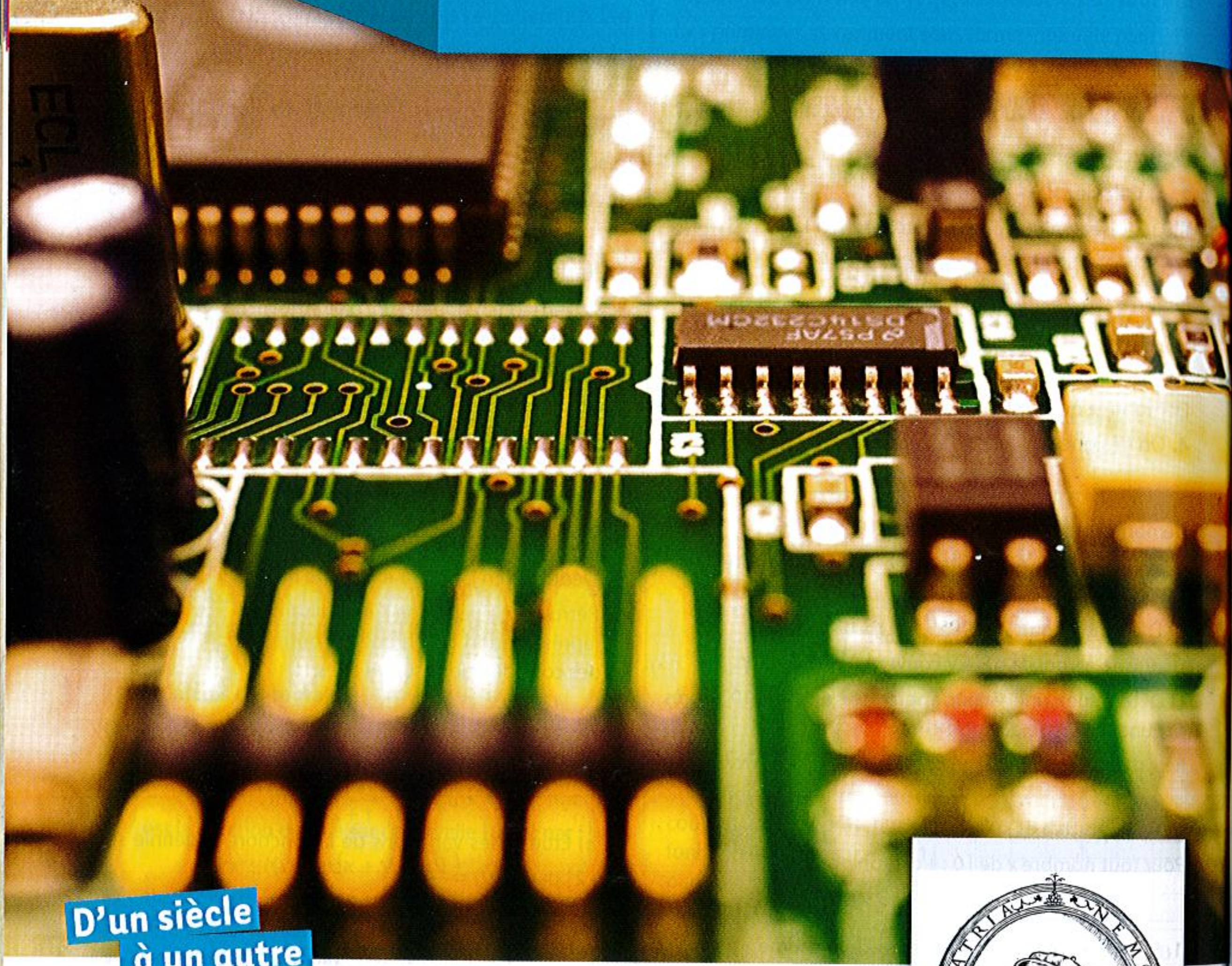
CHAPITRE 8

Nombres complexes



D'un siècle à un autre

La méthode de résolution des équations du troisième degré, publiée par l'Italien Cardan dans *Ars Magna* (1545), aurait été empruntée à un autre Italien, Tartaglia. Cette méthode fait apparaître des nombres « imaginaires » qui donnent accès aux solutions réelles : les nombres complexes étaient nés !

Ces nombres complexes sont aujourd'hui abondamment utilisés pour les simplifications d'écriture et de calculs qu'ils permettent, notamment en physique pour décrire le fonctionnement d'oscillateurs électriques.

En savoir plus sur
Jérôme Cardan

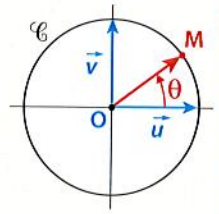
→ Chercheurs d'hier, p. 249

Rappels & Exercices-tests

Compléments numériques

Repérage d'un point sur le cercle trigonométrique

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$.
M est un point du cercle trigonométrique $\mathscr{C}$ de centre O. θ est une mesure en radian de l'angle $(\vec{u},\ \overrightarrow{OM})$. Alors :



- M a pour coordonnées $(\cos\theta\,;\sin\theta)$.
- Chaque nombre de la forme $\theta + 2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$ est une mesure de l'angle orienté $(\vec{u},\ \overrightarrow{OM})$.
- Parmi toutes les mesures de $(\vec{u},\ \overrightarrow{OM})$, il en existe une et une seule dans l'intervalle $]-\pi\,;\pi]$ appelée **mesure principale** de $(\vec{u},\overrightarrow{OM})$.

Trigonométrie

- **Les formules d'addition**

Quels que soient les nombres a et b :

$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$

$\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$

$\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)$

$\sin(a-b) = \sin(a)\cos(b) - \cos(a)\sin(b)$

- **Les formules de duplication**

Pour tout nombre a :

$\sin(2a) = 2\sin(a)\cos(a)$

$\cos(2a) = \cos^2(a) - \sin^2(a)$

L'équation du second degré

- Le **discriminant** de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$ est le nombre $\Delta = b^2 - 4ac$.
- Dans l'ensemble $\mathbb{R}$:

– si $\Delta < 0$, l'équation n'a pas de solution ;

– si $\Delta = 0$, l'équation a une seule solution

$$x_0 = -\frac{b}{2a}\,;$$

– si $\Delta > 0$, l'équation a deux solutions distinctes :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}.$$

Pour les exercices 1 à 5

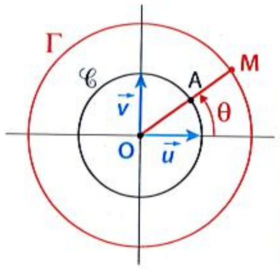
Dites si les propositions sont vraies ou fausses. Vous justifierez votre réponse.

1 **a)** Deux nombres opposés ont le même sinus.

b) Si deux nombres ont le même cosinus, alors ils sont égaux.

c) Si $(\vec{u},\ \overrightarrow{OM}) = \frac{125\pi}{6}$, alors sa mesure principale est $-\frac{\pi}{6}$.

2 Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$.
$\mathscr{C}$ est le cercle trigonométrique de centre O, et Γ le cercle de centre O et de rayon r. M est un point de Γ tel que $(\vec{u},\ \overrightarrow{OM}) = \theta$. La demi-droite $[OM)$ coupe $\mathscr{C}$ en A.



a) $\overrightarrow{OM} = r\,\overrightarrow{OA}$.

b) M a pour coordonnées $(r\cos(\theta)\,;r\sin(\theta))$.

3 a désigne un nombre.

a) $\cos(2a) = 2\cos^2(a) - 1$.

b) $\sin^2(a) = \frac{1-\cos(2a)}{2}$.

4 L'équation $-3x^2 + 4x - 1 = 0$ a pour solutions 1 et $\frac{1}{3}$.

5 a désigne un nombre.
On considère l'équation $ax^2 - 6x - 6 = 0$.

a) Pour tout $a > 0$, l'équation a deux solutions distinctes dans $\mathbb{R}$.

b) Si $a = 10$, l'équation a pour solution $-\frac{1}{2}$.

6 QCM

Pour chaque affirmation, une seule réponse est exacte. Identifiez-la en justifiant votre réponse.

1. $\sin\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4}\right)$ est égal à :

a) $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ **b)** $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ **c)** $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{2}$

2. $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$ est égal à :

a) $\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$ **b)** $\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$ **c)** $1-\frac{\sqrt{2}}{2}$

Corrigés sur www.transmathlycee.net/eleve-TermS

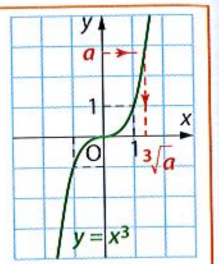
Activité 1 DES NOMBRES RÉELS AUX NOMBRES IMAGINAIRES

Jérôme Cardan (1501-1576) a fourni, dans son ouvrage *Ars Magna*, une formule pour déterminer une solution X de l'équation $X^3 + pX + q = 0$ dans le cas où $4p^3 + 27q^2 \geqslant 0$:

$$X = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{p^3}{27} + \frac{q^2}{4}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{p^3}{27} + \frac{q^2}{4}}}.$$

Note

Pour tout nombre a, la notation $\sqrt[3]{a}$ désigne la **racine cubique** de a : c'est l'unique nombre qui, élevé au cube, donne a.



1 On considère l'équation $X^3 - 36X - 91 = 0$

($p = -36$ et $q = -91$).

a) À l'aide d'une calculatrice, appliquez la formule de Cardan afin de déterminer une solution α de cette équation.

b) Déterminez deux nombres b et c tels que, pour tout réel X, $X^3 - 36X - 91 = (X - \alpha)(X^2 + bX + c)$.

c) Achevez la résolution de l'équation $X^3 - 36X - 91 = 0$. Combien a-t-elle de solutions dans $\mathbb{R}$?

2 On considère l'équation **(E) :** $X^3 - 15X - 4 = 0$ ($p = -15$ et $q = -4$).

a) Calculez $4p^3 + 27q^2$. Peut-on appliquer la formule de Cardan à cette équation ? Pourquoi ?

b) Utilisez une calculatrice graphique afin de conjecturer le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$.

c) Pour résoudre cette équation malgré le problème posé par le signe de $4p^3 + 27q^2$, Cardan utilise des racines de nombres négatifs. Plus tard, Raffaelle Bombelli (1526-1572) introduira un nombre « imaginaire », que nous noterons i, tel que $i^2 = -1$.

