2 = 3) = P(R_1)P_{R_1}(R_2) = \frac{1}{2} * \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$
Et $P(X_2 = 2) = 1 - P(X_1 = 1) - P(X_1 = 3) = \frac{1}{3}$
On a donc $P(X_2 = 1) = P(X_2 = 2) = P(X_2 = 3) = \frac{1}{3}$ donc X_2 suit bien une loi uniforme discrète.
D'où $E(X_2) = 2$ et $V(X_2) = \frac{9-1}{12} = \frac{2}{3}$

2. (a)

X_1 / X_2	$X_2 = 1$	$X_2 = 2$	$X_2 = 3$
$X_1 = 1$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	0
$X_1 = 2$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$

(b) $cov(X_1, X_2) = E(X_1X_2) - E(X_1)E(X_2)$
$E(X_1X_2) = 1.1.\frac{2}{3} + 1.2\frac{1}{3} + 0 + 0 + 2.2\frac{1}{3} + 2.3\frac{2}{3} = \frac{20}{3}$
$E(X_1)E(X_2) = 3$ d'où $cov(X_1, X_2) = \frac{20}{3} - \frac{9}{3} = \frac{11}{3}$
Comme $cov(X_1, X_2) \neq 0$ les 2 variables ne sont pas indépendantes.

3. (a) $(X_n = 1) = \bigcap\limits_{i=1}^{n} B_i$ (on ne tire jamais de boule rouge)

(b) On utilise la formule des probabilités composées pour calculer $P(X_n = 1)$
Comme on a $P(\bigcap\limits_{i=1}^{n-1} B_i) \neq 0$
On peut écrire $P(X_n = 1) = P(B_1)P_{B_1}(B_2)P_{B_1 \bigcap B_2}(B_3)...P_{B_1 \bigcap ... \bigcap B_{n-1}}(B_n)$
D'où $P(X_n = 1) = \frac{1}{2}.\frac{2}{3}.\frac{3}{4}....\frac{n}{n+1}$ puisqu'à chaque tirage on rajoute une blanche. Les fractions se simplifient 2 à 2 et il reste $P(X_n = 1) = \frac{1}{n+1}$
$(X_n = n+1) = \bigcap\limits_{i=1}^{n} R_i$ (on tire toujours une rouge)
On utilise la formule des probabilités composées pour calculer $P(X_n = n+1)$ Comme on a $P(\bigcap\limits_{i=1}^{n-1} R_i) \neq 0$
$P(X_n = n+1) = P(R_1)P_{R_1}(R_2)P_{R_1 \bigcap R_2}(R_3)...P_{R_1 \bigcap ... \bigcap R_{n-1}}(R_n)$
D'où $P(X_n = n+1) = \frac{1}{2}.\frac{2}{3}.\frac{3}{4}....\frac{n}{n+1}$ puisqu'à chaque tirage on rajoute une rouge et donc
$P(X_n = n+1) = \frac{1}{n+1}$

4. (a) Si $X_n = k-1$ est réalisé alors l'urne, avant le $n+1$ ème tirage contient $n+2$ boules dont $k-1$ rouges donc la probabilité de tirer une rouge et par la-même de réaliser $(X_n = k)$ est $P_{(X_n=k-1)}(X_{n+1}=k) = \frac{k-1}{n+2}$
De même si $X_n = k$ est réalisé alors l'urne contient avant le $n+1$ ème tirage $n+2$ boules dont k rouges et donc $n+2-k$ blanches. Réaliser $X_{n+1} = k$ dans ces conditions c'est tirer une blanche d'où $P_{(X_n=k)}(X_{n+1}=k) = \frac{n+2-k}{n+2}$
   (b) $(X_n = k-1)$ et $(X_n = k)$ constituent un système complet d'événements vis à vis du $n+1$ ème tirage donc la formule des probabilités totales permet d'écrire :
$P(X_{n+1}=k) = P_{(X_n=k)}(X_{n+1}=k).P(X_n=k) + P_{(X_n=k-1)}(X_{n+1}=k).P(X_n=k-1)$
D'où $P(X_{n+1}=k) = \frac{n+2-k}{n+2}P(X_n=k) + \frac{k-1}{n+2}P(X_n=k-1)$
   (c) $\forall n \in \mathbb{N}^*$ on se donne $P(n)$: X_n suit la loi uniforme sur $[\![1, n+1]\!]$
Initialisation : X_1 suit une loi uniforme sur $[\![1,2]\!]$ donc $P(1)$ vraie
Hérédité : on suppose qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $P(n)$ vraie.
$X_{n+1}(\Omega) = [\![1, n+2]\!]$
On a $P(X_{n+1}=1) = P(X_{n+1}=n+2) = \frac{1}{n+2}$ (on applique la réponse à la question 3)b) à $n+1$
Soit maintenant $k \in [\![2,n]\!]$, on a $P(X_{n+1}=k) = \frac{n+2-k}{n+2}P(X_n=k) + \frac{k-1}{n+2}P(X_n=k-1)$
Mais $P(X_n=k) = \frac{1}{n+1}$ car par hypothèse de récurrence X_n suit une loi uniforme sur $[\![1,n+1]\!]$ et de même $P(X_n=k-1) = \frac{1}{n+1}$
Donc $P(X_{n+1}=k) = \frac{1}{n+2}(\frac{n+2-k}{n+1} + \frac{k-1}{n+1}) = \frac{1}{n+2}.\frac{n+1}{n+1} = \frac{1}{n+2}$
Donc $\forall k \in [\![1,n+2]\!]$ on a $P(X_{n+1}=k) = \frac{1}{n+2}$ donc X_{n+1} suit une loi uniforme sur $[\![1,n+2]\!]$ et $P(n+1)$ est vraie
Conclusion : par le principe de récurrence, X_n suit une loi uniforme sur $[\![1,n+1]\!]$
5. then $r = r+1$ on tire une rouge et on en rajoute une
else $b = b+1$ on tire une blanche et on en rajoute une
$x = r$ (on affecte la valeur du nombre de rouges après n tirages)
6. (a) Le problème est symétrique que l'on considère les tirages de rouges ou les tirages de blanches et comme au départ on a autant de rouges que de blanches et la probabilité sur Ω est l'équiprobabilité, Y_n suit la même loi que X_n
   (b) $X_n + Y_n = n+2$ car après le n-ième tirage on a $n+2$ boules dans l'urne (soit le nombre de rouges plus le nombre de blanches)
   (c) $\rho(X_n,Y_n) = \frac{cov(X_n,Y_n)}{\sqrt{V(X_n)V(Y_n)}} = 1$ car X_n et Y_n suivent la même loi.