Ainsi, dans le cas présent, on peut écrire $\frac{p^3}{27} + \frac{q^2}{4} = -121 = 11^2 \times i^2 = (11i)^2$.

- En utilisant le nombre i, démontrez que pour déterminer la solution de l'équation (E) par la formule de Cardan, il suffit de trouver deux nombres « imaginaires » dont les cubes s'écrivent $2 + 11i$ et $2 - 11i$.
- En utilisant les règles de calcul des nombres réels et l'égalité $i^2 = -1$, démontrez que :

$$(2+i)^3 = 2 + 11i \text{ et } (2-i)^3 = 2 - 11i.$$

- Déduisez-en que 4 est la valeur donnée par la formule de Cardan pour l'équation (E).
- Vérifiez que 4 est bien solution de l'équation (E).

d) Déterminez deux réels b et c tels que, pour tout réel X : $X^3 - 15X - 4 = (X - 4)(X^2 + bX + c)$.

e) Achevez la résolution de l'équation $X^3 - 15X - 4 = 0$.

Histoire des mathématiques **La querelle de Fontana et Cardan**

Au XVI^e siècle, les mathématiciens se défiaient lors de concours mathématiques publics, au cours desquels ils montraient leur habileté. Ils avaient ainsi pour habitude de garder secrètes leurs découvertes.

Au cours de l'un de ces concours, le mathématicien Niccolo Fontana dit Tartaglia (« Le Bègue ») (1499-1557) trouva en 1534 une méthode générale pour résoudre les équations du type $X^3 + pX + q = 0$. Il semble qu'il ait été le premier à utiliser pour cela la racine carrée d'un nombre négatif. Il garda sa méthode secrète, mais accepta de la dévoiler à Cardan, à la condition que celui-ci la garde secrète.

Cardan développa la méthode de Fontana et réussit à l'étendre à toute équation du 3^e degré et du 4^e degré (avec son assistant Ferrari). Apprenant que la méthode de Fontana avait été découverte avant celui-ci par Scipione del Ferro, il passa outre sa promesse et publia ces résultats dans son *Ars magna* (1545).

Dans *Quesiti et invenzioni diverse* (1546) (page de titre ci-contre), Fontana attaqua violemment Cardan ; il s'ensuivit une longue querelle avec Cardan et Ferrari. Celle-ci prit fin au cours d'un concours entre Fontana et Ferrari, que Ferrari gagna.

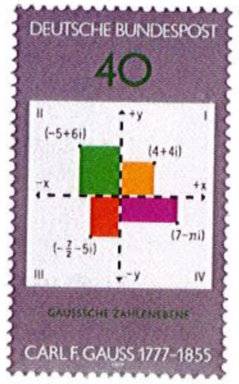
C'est finalement le nom de Cardan qui resta associé à cette méthode de résolution.

Activité 2 REPRÉSENTATION GÉOMÉTRIQUE DES NOMBRES COMPLEXES

1 Introduction

En 1811, dans une correspondance avec un autre mathématicien, Carl Friedrich **Gauss** (1777-1855) écrit :

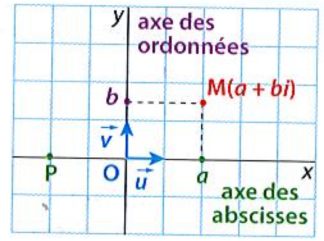
« De même qu'on peut se représenter tout le domaine des quantités réelles par moyen d'une ligne droite indéfinie, de même on peut se figurer le domaine complet de toutes les quantités, les réelles et les imaginaires, au moyen d'un plan indéfini, où chaque point, déterminé par son abscisse a et son ordonnée b, représente en même temps la quantité $a + ib$ ».



Timbre allemand édité pour le bicentenaire de la naissance de Gauss.

Adoptons la représentation de Gauss. $(O ; \vec{u}, \vec{v})$ est un repère orthonormé du plan.

Il est admis que l'axe des abscisses de ce repère représente l'ensemble $\mathbb{R}$ des réels. Ainsi, à tout réel x, on associe un point P sur l'axe des abscisses : le point de coordonnées $(x ; 0)$. Et, réciproquement, à tout point P de l'axe des abscisses, on associe un réel x.



On convient que tout point M du plan représente aussi un nombre z, qui n'est donc pas un nombre réel et qu'on appelle **nombre complexe**.

On convient également que :

– le point V de coordonnées $(0 ; 1)$ représente le nombre complexe i tel que $i^2 = -1$;
– tout point M de coordonnées $(a ; b)$ représente le nombre complexe $z = a + bi$;
– tout point de l'axe des ordonnées, de coordonnées $(0 ; b)$ représente le nombre complexe bi.

2 Application

a) Placez les points N_1, N_2 et N_3 représentant les nombres complexes $3i$, 0 et $-i$.
Quelles sont les coordonnées de ces points dans le repère $(O ; \vec{u}, \vec{v})$?

b) Quels sont les nombres complexes représentés par les points $N_4(0 ; 5)$ et $N_5(0 ; -2)$?

c) Placez les points M_1, M_2 et M_3 représentant respectivement les nombres complexes :

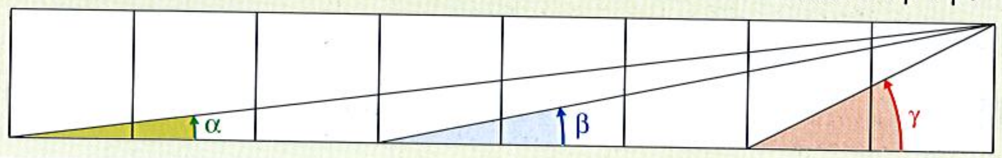
$$z_1 = 2 + 3i, \quad z_2 = -1 + 4i \quad \text{et} \quad z_3 = 5 + i \times (-2) = 5 - 2i.$$

Quelles sont les coordonnées de ces points dans le repère $(O ; \vec{u}, \vec{v})$?

d) Quels sont les nombres complexes représentés par les points $M_4(1 ; 2)$ et $M_5\left(-\sqrt{2} ; \frac{3}{5}\right)$?

Problème ouvert Refaites cet exercice après le chapitre ... Est-il plus facile ?

α, β et γ désignent les mesures principales des angles orientés. Que vaut la somme $\alpha + \beta + \gamma$?



1 Les nombres complexes

1.1 Forme algébrique d'un nombre complexe

Théorème 1 (admis)

Il existe un ensemble, noté $\mathbb{C}$, d'éléments appelés **nombres complexes**, tel que :

1. $\mathbb{C}$ contient l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels ;

2. $\mathbb{C}$ contient un élément i tel que $i^2 = -1$;

3. $\mathbb{C}$ est muni d'une addition et d'une multiplication qui suivent des règles de calcul analogues à celles de l'addition et de la multiplication dans $\mathbb{R}$;

4. tout nombre complexe z s'écrit de **manière unique** sous la forme $z = a + bi$ où a et b sont deux réels. Cette écriture est appelée la **forme algébrique** de z.

Vocabulaire

- On dit que le réel a est la **partie réelle** de z et on la note $a = \mathrm{Re}(z)$.
- On dit que le réel b est la **partie imaginaire** de z et on la note $b = \mathrm{Im}(z)$.
- Tout nombre complexe de la forme $z = bi$ (b réel) est appelé **imaginaire pur**.

Conséquences

- Dire que le nombre complexe z est **réel** équivaut à dire que $\mathrm{Im}(z) = 0$.
- Dire que le nombre complexe z est **imaginaire pur** équivaut à dire que $\mathrm{Re}(z) = 0$.

Théorème 2

Deux nombres complexes sont égaux si, et seulement si, ils ont même partie réelle et même partie imaginaire :

« $a + bi = a' + b'i$ » équivaut à « $a = a'$ et $b = b'$ ».

Remarque. En particulier, « $a + bi = 0$ » équivaut à « $a = 0$ et $b = 0$ ».

1.2 Calculer dans $\mathbb{C}$

Grâce aux propriétés de l'ensemble $\mathbb{C}$, on calcule dans $\mathbb{C}$ comme dans $\mathbb{R}$, en tenant compte de $i^2 = -1$.

- Par exemple, si $z = a + bi$ et $z' = a' + b'i$, alors :

$z + z' = (a + bi) + (a' + b'i)$, soit $z + z' = (a + a') + (b + b')i$; $\mathrm{Re}(z + z') = \mathrm{Re}(z) + \mathrm{Re}(z')$, $\mathrm{Im}(z + z') = \mathrm{Im}(z) + \mathrm{Im}(z')$

$zz' = (a + bi)(a' + b'i) = aa' + bb'i^2 + a'bi + ab'i$, soit $zz' = (aa' - bb') + (ab' + a'b)i$.

- Il en résulte que les **identités remarquables** valables dans $\mathbb{R}$ le sont aussi dans $\mathbb{C}$. En particulier :

$$(a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2.$$

2 Conjugué d'un nombre complexe

2.1 Définition

Définition 1

Le conjugué d'un nombre complexe $z = a + bi$ est le nombre complexe $a - bi$. On le note $\bar{z}$.

Exemples. Si $z = 3 + 2i$, alors $\bar{z} = 3 - 2i$; si $z = 5$, alors $\bar{z} = 5$; si $z = -3i$, alors $\bar{z} = 3i$.

Conséquence. Si $z = a + bi$, alors $z + \bar{z} = 2a$ et $z - \bar{z} = 2bi$; d'où :

$$z + \bar{z} = 2\mathrm{Re}(z) \quad \text{et} \quad z - \bar{z} = 2i\,\mathrm{Im}(z).$$

Il en résulte que :

« Le nombre complexe **z est réel** » équivaut à « $z = \bar{z}$ ».

« Le nombre complexe **z est imaginaire pur** » équivaut à « $z + \bar{z} = 0$ ».

Relation fondamentale

Pour tout nombre complexe z, le produit $z\bar{z}$ est un réel positif. Si $z = a + bi$, alors :

$$z\bar{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2.$$

2.2 Opérations sur les nombres conjugués

Théorème 3

z et z' sont deux nombres complexes.

- $\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z'}$
- $\overline{zz'} = \bar{z} \times \bar{z'}$
- $\overline{\left(\dfrac{z}{z'}\right)} = \dfrac{\bar{z}}{\bar{z'}}$ $(z' \neq 0)$

Démonstration

On pose $z = a + bi$ et $z' = a' + b'i$.

- $zz' = (aa' - bb') + (ab' + a'b)i$, donc $\overline{zz'} = (aa' - bb') - (ab' + a'b)i$.

D'autre part, $\bar{z} = a - bi$ et $\bar{z'} = a' - b'i$. Donc :

$\bar{z} \times \bar{z'} = (a - bi)(a' - b'i) = (aa' - bb') - (ab' + ab')i$. D'où $\overline{zz'} = \bar{z} \times \bar{z'}$.

- Les autres résultats se démontrent de manière analogue.

Remarque. Ces résultats s'étendent à une somme de n termes ou à un produit de n facteurs. En particulier, pour tout naturel n non nul et tout nombre complexe z non nul : $\overline{(z^n)} = (\bar{z})^n$.

3 Équation du second degré à coefficients réels

On appelle équation du second degré à **coefficients réels** toute équation qui peut s'écrire :

$$aX^2 + bX + c = 0$$

où X est l'inconnue, et a, b, c sont trois réels donnés, $a \neq 0$.

Résoudre dans $\mathbb{C}$ cette équation, c'est trouver tous les nombres complexes u tels que $au^2 + bu + c = 0$.

Théorème 4

Dans $\mathbb{C}$, l'équation $az^2 + bz + c = 0$, $a \neq 0$, a, b, c réels a **toujours** des solutions.

On note Δ le discriminant de cette équation : $\Delta = b^2 - 4ac$.

- Si $\Delta > 0$, l'équation a deux solutions réelles.
- Si $\Delta = 0$, l'équation a une solution double réelle.
- Si $\Delta < 0$, l'équation a deux solutions complexes conjuguées :

$$z_1 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a} \quad \text{avec} \quad z_2 = \bar{z_1}.$$

Conséquence. Dans $\mathbb{C}$, le trinôme $az^2 + bz + c$ se **factorise toujours** sous la forme :

$$az^2 + bz + c = a(z - z_1)(z - z_2).$$

Démonstration. Les règles de calcul dans $\mathbb{C}$ étant analogues à celles dans $\mathbb{R}$, on obtient :

$$az^2 + bz + c = a\left[\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right] = \boxed{a\left[\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]}$$

Forme canonique

Puisque $a \neq 0$, résoudre dans $\mathbb{C}$ cette équation, c'est résoudre : $\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} = 0$.

- **Si $\Delta > 0$ ou si $\Delta = 0$**, on sait que l'équation a deux solutions dans $\mathbb{R}$ et deux seulement (distinctes ou égales). Elle a donc deux solutions complexes et deux seulement puisque $\mathbb{R}$ est inclus dans $\mathbb{C}$.
- **Si $\Delta < 0$**, alors $\sqrt{-\Delta}$ existe et avec $i^2 = -1$, $(i\sqrt{-\Delta})^2 = \Delta$. Donc :

$$\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} = \left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{i\sqrt{-\Delta}}{2a}\right)^2 = \left(z + \frac{b}{2a} - \frac{i\sqrt{-\Delta}}{2a}\right)\left(z + \frac{b}{2a} + \frac{i\sqrt{-\Delta}}{2a}\right).$$

Ainsi, l'équation a deux solutions :

$$z_1 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a} \quad \text{avec} \quad z_2 = \overline{z_1}.$$

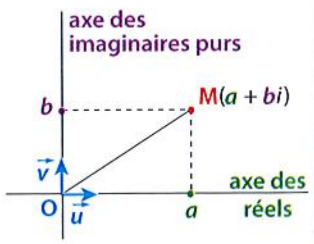
4 Représentation géométrique d'un nombre complexe

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{u}, \vec{v})$.

4.1 Affixe d'un point

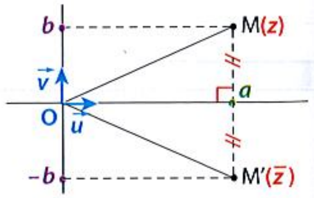
Animation

- À tout nombre complexe $z = a + bi$, on associe le point M de coordonnées $(a\,;b)$. M est **l'image de z**. On note $M(z)$.
- Si M est un point de coordonnées $(a\,;b)$ dans le repère $(O\,;\vec{u}, \vec{v})$, le nombre complexe $z = a + bi$ est appelé **l'affixe** du point M.



Conséquences

- « M appartient à l'axe des abscisses » équivaut à « $\mathrm{Im}(z) = 0$ ».
- « M appartient à l'axe des ordonnées » équivaut à « $\mathrm{Re}(z) = 0$ ».
- **Le point $M'(\overline{z})$ est symétrique de $M(z)$** par rapport à l'axe des abscisses.



4.2 Affixe d'un vecteur

De même qu'à un point M de coordonnées $(a\,;b)$, on associe son affixe $z_M = a + bi$, à tout vecteur $\vec{w}$ de coordonnées $(a\,;b)$, on associe le nombre complexe $z = a + bi$.

Définition 2 L'affixe d'un vecteur $\vec{w}$ de coordonnées $(a\,;b)$ est le complexe $z = a + bi$.

Théorème 5 Si z_M et $z_{M'}$ sont les affixes respectives des points M et M′ dans un même repère orthonormé, alors l'affixe du vecteur $\overrightarrow{MM'}$ est égale à $z_{M'} - z_M$:

$$\text{affixe}\,(\overrightarrow{MM'}) = z_{M'} - z_M.$$

Démonstration. Si $z_M = x + yi$ et $z_{M'} = x' + y'i$, alors les coordonnées de M et M′ sont respectivement $(x\,;y)$ et $(x'\,;y')$. Donc le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ a pour coordonnées $(x' - x\,;y' - y)$.
Ainsi, par définition, l'affixe de $\overrightarrow{MM'}$ est $(x' - x) + (y' - y)i$, soit $z_{M'} - z_M$.

Règles de calcul sur les affixes de vecteurs

$\vec{w}$ et $\vec{w'}$ ont pour affixes respectives z et z'.

- « $\vec{w} = \vec{w'}$ » équivaut à « $z = z'$ ».
- $\vec{w} + \vec{w'}$ a pour affixe $z + z'$ et pour tout réel k, $k\vec{w}$ a pour affixe kz.

Affixe du milieu d'un segment

Si I est le milieu du segment [AB], alors $2\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB}$ soit $2(z_I - z_A) = z_B - z_A$; d'où $z_I = \frac{z_A + z_B}{2}$.

5 Forme trigonométrique d'un nombre complexe non nul

5.1 Introduction

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O\,;\vec{u}, \vec{v})$. $z = a + bi$ est un nombre **complexe non nul** et M est le point d'affixe z.

La demi-droite [OM) coupe le cercle trigonométrique $\mathscr{C}$ de centre O en A.

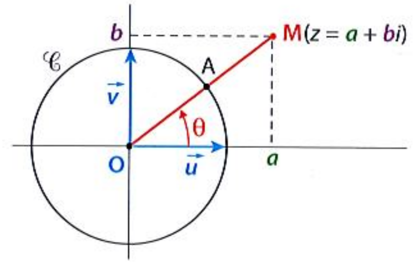
On note $(\vec{u}, \overrightarrow{OM}) = \theta$ et $OM = r$.

Le point A a pour coordonnées $(\cos(\theta)\,;\sin(\theta))$. De plus, $\overrightarrow{OM} = r\overrightarrow{OA}$ avec $r = OM = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Il en résulte que M a pour coordonnées $(r\cos(\theta)\,;r\sin(\theta))$.

Ainsi, le nombre complexe $z = a + bi$, affixe de M, s'écrit aussi :

$$z = r(\cos(\theta) + i\sin(\theta)).$$



5.2 Module et argument d'un nombre complexe non nul

Définition 3 z est un nombre complexe **non nul**, $z = a + bi$, $a \neq 0$ ou $b \neq 0$.

- **Un argument** de z, noté **arg(z)**, est une des mesures, exprimée en radian, de l'angle $(\vec{u}, \overrightarrow{OM})$.
- **Le module** de z, noté $|z|$, est la longueur OM ; ainsi : $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ et $|z|^2 = z\overline{z}$.

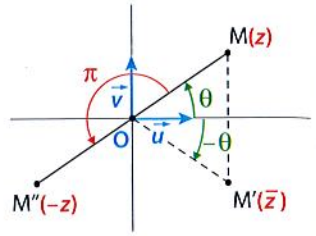
Si θ est un argument d'un nombre complexe z non nul, alors tout nombre de la forme $\theta + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, est un argument de z. Au lieu d'écrire $\arg(z) = \theta + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, on écrit :

$$\arg(z) = \theta \pmod{2\pi}.$$

mod 2π se lit « modulo 2π ».

Conséquences. Pour tout nombre complexe z non nul :

- $\arg(\bar{z}) = -\arg(z)$
- $\arg(-z) = \arg(z) + \pi$
- $|\bar{z}| = |z|$
- $|-z| = |z|$



5.3 Forme trigonométrique d'un nombre complexe non nul

Définition 4 Tout nombre complexe non nul s'écrit sous la forme suivante, dite **forme trigonométrique** :

$$z = r(\cos(\theta) + i\sin(\theta)) \text{ avec } r = |z| \text{ et } \theta = \arg(z) \pmod{2\pi}.$$

Égalité de deux nombres complexes écrits sous forme trigonométrique

Si $z = r(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$ et $z' = r'(\cos(\theta') + i\sin(\theta'))$:

« $z = z'$ » équivaut à « $r = r'$ et $\theta = \theta' \pmod{2\pi}$ ».

Lien entre forme algébrique et forme trigonométrique

- Si l'on connaît r et θ, alors $a = r\cos(\theta)$ et $b = r\sin(\theta)$.
- Si l'on connaît a et b, alors $r = \text{OM} = |z| = \sqrt{a^2+b^2}$ et θ est défini par :

$$\cos(\theta) = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \quad \text{et} \quad \sin(\theta) = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Exemples

- Si $z = 1 - i$; $r = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$; $\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$; $\sin\theta = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ d'où $\theta = -\frac{\pi}{4} \pmod{2\pi}$. Soit :

$$z = \sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right].$$

- Si $z = 2\left[\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right]$ alors $z = 2\left[-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right] = -1 + \sqrt{3}\,i$.