Exercice 4

1. $E(Z) = \frac{1}{\lambda}$ et $V(Z) = \frac{1}{\lambda^2}$
$V(Z) = E(Z^2) - E(Z)^2$ donc $E(Z^2) = \frac{2}{\lambda^2}$
2. (a) f est définie sur $\mathbb{R}$
f est à valeurs positives
f est continue sur $\mathbb{R}^+$ comme produit de fonctions continues et sur $\mathbb{R}^{-*}$ comme fonction constante.
Donc f continue sauf éventuellement en 0 (on peut montrer qu'elle est continue en 0 également car $f(0) = 0 = \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$)

Montrons que $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = 1$

Comme f est nulle sur $\mathbb{R}^{-*}$, il suffit donc de montrer que $\int\limits_{0}^{+\infty} f(t)dt = 1$

Soit $A > 0$ on calcule $\int\limits_{0}^{A} \lambda^2 te^{-\lambda t}dt$ par intégration par partie en posant :

$u(t) = t$ donc $u'(t) = 1$

$v'(t) = \lambda e^{-\lambda t}$ donc $v(t) = -e^{-\lambda t}$

L'IPP est licite car ces fonctions sont C^1 sur $[0,A]$

$\int\limits_{0}^{A} \lambda^2 te^{-\lambda t}dt = \lambda([-te^{-\lambda t}]_0^A + \int\limits_{0}^{A} e^{-\lambda t}dt) = -\lambda Ae^{-\lambda A} + \int\limits_{0}^{A} \lambda e^{-\lambda t}dt$

Or par croissance comparée $\lim\limits_{A\to+\infty} -\lambda Ae^{-\lambda A} = 0$

D'autre part, $\lim\limits_{A\to+\infty} \int\limits_{0}^{A} \lambda e^{-\lambda t}dt = 1$ car on retrouve l'intégrale de la fonction de densité d'une loi exponentielle de paramètre λ

Donc $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt$ converge et vaut 1

Donc f est bien une densité de probabilité.

(b) U admet une espérance si et seulement si $\int\limits_{0}^{+\infty} tf(t)dt$ converge absolument (f est nulle sur $\mathbb{R}^-$)

Comme la fonction $tf(t)$ est continue sur $\mathbb{R}^+$, soit $A > 0$

$\int\limits_{0}^{A} tf(t)dt = \int\limits_{0}^{A} \lambda^2 t^2 e^{-\lambda t}dt$

On va faire une IPP mais de manière à retrouver $\int\limits_{0}^{A} \lambda^2 te^{-\lambda t}dt$ car on connaît sa valeur lorsqu'on fait tendre A vers $+\infty$ (1)

On pose $u(t) = t^2$ donc $u'(t) = 2t$

On pose $v'(t) = \lambda^2 e^{-\lambda t}$ donc $v(t) = -\lambda e^{-\lambda t}$

IPP licite car fonctions C^1

$\int\limits_{0}^{A} tf(t)dt = [-t^2\lambda e^{-\lambda t}]_0^A + \frac{2}{\lambda}\int\limits_{0}^{A} \lambda^2 te^{-\lambda t}dt$

Quand A tend vers $+\infty$, $[-t^2\lambda e^{-\lambda t}]_0^A$ tend vers 0 par croissance comparée.