! Attention. Toute écriture de la forme $z = r(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$ n'est pas une forme trigonométrique.

Théorème 6 Si $z = r(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$ avec $r > 0$, alors $r(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$ est la forme trigonométrique de z ; $|z| = r$ et $\arg(z) = \theta \pmod{2\pi}$.

Démonstration. $|z|^2 = (r\cos(\theta))^2 + (r\sin(\theta))^2 = r^2$. Comme $|z|$ et r sont positifs, $|z| = r$.
Notons θ' un argument de z ; la forme $z = r(\cos(\theta') + i\sin(\theta'))$ implique $\cos(\theta) = \cos(\theta')$ et $\sin(\theta) = \sin(\theta')$, donc $\theta = \theta' \pmod{2\pi}$.
$|z| = r$ et $\theta = \theta' \pmod{2\pi}$, donc $r(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$ est une forme trigonométrique de z.

5.4 Interprétation géométrique du module et de l'argument

Théorème 7 Si A et B sont deux points d'affixes respectives z_A et z_B dans un repère orthonormé $(O ; \vec{u}, \vec{v})$, alors :

$$\text{AB} = |z_B - z_A|.$$

Démonstration. Il existe un unique point M tel que $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{AB}$.
Or, $\overrightarrow{OM}$ a pour affixe $z_M - 0 = z_M$ et $\overrightarrow{AB}$ a pour affixe $z_B - z_A$; donc $z_M = z_B - z_A$.
Il en résulte que $|z_M| = |z_B - z_A|$. Or par définition, $|z_M| = \text{OM}$ et $\text{OM} = \text{AB}$, donc $\text{AB} = |z_B - z_A|$.

Caractérisation d'un cercle et de la médiatrice d'un segment

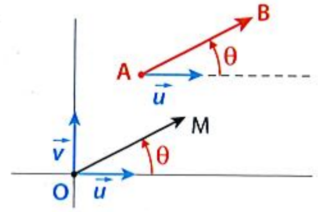
A et B sont deux points d'affixes z_A et z_B dans un repère orthonormé.

- M(z) appartient au **cercle de centre A et de rayon r** si, et seulement si, $\text{AM} = r$, ce qui se traduit par $|z - z_A| = r$.
- M(z) appartient à la **médiatrice du segment [AB]** si, et seulement si, $\text{AM} = \text{BM}$, ce qui se traduit par $|z - z_A| = |z - z_B|$.

Théorème 8 Si A et B sont deux points d'affixes respectives z_A et z_B dans un repère orthonormé direct $(O ; \vec{u}, \vec{v})$, tels que $A \neq B$, alors :

$$(\vec{u}, \overrightarrow{AB}) = \arg(z_B - z_A).$$

Démonstration. Il existe un unique point M tel que $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{AB}$.
Comme précédemment, $z_M = z_B - z_A$ et $(\vec{u}, \overrightarrow{OM}) = (\vec{u}, \overrightarrow{AB})$.
Or $(\vec{u}, \overrightarrow{OM}) = \arg(z_M)$.
On en déduit que $(\vec{u}, \overrightarrow{AB}) = \arg(z_M) = \arg(z_B - z_A) \pmod{2\pi}$.



6 Notation exponentielle de la forme trigonométrique

6.1 Cas d'un nombre complexe de module 1

Animation

Tout nombre complexe de module 1 s'écrit $z = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$ avec $\theta = \arg(z) \pmod{2\pi}$.
On note f la fonction qui à tout réel θ, associe le complexe $f(\theta) = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$. On se propose de démontrer que pour tous réels θ et θ', $f(\theta + \theta') = f(\theta) \times f(\theta')$ et $f(0) = 1$.

$$f(\theta) \times f(\theta') = [\cos(\theta) + i\sin(\theta)][\cos(\theta') + i\sin(\theta')]$$
$$= [\cos(\theta)\cos(\theta') - \sin(\theta)\sin(\theta')] + i[\cos(\theta)\sin(\theta') + \sin(\theta)\cos(\theta')]$$

soit : $f(\theta) \times f(\theta') = \cos(\theta + \theta') + i\sin(\theta + \theta') = f(\theta + \theta')$.
De plus, $f(0) = \cos(0) + i\sin(0) = 1$.
Ainsi, comme la fonction exponentielle, f « transforme les sommes en produits » et $f(0) = 1$.
D'où l'idée de poser $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$. L'égalité $f(\theta + \theta') = f(\theta) \times f(\theta')$ démontrée s'écrit alors $e^{i\theta} \times e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}$, ce qui justifie cette notation exponentielle.

Définition 5 Le complexe de module 1 dont un argument est θ est noté $e^{i\theta}$ avec :

$$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta).$$

Exemples. $e^{i\pi} = -1$; $e^{i\frac{\pi}{2}} = i$.

6.2 Notation exponentielle de la forme trigonométrique

Théorème 9 Tout nombre complexe z **non nul** de module r et d'argument θ s'écrit sous la forme suivante, dite **notation exponentielle :** $z = re^{i\theta}$ **avec** $r = |z|$ **et** $\theta = \arg(z) \pmod{2\pi}$.

Démonstration. z, non nul, a pour forme trigonométrique $z = r(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$ avec $r = |z|$.
Comme $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$, z s'écrit donc sous la forme $z = re^{i\theta}$.

Conséquences. Si $r > 0$ et $r' > 0$:

- $\overline{re^{i\theta}} = re^{-i\theta}$.
- « $re^{i\theta} = r'e^{i\theta'}$ » équivaut à « $r = r'$ et $\theta = \theta' \pmod{2\pi}$ ».

6.3 Module et argument d'un produit

z et z' sont deux nombres complexes non nuls tels que $z = re^{i\theta}$ et $z' = r'e^{i\theta'}$, avec $r > 0$ et $r' > 0$.
Alors : $zz' = re^{i\theta} \times r'e^{i\theta'} = r \times r' \times e^{i\theta} \times e^{i\theta'}$ soit $zz' = rr'e^{i(\theta+\theta')}$ (voir §6.1).

Théorème 10 Quels que soient les nombres complexes non nuls z et z' :

1. $|zz'| = |z| \times |z'|$ **2.** $\arg(zz') = \arg z + \arg z' \pmod{2\pi}$

La proposition 1 est vraie quels que soient z et z'.

Conséquence. On démontre par récurrence que pour tout entier naturel n non nul et tout nombre complexe z non nul :

- si $z = re^{i\theta}$, alors $z^n = r^n e^{in\theta}$;
- $|z^n| = |z|^n$ et $\arg(z^n) = n \arg(z) \pmod{2\pi}$.

D'où, en particulier, $[\cos(\theta) + i\sin(\theta)]^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$ pour tout entier naturel n non nul et tout nombre réel θ. Cette dernière égalité est la **formule de Moivre**.

6.4 Module et argument d'un quotient

z et z' sont deux nombres complexes non nuls tels que $z = re^{i\theta}$ et $z' = r'e^{i\theta'}$, avec $r > 0$ et $r' > 0$.
On pose $Z = \dfrac{z}{z'}$, soit $z = Zz'$. Alors $r = |Z| \times r'$ et $\arg(z) = \arg(Z) + \arg(z')$ soit $|Z| = \dfrac{r}{r'}$ et $\arg(Z) = \theta - \theta' \pmod{2\pi}$. Donc $\dfrac{z}{z'} = \dfrac{r}{r'}e^{i(\theta-\theta')}$.

Théorème 11 Quels que soient les nombres complexes non nuls z et z' :

1. $\left|\dfrac{z}{z'}\right| = \dfrac{|z|}{|z'|}$. **2.** $\arg\left(\dfrac{z}{z'}\right) = \arg z - \arg z' \pmod{2\pi}$.

Remarque. Ces égalités permettent de mémoriser les **formules trigonométriques d'addition et de duplication** vues en Première S. Par exemple, en identifiant parties réelles et parties imaginaires de $e^{ia}e^{ib}$ et $e^{i(a+b)}$, on retrouve les formules d'addition.

- $e^{ia}e^{ib} = (\cos(a) + i\sin(a))(\cos(b) + i\sin(b))$
$= [\cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)] + i[\cos(a)\sin(b) + \sin(a)\cos(b)]$
- $e^{i(a+b)} = \cos(a+b) + i\sin(a+b)$

D'où les formules donnant $\cos(a+b)$ et $\sin(a+b)$. → *exercice 88, page 255.*

Animation

OBJECTIF 1 Calculer dans $\mathbb{C}$

- Tout nombre complexe s'écrit de manière unique sous la forme $z = a + bi$ où a et b sont deux réels et i est le nombre complexe tel que $i^2 = -1$.
- $(a + bi) + (a' + b'i) = (a + a') + (b + b')i$.
- $(a + bi)(a' + b'i) = (aa' - bb') + (ab' + a'b)i$.
- $\bar{z} = a - bi$ est le conjugué de $z = a + bi$.
- $z\bar{z} = a^2 + b^2$.
- **Opérations sur les conjugués**

$\overline{z + z'} = \bar{z} + \overline{z'}$; $\overline{zz'} = \bar{z} \times \overline{z'}$; si $z' \neq 0$, $\overline{\left(\dfrac{z}{z'}\right)} = \dfrac{\bar{z}}{\overline{z'}}$; $z + \bar{z} = 2\,\mathrm{Re}(z)$; $z - \bar{z} = 2i\,\mathrm{Im}(z)$

- **Caractérisation d'un réel et d'un imaginaire pur**

« z réel » équivaut à « $z = \bar{z}$ ». « z imaginaire pur » équivaut à « $z + \bar{z} = 0$ ».

EXERCICE RÉSOLU A Utiliser les règles de calcul

On considère les nombres complexes $z_1 = 1 + i$ et $z_2 = 4 - 5i$.
Déterminez la forme algébrique de chacun des nombres complexes suivants.

a) $z_1 + z_2$. **b)** z_1z_2. **c)** $3z_1 + 4z_2$. **d)** z_1^3.

Méthode

a) Pour calculer la somme $z_1 + z_2$, on additionne les parties réelles entre elles et les parties imaginaires entre elles.

b) Pour calculer le produit $(a + ib)(a' + ib')$, on développe en utilisant $i^2 = -1$.

d) Pour calculer z_1^3, on utilise l'égalité suivante de $\mathbb{R}$, valable également dans $\mathbb{C}$:
$(x + y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$.