Quand A tend vers $+\infty$, $\frac{2}{\lambda}\int\limits_{0}^{A} \lambda^2 te^{-\lambda t}dt$ tend vers $\frac{2}{\lambda}$ car $\int\limits_{0}^{+\infty} \lambda^2 te^{-\lambda t}dt = 1$

Donc U admet une espérance et $E(U) = \frac{2}{\lambda}$

3. (a) (succint) poser $u(t) = x^3$, $u'(t) = 3x^2$ puis $v'(t) = e^{-\lambda t}$ donc $v(t) = -\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda t}$

(b) On sait que $\int\limits_{0}^{+\infty} \lambda^2 t^2 e^{-\lambda t}dt$ converge et vaut $\frac{2}{\lambda}$

Donc dans l'expression précédente, lorqu'on fait tendre A vers $+\infty$, on a $\int\limits_{0}^{A} \frac{3}{\lambda}.\frac{1}{\lambda^2}\lambda^2 t^2 e^{-\lambda t}dt$ qui tend vers $\frac{3}{\lambda^3}.\frac{2}{\lambda} = \frac{6}{\lambda^4}$

D'autre part, par croissance comparée $\lim\limits_{A \to +\infty} A^3 e^{-\lambda A} = 0$

Donc $\int\limits_0^{+\infty} x^3 e^{-\lambda x} dx$ converge et vaut $\frac{6}{\lambda^4}$

(c) U admet une variance si et seulement si $\int\limits_0^{+\infty} \lambda^2 t^3 e^{-\lambda t} dt$ converge. Or on a montré ce résultat à la question précédente (modulo le coeff λ^2 en facteur). Donc U admet une variance et $V(U) = \lambda^2 . \frac{6}{\lambda^4} = \frac{6}{\lambda^2}$

4. (a) Si $x \leq 0$ comme f est nulle sur $\mathbb{R}^-$, $F(x) = 0$

Soit $x > 0$, $\int\limits_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int\limits_0^x f(t)dt$

On a déjà réalisé le calcul de cette intégrale avec A pour démontrer que f était une densité à la question 2)a). Il suffit donc de reprendre le résultat : $\int\limits_0^x \lambda^2 t e^{-\lambda t} dt = \lambda([-te^{-\lambda t}]_0^x + \int\limits_0^x e^{-\lambda t})dt$

Or $\int\limits_0^x \lambda e^{-\lambda t} dt$ est la fonction de répartition de la loi exponentielle donc elle vaut $1 - e^{-\lambda x}$ (cours)

Donc $\int\limits_0^x \lambda^2 t e^{-\lambda t} dt = -\lambda x e^{-\lambda x} + 1 - e^{-\lambda x} = 1 - (1 + \lambda x) e^{-\lambda x}$

(b) $(P(|U - E(U)| \leq E(U)) = P(-E(U) \leq U - E(U) \leq E(U)) = P(0 \leq U \leq 2E(U)) = P(0 \leq U \leq \frac{4}{\lambda}$ car $E(U) = \frac{2}{\lambda}$

(c) d'où $P(0 \leq U \leq \frac{4}{\lambda}) = F(\frac{4}{\lambda}) = 1 - (1+4)e^{-4}$

Or $-e^{-4} = -\frac{1}{54.6}$ en prenant l'approximation proposée d'où $P(0 \leq U \leq \frac{4}{\lambda}) = 1 - \frac{5}{54.6}$

Comme $-54.6 < -50$ on a $\frac{-1}{54.6} > \frac{-1}{50}$ donc $-\frac{5}{54.6} > -\frac{5}{50}$

D'où $P(0 \leq U \leq \frac{4}{\lambda}) > 1 - 0.1$ donc on a bien l'inégalité demandée.

5. (a) $\overline{U_n}$ est un estimateur de a car c'est une fonction indépendante de a de n variables aléatoires indépendantes et de même loi.

$\overline{U_n}$ admet une espérance car somme finie de variables admettant une espérance et par linéarité :

$E(\overline{U_n}) = \frac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} E(U_k) = \frac{2n}{\lambda n} = \frac{2}{\lambda}$

Posons $W_n = \frac{\overline{U_n}}{2}$, W_n est un estimateur de a et $E(W_n) = \frac{1}{\lambda} = a$ donc W_n est un estimateur sans biais de a

(b) Comme les U_i sont indépendantes, $V(W_n) = V(\frac{1}{2n} \sum\limits_{k=1}^{n} U_k) = \frac{1}{4n^2} \sum\limits_{k=1}^{n} V(U_k) = \frac{1}{4n^2} . \frac{6n}{\lambda^2} = \frac{3}{2n\lambda^2}$

On a $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{3}{2n\lambda^2} = 0$

(c) W_n est donc un estimateur convergent de a et le cours indique que dans ce cas : $\forall \varepsilon > 0$ on a $\lim\limits_{n \to +\infty} P(|W_n - a| \leq \varepsilon) = 0$ car d'après l'inégalité de Bienaimé-Tchebyshev on a :

Pour un n donné, $\forall \varepsilon > 0$ sachant que $E(W_n) = a$, $P(|W_n - a| \geq \varepsilon) \leq \frac{V(W_n)}{\varepsilon^2}$ et par passage à la limite dans cette inégalité on obtient bien $\lim\limits_{n \to +\infty} P(|W_n - a| \geq \varepsilon) = 0$