Solution

a) $z_1 + z_2 = 1 + i + 4 - 5i = 5 - 4i$.

b) $z_1z_2 = (1 + i)(4 - 5i) = 4 + 4i - 5i - 5i^2$.
Donc $z_1z_2 = 9 - i$.

c) $3z_1 + 4z_2 = 3(1+i) + 4(4-5i) = 3 + 3i + 16 - 20i$
$3z_1 + 4z_2 = 19 - 17i$.

d) $(1 + i)^3 = 1 + 3i + 3i^2 + i^3$.
Or, $i^2 = -1$, donc $i^3 = -i$. D'où :
$z_1^3 = 1 + 3i - 3 - i = -2 + 2i$.

Mise en pratique

1 On donne les nombres complexes :
$z_1 = -1 + 2i$ et $z_2 = 3 + 4i$.
Déterminez la forme algébrique de :
a) $z_1 + z_2$; **b)** $z_1 - z_2$; **c)** $z_1 - 3z_2$; **d)** z_1z_2.

2 Donnez la forme algébrique des nombres complexes suivants.
a) $(1 + i)^2$. **b)** $(1 - i)^2$. **c)** $(3 - i)^2$.

3 On pose $j = -\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.
1. Donnez la forme algébrique de j^2.
2. Vérifiez que $1 + j + j^2 = 0$.

4 Quels sont les entiers naturels n pour lesquels $(1 + i)^n$ est un réel ?

5 Donnez la forme algébrique des nombres complexes suivants.
a) $(2 + i)^2(1 - 3i)$.
b) $(5 - 2i)(1 + 4i)(2 - i)$.

6 x et y sont deux nombres réels. Quelle est la forme algébrique de $(x + 1 + iy)(x - 1 - iy)$?

7 On donne les nombres complexes :
$z_1 = 1 - 3i$, $z_2 = 4 + 2i$ et $z_3 = 5 - 2i$.
Calculez :
a) $\mathrm{Re}(z_1 + z_2 + z_3)$; **b)** $\mathrm{Im}(iz_1)$;
c) $\mathrm{Im}(z_1z_2)$; **d)** $\mathrm{Re}(2z_1 - 3z_2 + z_3)$.

EXERCICE RÉSOLU B Utiliser le conjugué

1. Écrivez $z = \dfrac{-2+3i}{4-5i}$ sous forme algébrique.

2. On pose $z = x + yi$.

Quelle relation doit lier x et y pour que le nombre $Z = (z + i)(1 - iz)$ soit réel ?

3. z est un nombre complexe. On pose $Z = z\bar{z} + iz - i\bar{z} + 2$.

Le nombre complexe Z est-il réel ?

Méthode

1. Pour trouver la forme algébrique d'un quotient de deux nombres complexes, on multiplie le numérateur et le dénominateur par le conjugué du dénominateur car $z\bar{z} = a^2 + b^2$ est toujours un nombre réel.

2. Z réel se traduit au moins de deux manières :

Z réel $\Leftrightarrow \operatorname{Im}(Z) = 0$ ou Z réel $\Leftrightarrow Z = \bar{Z}$.

3. On exploite les résultats suivants :

$z\bar{z}$ est un réel et $z - \bar{z} = 2i \operatorname{Im}(z)$.

Solution

1. Le conjugué de $4 - 5i$ est $4 + 5i$ et $(4-5i)(4+5i) = 16 + 25 = 41$.

$$z = \frac{(-2+3i)(4+5i)}{(4-5i)(4+5i)} = \frac{-8+12i-10i-15}{41}.$$

Ainsi, la forme algébrique de z est :

$$-\frac{23}{41} + \frac{2}{41}i.$$

2. Z est réel si et seulement si $\operatorname{Im}(Z) = 0$.

Cherchons la forme algébrique de Z.

$Z = [x + iy + i][1 - ix + y]$

$Z = [x + i(y+1)][1 - ix + y]$

$\quad = 2x(y+1) + i[(y+1)^2 - x^2]$.

Ainsi, Z est réel si, et seulement si, $(y+1)^2 - x^2 = 0$.

3. $Z = z\bar{z} + i(z - \bar{z}) + 2$.

Or, $z - \bar{z} = 2i \operatorname{Im}(z)$

donc $\quad Z = z\bar{z} + i(2i \operatorname{Im}(z)) + 2$

soit $\quad Z = z\bar{z} - 2\operatorname{Im}(z) + 2$.

$z\bar{z}$ et $\operatorname{Im}(z)$ sont des réels, donc Z est un réel.

Mise en pratique

8 Déterminez la forme algébrique de chacun des nombres complexes suivants.

a) $i(1-i)$. **b)** $(2-3i)(4+i)$. **c)** $\dfrac{3+2i}{4-i}$.

9 Écrivez sous forme algébrique :

a) $\dfrac{1}{2+3i}$. **b)** $\dfrac{2}{1+i} - \dfrac{3}{1-i}$. **c)** $\dfrac{2+3i}{5-2i}$.

10 z est un nombre complexe.

Précisez, dans chaque cas, si Z est réel ou imaginaire pur ou ni l'un ni l'autre.

a) $Z = z + \bar{z} - 3i$. **b)** $Z = z - \bar{z} + 5i$.

c) $Z = z\bar{z} - z + \bar{z}$. **d)** $Z = \bar{z}(z + i) + i(5i - z)$.

11 z est un nombre complexe.

Dans chacun des cas suivants, exprimez $\bar{Z}$ en fonction de $\bar{z}$.

a) $Z = -2 + iz$. **b)** $Z = (i + z)(2 - iz)$.

c) $Z = (2iz + 3)^2$. **d)** $Z = \dfrac{1+iz}{2z-i}$.

12 On note $z = x + yi$, x et y réels. On pose :

$$Z = \frac{z-1}{z+1} \text{ avec } z \neq -1.$$

Démontrez que Z a pour forme algébrique :

$$\frac{x^2+y^2-1}{(x+1)^2+y^2} + \frac{2y}{(x+1)^2+y^2}i.$$

13 On note :

$$z_1 = \frac{1+i}{2-i} \text{ et } z_2 = \frac{1-i}{2+1}.$$

Pourquoi peut-on affirmer sans calcul que $z_1 + z_2$ est un nombre réel ?

14 Résolvez chacune des équations suivantes.

a) $(3-2i)z = i - 2$.

b) $(2+i)\bar{z} = 3i$.

OBJECTIF 2 Résoudre des équations dans $\mathbb{C}$

- u et v sont deux nombres complexes donnés, $u \neq 0$; l'équation $uz + v = 0$ a pour solution $z = -\dfrac{v}{u}$.
- On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation $az^2 + bz + c = 0$ avec a, b, c réels, $a \neq 0$.

$\Delta = b^2 - 4ac$ est le discriminant de l'équation.

– Si $\Delta > 0$, alors l'équation a deux solutions réelles distinctes.

– Si $\Delta = 0$, alors l'équation a une solution double réelle.

– Si $\Delta < 0$, alors l'équation a deux solutions complexes conjuguées :

$$z_1 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}.$$

EXERCICE RÉSOLU C

Résolvez dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes en donnant les solutions sous forme algébrique.

a) $(2+i)z - 3 + i = 0$. **b)** $z = 2\bar{z} - 2 + 6i$. **c)** $z^2 - 8\sqrt{3}z + 64 = 0$.

Méthode

a) On applique la méthode de résolution d'une équation du premier degré.

b) Une méthode consiste à remplacer z par $x + yi$ et $\bar{z}$ par $x - yi$.

Les nombres complexes $z = a + bi$ et $z' = a' + b'i$ sont égaux si, et seulement si, $a = a'$ et $b = b'$.

- On conclut.

c) Il s'agit d'une équation du second degré à coefficients réels ($a = 1$, $b = -8\sqrt{3}$, $c = 64$).

On calcule Δ.

- On applique les formules :

$\Delta = -64$ donc $\sqrt{-\Delta} = \sqrt{64}$.

Solution

a) $(2+i)z - 3 + i = 0$ équivaut à $z = \dfrac{3-i}{2+i}$

soit $z = \dfrac{(3-i)(2-i)}{5} = \dfrac{5-5i}{5} = 1 - i$.

b) En posant $z = x + yi$, l'équation $z = 2\bar{z} - 2 + 6i$ équivaut à :

$$x + yi = 2(x - yi) - 2 + 6i$$

soit $-x + 3yi = -2 + 6i$.

Cette équation équivaut à :

$-x = -2$ et $3y = 6$ soit $x = 2$ et $y = 2$.

- La solution est donc $z = 2 + 2i$.

c) $\Delta = 3 \times 64 - 4 \times 64 = -64$.

$\Delta < 0$, donc l'équation a deux solutions complexes conjuguées :

- $z_1 = \dfrac{8\sqrt{3} - i\sqrt{64}}{2} = 4\sqrt{3} - 4i$ et

$z_2 = \bar{z_1} = 4\sqrt{3} + 4i$.

Mise en pratique

Pour les exercices 15 à 17

Résolvez dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes et donnez les solutions sous forme algébrique.

15 **a)** $3iz - 2 + 4i = (1-2i)z + 6$.

b) $(3+2i)z = 2i\bar{z} - 5i$.

16 **a)** $z^2 - (2+3i)^2 = 0$. **c)** $z^2 + 4 = 0$.

b) $iz^2 + (3-4i)z = 0$. **d)** $\dfrac{z+1}{z-1} = i$.

17 **a)** $z^2 - 2z + 4 = 0$. **b)** $z^2 - 8z + 25 = 0$.

c) $z^2 + 2\sqrt{3}z + 3 = 0$.

18 Au réel a on associe l'équation :

$$z^2 - 6z + a = 0.$$

1. Pour quelle valeur de a le nombre complexe $3 - i$ est-il solution de cette équation ?

2. Donnez alors l'autre solution.

19 On donne l'équation (E) :

$$z^3 - 12z^2 + 48z - 128 = 0.$$

1. Vérifiez que 8 est solution de (E).

2. a) Déterminez des réels a, b, c tels que pour tout z de $\mathbb{C}$,

$$z^3 - 12z^2 + 48z - 128 = (z-8)(az^2 + bz + c).$$

b) Résolvez dans $\mathbb{C}$ l'équation (E).

EXERCICES

OBJECTIF 3 Passer de la forme algébrique à la forme trigonométrique

- Tout nombre complexe non nul s'écrit sous la forme : $z = r(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$; θ est un argument de z et r est le module de z.
- Si $z = a + bi$ est la forme algébrique d'un complexe non nul, alors :
$$r = \sqrt{a^2+b^2},\ \cos(\theta) = \frac{a}{r} \text{ et } \sin(\theta) = \frac{b}{r}.$$
- Si $z = r(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$ avec $r > 0$, alors $|z| = r$ et $\arg(z) = \theta \pmod{2\pi}$.

EXERCICE RÉSOLU D Transformer des écritures

On pose $z_1 = \sqrt3 + i$ et $z_2 = 1 - i$.

1. Écrivez z_1 et z_2 sous forme trigonométrique.

2. Déterminez le module et un argument de $Z = -4[\cos(\theta) + i\sin(\theta)]$.

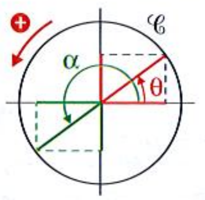
Méthode

1. On calcule le module $|z_1|$ puis on le met en facteur dans z_1.

- On en déduit les valeurs de $\cos(\theta)$ et $\sin(\theta)$ et on détermine θ.

- On procède de la même façon.

2. On cherche un angle α tel que :
$-\cos(\theta) - i\sin(\theta) = \cos(\alpha) + i\sin(\alpha)$.



On utilise le cercle trigonométrique :
$\alpha = \theta + \pi$.

Solution

1. $|z_1| = \sqrt{3+1} = 2$, $z_1 = 2\left(\frac{\sqrt3}{2} + \frac{i}{2}\right)$.

- Donc $\cos(\theta) = \frac{\sqrt3}{2}$ et $\sin(\theta) = \frac{1}{2}$.

Donc $\arg(z_1) = \frac{\pi}{6} \pmod{2\pi}$.

Ainsi, z_1 a pour forme trigonométrique :
$$2\left[\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right].$$

- $|z_2| = \sqrt{1+1} = \sqrt2$, $z_2 = \sqrt2\left(\frac{1}{\sqrt2} - \frac{i}{\sqrt2}\right)$.

Donc $\cos(\theta) = \frac{1}{\sqrt2}$ et $\sin(\theta) = -\frac{1}{\sqrt2}$.

Et $\arg(z_2) = -\frac{\pi}{4} \pmod{2\pi}$. Il en résulte que :
$$z_2 = \sqrt2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right].$$

2. $Z = 4[-\cos(\theta) - i\sin(\theta)]$
$Z = 4[\cos(\theta+\pi) + i\sin(\theta+\pi)]$.

Donc $|Z| = 4$ et $\arg(z) = \theta + \pi \pmod{2\pi}$.

Mise en pratique

20 Donnez une forme trigonométrique de chacun des nombres suivants.

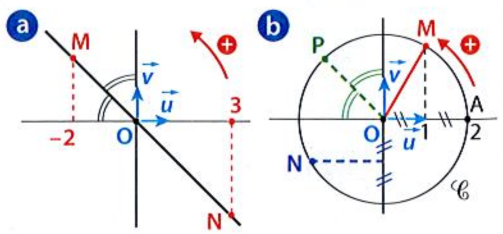
a) $z_1 = \sqrt3 - i\sqrt3$. **b)** $z_2 = 2i$. **c)** $z_3 = \frac{1}{1+i}$.

21 θ est un nombre réel.
Donnez une forme trigonométrique de chacun des nombres suivants.

a) $z_1 = -2[\cos(\theta) + i\sin(\theta)]$.

b) $z_2 = 3[\sin(\theta) + i\cos(\theta)]$.

22 Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O\,;\vec{u}, \vec{v})$. Donnez sous forme trigonométrique les affixes des points indiqués.



OBJECTIF 4 Utiliser la notation exponentielle

- Tout nombre complexe z **non nul** s'écrit sous la forme :
$$z = re^{i\theta} \quad \text{où} \quad r = |z| \quad \text{et} \quad \theta = \arg(z) \pmod{2\pi}.$$
- Si $z = re^{i\theta}$ et $z' = r'e^{i\theta'}$, $r > 0$ et $r' > 0$, alors $zz' = rr'e^{i(\theta+\theta')}$; $z^n = r^n e^{in\theta}$, $(n \in \mathbb{N})$; $\frac{z}{z'} = \frac{r}{r'}e^{i(\theta-\theta')}$.

EXERCICE RÉSOLU E Exploiter une transformation d'écriture

On donne $z_1 = -2\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$ et $z_2 = -1 + i$.

1. Donnez la forme algébrique de z_1 et de z_1z_2.

2. Écrivez z_1, z_2 et z_1z_2 sous forme exponentielle.

3. Déduisez-en la valeur exacte de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

Méthode

1. On remplace $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$ par leurs valeurs exactes.

2. Attention, $-2\left[\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right]$ n'est pas une forme trigonométrique car $-2 < 0$.
On utilise la notation exponentielle.

- On détermine le module et un argument de z_2.

- On calcule le produit z_1z_2 à partir des écritures exponentielles de z_1 et z_2.

3. On simplifie en prenant la mesure principale de l'argument.

- On dispose de deux expressions de z sous forme algébrique : on identifie les parties réelles et imaginaires.

- On conclut.

Solution

1. $z_1 = -2\left[\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt3}{2}\right] = -1 - i\sqrt3$.
$z_1z_2 = (-1 - i\sqrt3)(-1 + i) = (1+\sqrt3) + (\sqrt3 - 1)i$.

2. $-2 = 2e^{i\pi}$ et $\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3} = e^{i\frac{\pi}{3}}$;
donc $z_1 = 2e^{i\pi} \times e^{i\frac{\pi}{3}} = 2e^{i\frac{4\pi}{3}}$.

- $|z_2| = \sqrt2$, $\cos\theta = -\frac{1}{\sqrt2}$ et $\sin\theta = \frac{1}{\sqrt2}$.

Donc $\theta = \frac{3\pi}{4} \pmod{2\pi}$ et $z_2 = \sqrt2 e^{i\frac{3\pi}{4}}$.

- $z_1z_2 = 2e^{i\frac{4\pi}{3}} \times \sqrt2 e^{i\frac{3\pi}{4}} = 2\sqrt2 e^{i\frac{25\pi}{12}}$.

3. $\frac{25\pi}{12} = \frac{24\pi}{12} + \frac{\pi}{12} = 2\pi + \frac{\pi}{12}$ donc
$z_1z_2 = 2\sqrt2 e^{i\frac{\pi}{12}} = 2\sqrt2\left(\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right)$.

- Donc $z_1z_2 = 2\sqrt2\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + 2\sqrt2\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)i$
et $z_1z_2 = (1+\sqrt3) + (\sqrt3 - 1)i$.

- Il en résulte que :
$$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt3+1}{2\sqrt2} = \frac{\sqrt6+\sqrt2}{4}$$
et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt6-\sqrt2}{4}$.

Mise en pratique

23 Écrivez les nombres complexes suivants sous forme exponentielle.

a) $z_1 = 2\sqrt3 - 2i$. **b)** $z_2 = (2-2i)(3+i\sqrt3)$.

c) $z_3 = \frac{\sqrt3 - 3i}{1-i}$. **d)** $z_4 = -2i\left(\cos\frac{\pi}{5} + i\sin\frac{\pi}{5}\right)$.

24 Donnez le module et un argument de chacun des nombres suivants.

a) $\sqrt2 e^{i2\theta}$. **b)** $-e^{-i\theta}$. **c)** $-2ie^{i\theta}$.

25 On pose $z_1 = -3e^{-i\frac{\pi}{3}}$ et $z_2 = 2 - 2i$.

1. Donnez la forme algébrique de z_1 et de z_1z_2.

2. Écrivez z_1, z_2 et z_1z_2 sous forme exponentielle, puis sous forme trigonométrique.

3. Déduisez-en la valeur exacte de :
$$\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) \text{ et } \sin\left(\frac{5\pi}{12}\right).$$

EXERCICES

EXERCICES

OBJECTIF 5 Exploiter géométriquement l'affixe d'un vecteur

A et B sont deux points d'affixes respectives z_A et z_B.
- L'affixe du vecteur $\overrightarrow{AB}$ est $z_B - z_A$.
- $AB = |z_B - z_A|$; $(\vec{u}, \overrightarrow{AB}) = \arg(z_B - z_A) \pmod{2\pi}$.
- Le point M d'affixe z appartient au cercle de centre A et de rayon $r > 0$ si, et seulement si, $|z - z_A| = r$.
- Le point M d'affixe z appartient à la médiatrice du segment [AB] si, et seulement si, $|z - z_A| = |z - z_B|$.

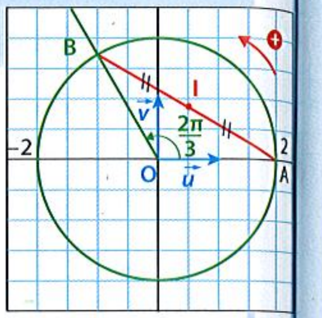
EXERCICE RÉSOLU F Étudier une configuration géométrique

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O ; \vec{u}, \vec{v})$.

1. Placez les points A et B d'affixes respectives $z_A = 2$ et $z_B = 2e^{i\frac{2\pi}{3}}$. Précisez la nature du triangle OAB.

2. Déterminez la forme exponentielle de l'affixe du milieu I du segment [AB].

3. E est le point d'affixe $z_E = -2 - 2\sqrt{3}\,i$. Les points O, I, E sont-ils alignés ?



Méthode

1. Pour placer B, on utilise le module et l'argument. En effet, si M a pour affixe $z = re^{i\theta}$, $r > 0$, alors $OM = r$ et $(\vec{u}, \overrightarrow{OM}) = \theta \pmod{2\pi}$.
Le point M est l'intersection d'un cercle et d'une demi-droite.

2. On utilise la formule $z_I = \dfrac{z_A + z_B}{2}$ qui donne l'affixe du milieu d'un segment.

3. Pour démontrer que trois points A, B, C sont alignés, une méthode consiste à prouver que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires soit $z_C - z_A = k(z_B - z_A)$ avec k réel.

Solution

1. $|z_B| = 2$ donc $OB = 2$.
$\arg(z_B) = \dfrac{2\pi}{3}$ donc $(\vec{u}, \overrightarrow{OB}) = \dfrac{2\pi}{3}$. D'où le placement de B.
$|z_A| = |z_B| = 2$ donc $OA = OB$:
le triangle OAB est isocèle en O.

2. Écrivons z_B sous forme algébrique.
$z_B = 2\left(\cos\dfrac{2\pi}{3} + i\sin\dfrac{2\pi}{3}\right) = -1 + i\sqrt{3}$.
Donc $z_I = \dfrac{2 - 1 + i\sqrt{3}}{2} = \dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2} = e^{i\frac{\pi}{3}}$.

3. Le vecteur $\overrightarrow{OE}$ a pour affixe $-2(1 + i\sqrt{3})$ et le vecteur $\overrightarrow{OI}$ a pour affixe $\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$
donc $\overrightarrow{OE} = -4\overrightarrow{OI}$.
Il en résulte que les points O, E, I sont alignés.

Mise en pratique

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O ; \vec{u}, \vec{v})$.

26 **1.** Placez les points A, B, C, D d'affixes respectives $-4 - 3i$, $3 - 2i$, $4 + 5i$, $-3 + 4i$.
2. Quelle est la nature du quadrilatère ABCD ?

27 **1.** Placez les points A, B et C d'affixes respectives $-3 - 2i$, $2 - i$ et $-2 + 6i$.
2. Démontrez que le triangle ABC est isocèle.

28 Les points A et B ont pour affixes respectives $a = 2$ et $b = 2e^{i\frac{3\pi}{4}}$.
I est le milieu du segment [AB].
1. Faites une figure.
2. a) Trouvez une mesure de l'angle $(\vec{u}, \overrightarrow{OI})$.
b) Déterminez la forme algébrique de l'affixe de I.
c) Déduisez-en que $OI = \sqrt{2 - \sqrt{2}}$.
3. a) Donnez l'affixe de I sous forme exponentielle.
b) Déduisez-en la valeur exacte de :
$$\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) \text{ et } \sin\left(\frac{\pi}{8}\right).$$

EXERCICES

Pour se tester

Exercices interactifs

29 Questions sur le cours

Complétez les propositions suivantes.
a) On pose $z = a + bi$, a et b réels.
Le conjugué de z est **...** et le module de z est **...** .
b) $z = \bar{z}$ si, et seulement si, **...** .
c) $z + \bar{z} = 0$ si, et seulement si, **...** .
d) $r(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$ est une forme trigonométrique d'un nombre complexe si r est **...** .
e) On pose $z = re^{i\theta}$, $r > 0$.
Le module de z est **...** et un argument de z est **...** .

30 Vrai ou faux

Vrai ou faux ? Justifiez votre réponse.
z et z' sont deux nombres complexes.
a) $|z + z'| = |z| + |z'|$.
b) Si $\arg(z) = \arg(z') \pmod{2\pi}$, alors $z = z'$.
c) Si z est un nombre réel non nul, alors :
$\arg(z) = 0 \pmod{2\pi}$ ou $\arg(z) = \pi \pmod{2\pi}$.
d) Si $|z + 2 - i| = 3$, alors M(z) appartient au cercle de centre A d'affixe $-2 + i$ et de rayon 3.

31 QCM Une seule réponse exacte

Pour chaque affirmation, une seule réponse est exacte. Identifiez-la en justifiant votre réponse.

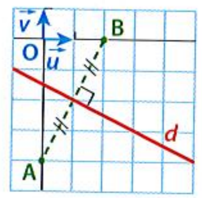
Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O ; \vec{u}, \vec{v})$.

1. z est un nombre complexe.
Le conjugué de $z + 3i + 2$ est :
a) $z + 3i + 2$ **b)** $\bar{z} - 3i + 2$ **c)** $z - 3i + 2$

2. Une forme trigonométrique de $-3\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}i\right)$ est :
a) $-3\left[\cos\left(\dfrac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\dfrac{\pi}{4}\right)\right]$
b) $3\left[\cos\left(\dfrac{5\pi}{4}\right) + i\sin\left(\dfrac{5\pi}{4}\right)\right]$
c) $3\left[\cos\left(-\dfrac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)\right]$

3. L'ensemble des points M dont l'affixe z vérifie l'égalité $|z - i| = |-1 - i|$:
a) est une droite **b)** est un cercle **c)** est un point

4. La droite d représentée ci-contre est l'ensemble des points M d'affixe z telle que :
a) $|z - 4i| = 2$
b) $|z + 4i| = |z - 2|$
c) $|z - 4i| = |z + 2|$

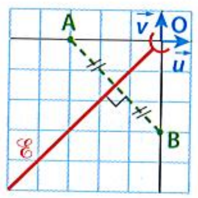


32 QCM Au moins une réponse exacte

Pour chaque affirmation, plusieurs réponses peuvent être exactes. Identifiez-les en justifiant vos réponses.

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O ; \vec{u}, \vec{v})$.

1. L'ensemble $\mathscr{E}$ (en rouge) est l'ensemble des points M d'affixe z telle que :
a) $|z + 3| = |z + 3i|$
b) $\arg(z) = \dfrac{5\pi}{4} \pmod{2\pi}$
c) $\arg(z) = -\dfrac{3\pi}{4} \pmod{2\pi}$



2. L'ensemble des points M d'affixe z telle que $|z| = 2$ et $\arg(z) = \dfrac{\pi}{6} + k\pi$ où k décrit $\mathbb{Z}$ est :
a) un cercle **b)** une demi-droite **c)** une paire de points

3. Les points A, B et C ont pour affixes respectives :
$a = 1 + i$, $b = 2 - \sqrt{3} + (2 + \sqrt{3})i$ et $c = 3\sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{4}}$.
a) Le triangle ABC est équilatéral.
b) Les points O, A, C sont alignés.
c) Le point d'affixe $4i$ est équidistant de A et C.

Corrigés sur www.transmathlycee.net/eleve-TermS

Apprendre à chercher

33 Recherche d'ensemble

u est un nombre complexe donné. Pour tout nombre complexe z, $z \neq 1$ et $z \neq i$, on pose :

$$Z_1 = \frac{u - \bar{u}z}{1 - \bar{z}} \quad \text{et} \quad Z_2 = \frac{z + i}{z - i}.$$

Objectif Déterminer l'ensemble des nombres complexes z tels que Z_1 est un réel et l'ensemble des nombres complexes z tels que Z_2 est imaginaire pur. Dans chaque cas, représenter cet ensemble.

1. Il s'agit d'un problème de détermination d'ensemble. Les propositions « Z est réel » et « Z est imaginaire pur » peuvent se traduire de trois façons chacune :

	Z est un réel		Z est un imaginaire pur
(1)	$\text{Im}(Z) = 0$	(1)	$\text{Re}(Z) = 0$
(2)	$Z = \bar{Z}$	(2)	$Z + \bar{Z} = 0$
(3)	$\arg(Z) = 0$ ou π, $Z \neq 0$	(3)	$\arg(Z) = -\frac{\pi}{2}$ ou $\frac{\pi}{2}$, $Z \neq 0$

La première façon exige le calcul de $\text{Im}(Z)$ ou de $\text{Re}(Z)$, en général à partir de l'écriture algébrique $z = x + yi$, x et y réels.

Choisir, parmi ces trois façons, la mieux adaptée est parfois délicat. La présence de u et de son conjugué $\bar{u}$ dans l'expression Z_1 incite à passer par « $Z = \bar{Z}$ » pour déterminer le premier ensemble.

a) Justifiez que $\overline{Z_1} = \dfrac{\bar{u} - uz}{1 - z}$.

b) Démontrez que :

$$Z_1 = \overline{Z_1} \text{ équivaut à } (u - \bar{u})(1 - |z|^2) = 0.$$

2. Le raisonnement s'articule alors ainsi : on note $\mathscr{E}$ l'ensemble recherché ; de ce qui précède, il résulte que :

« $z \in \mathscr{E}$ » équivaut à « $(u - \bar{u})(1 - |z|^2) = 0$ » **[1]**.

Il s'agit de tirer de **[1]** une condition sur z.

a) Démontrez que si $u - \bar{u} = 0$, alors $\mathscr{E}$ est l'ensemble $\mathbb{C}$ privé de 1.

b) Démontrez que si $u - \bar{u} \neq 0$, alors $\mathscr{E}$ est l'ensemble des nombres complexes de module 1, privé de 1.

c) Représentez l'ensemble $\mathscr{E}$ lorsque $u - \bar{u} \neq 0$.

3. Pour déterminer le deuxième ensemble, on peut hésiter entre la première et la deuxième façon. On propose de traiter les deux.

Avec (1)

On pose $z = x + yi$, avec x et y réels, et on exprime la forme algébrique de Z_2, $Z_2 = X + Yi$, en fonction de x et de y.

Pour le raisonnement, on note $\mathscr{F}$ l'ensemble des nombres complexes z tels que Z_2 est imaginaire pur.

a) Démontrez que $X = \dfrac{x^2 + y^2 - 1}{x^2 + (y-1)^2}$ et $Y = \dfrac{2x}{x^2 + (y-1)^2}$.

b) Démontrez que $\mathscr{F}$ est l'ensemble des nombres complexes z, $z \neq i$, $z = x + yi$, avec x et y réels, tels que :

$$x^2 + y^2 - 1 = 0.$$

c) Représentez cet ensemble.

4. Avec (2)

Pour utiliser la deuxième façon, on a besoin de l'expression de $\overline{Z_2}$.

a) Calculez $\overline{Z_2}$ en fonction du conjugué $\bar{z}$ de z.

b) Calculez $Z_2 + \overline{Z_2}$ en fonction de z et $\bar{z}$.

c) Démontrez que $\mathscr{F}$ est l'ensemble des nombres complexes z, $z \neq i$, dont le module est égal à 1.

d) Interprétez géométriquement cet ensemble.

34 Équation du troisième degré dans $\mathbb{C}$

On considère le polynôme du troisième degré :

$$P(z) = z^3 - (3 + 4i)z^2 - 6(3 - 2i)z + 72i.$$

Objectif Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$ **[1]**.

1. Pour résoudre une équation de deuxième degré à coefficients réels, on utilise la méthode générale à l'aide du discriminant Δ. On ne dispose pas d'une telle méthode pour les équations du troisième degré. En revanche, si l'on connaît une solution z_0 de $P(z)$, on peut chercher à mettre $z - z_0$ en facteur dans $P(z)$. Ainsi, l'équation **[1]** s'écrit sous la forme : $(z - z_0)(az^2 + bz + c) = 0$, où a, b, c sont des nombres complexes (ou réels).

a) Vérifiez que $z_0 = 4i$ est solution de l'équation $P(z) = 0$.

a) Développez l'expression $(z - z_0)(az^2 + bz + c)$.

2. Pour avoir l'égalité $P(z) = (z - z_0)(az^2 + bz + c)$ pour tout nombre complexe z, on admet qu'il suffit que les coefficients des termes de même degré de $P(z)$ et de la forme développée du polynôme $(z - z_0)(az^2 + bz + c)$ soient égaux.

a) Déterminez trois nombres a, b, et c tels que, pour tout z de $\mathbb{C}$, $P(z) = (z - z_0)(az^2 + bz + c)$.

b) Achevez la résolution de l'équation $P(z) = 0$.

3. Utilisez la même démarche pour résoudre l'équation :

$$3z^3 + (1 + 6i)z^2 + (16 + 2i)z + 32i = 0.$$

Narration de recherche

→ **L'objectif n'est pas seulement de résoudre le problème posé : vous devez aussi noter les différentes idées même lorsqu'elles n'ont pas permis de trouver la réponse. Expliquez pourquoi vous avez changé de méthode et ce qui vous a fait avancer, etc.**

35 Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$. a et b sont deux réels de l'intervalle $\left]0\,;\frac{\pi}{2}\right[$. Les points M et N ont respectivement pour affixes e^{ia} et e^{ib}.

Faites une figure et déterminez, en fonction de a et b, le module et un argument de $e^{ia} + e^{ib}$.

36 On pose $z = -\sin(2\theta) + 2i\cos^2(\theta)$ avec $\theta \in]-\pi\,;\pi[$.

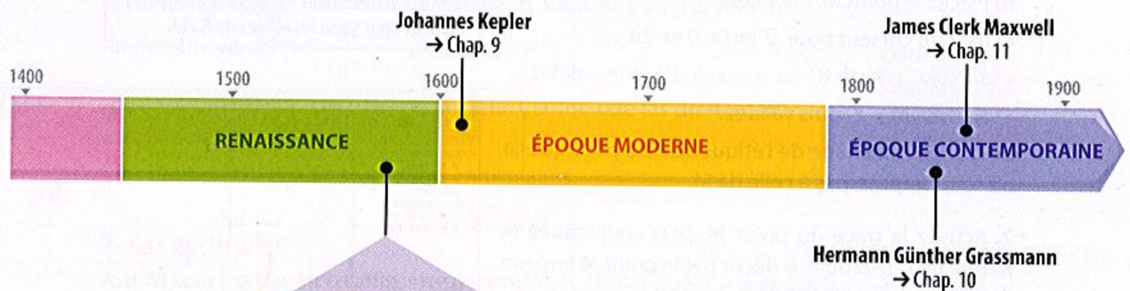
1. Suivant les valeurs de θ, trouvez le module et un argument de z.

2. Pour quelles valeurs de θ, z et $1 - z$ ont-ils le même module ?

Chercheurs d'hier

Eux aussi, ils ont cherché avant de trouver !

→ **Voici quelques mathématiciens importants qui ont travaillé dans le domaine de la Géométrie.**



Jérôme Cardan
(1501-1576)

Jérôme Cardan (ou Girolamo Cardano) eut une vie mouvementée, où il fut à la fois médecin, astrologue, ingénieur et mathématicien. Il inventa notamment un système pour transmettre la rotation d'un axe à un autre, qu'on appelle encore aujourd'hui un *cardan*.

Il publia, en 1545, *Ars Magna sive de regulis algebraicis* (*Grand art selon les règles algébriques*), où il étudiait notamment les équations du troisième degré. Cette publication suscita une violente controverse avec Nicolo Tartaglia, qui revendiquait la paternité de la méthode.

Pour trouver la solution de certaines équations du troisième degré, Cardan utilisait la racine carrée d'un nombre négatif. Mais il ne donna pas de statut à ces « nombres impossibles ». C'est Rafaelle Bombelli qui le fit en introduisant des nombres « imaginaires » dans son *Algèbre* publiée en 1572.

▲ Page de titre d'un des ouvrages de médecine de *Cardan* (1578).

Sur le Web serge.mehl.free.fr/chrono/Cardan.html
www.math93.com/Tartaglia-Cardan.html

Travaux dirigés

Utiliser GeoGebra
→ Pour étudier des ensembles

TP 37 Ensemble de points

COMPÉTENCES

TICE	Mathématiques
■ Utiliser un logiciel de géométrie dynamique.	■ Utiliser la notation exponentielle.
■ Utiliser un curseur.	■ Prouver l'alignement de trois points.
■ Tester des conjectures.	■ Démontrer une conjecture.

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$.

A est le point d'affixe 1 et B est le point d'affixe i ; θ est un réel de l'intervalle $[0\,;2\pi[$ et M le point d'affixe $z = e^{i\theta}$.

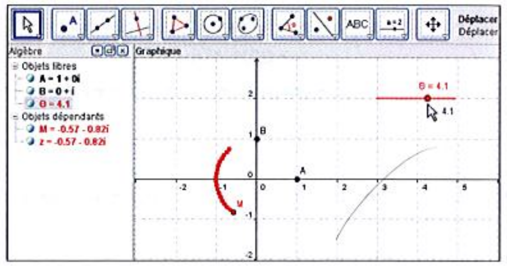
A Étude de l'ensemble des points tels que $z = e^{i\theta}$, $\theta \in [0\,;2\pi[$

1. a) Avec GeoGebra, placez les points A et B.

b) Placez le point M. Pour cela :
- créez un curseur pour θ entre 0 et 2π ;
- saisissez z=e∧(i∗θ) ou z=exp(i∗θ), puis validez ;
- saisissez M = z, puis validez.

Décochez l'affichage de l'étiquette de z pour qu'elle ne se superpose pas à celle de M.

Aide
GeoGebra « reconnaît » le nombre complexe i. On peut donc saisir les affixes de A et B.



2. Activez la trace du point M, puis conjecturez la nature de l'ensemble $\mathscr{C}$ décrit par le point M lorsque θ décrit l'intervalle $[0\,;2\pi[$.

3. Démontrez cette conjecture.

B D'autres études d'ensembles

1. P est le point d'affixe $1 + z$, où z est l'affixe du point M.

a) Placez le point P et affichez sa trace lorsque θ décrit l'intervalle $[0\,;2\pi[$.

b) Que peut-on conjecturer sur l'ensemble $\mathscr{C}'$ décrit par le point P lorsque θ décrit l'intervalle $[0\,;2\pi[$?

c) Démontrez cette conjecture.

Aide
Saisissez P = (1 + z).

2. M′ est le point d'affixe $z' = re^{i\theta}$, où r est un nombre réel strictement positif.

a) Après avoir créé un deuxième curseur pour $r > 0$, placez M′.

Affichez simultanément les traces de M et M′ lorsque θ décrit l'intervalle $[0\,;2\pi[$.

Recommencez en faisant cette fois varier r.

b) Qu'observez-vous ? Expliquez vos observations.

3. S est le point d'affixe $1 + z + z^2$, où z est l'affixe de M.

a) Placez le point S et affichez sa trace lorsque θ décrit l'intervalle $[0\,;2\pi[$.

b) Conjecturez la position relative des points O, M et S. (O est l'origine du repère.)

c) Démontrez que pour tout réel θ de l'intervalle $[0\,;2\pi[$, le nombre complexe $\dfrac{1+z+z^2}{z}$ est réel.

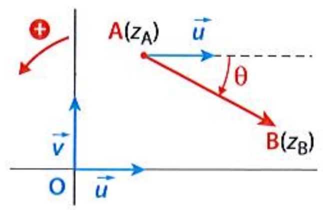
d) Démontrez la conjecture émise dans la question **3. b)**.

Approfondissement AP
Prolongements possibles
→ exercices 102, 122 et 123

38 Utiliser l'affixe d'un vecteur

On place dans un repère orthonormé direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$.

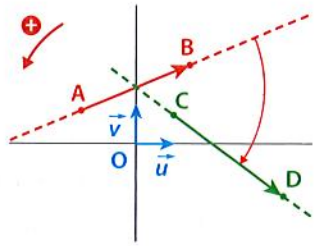
On rappelle que si $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur, alors :
- $AB = |z_B - z_A|$ (théorème 7) ;
- si $\overrightarrow{AB} \neq \vec{0}$, alors $(\vec{u},\overrightarrow{AB}) = \arg(z_B - z_A)$ (théorème 8).



A Quelques résultats

1. Angle de deux vecteurs

A, B, C, D sont quatre points d'affixes respectives z_A, z_B, z_C, z_D telles que $z_A \neq z_B$ et $z_C \neq z_D$.



a) Prouvez que $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}) = (\vec{u},\overrightarrow{CD}) - (\vec{u},\overrightarrow{AB})$.

b) Déduisez-en que $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}) = \arg(z_D - z_C) - \arg(z_B - z_A)$

puis que $$(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}) = \arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right)$$

c) Déduisez-en une condition nécessaire et suffisante sur l'argument du nombre complexe $\dfrac{z_D - z_C}{z_B - z_A}$ pour que :
- le vecteur $\overrightarrow{AB}$ soit colinéaire au vecteur $\overrightarrow{CD}$ (ou que les droites (AB) et (CD) soient parallèles) ;
- les droites (AB) et (CD) soient perpendiculaires.

LOGIQUE
Condition nécessaire et suffisante
→ p. 464

2. Cas particulier

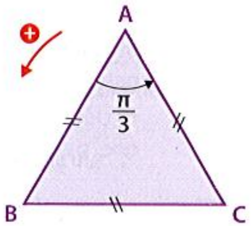
A, B, M sont trois points d'affixes respectives a, b, z telles que $z \neq a$ et $z \neq b$.

Démontrez que $(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}) = \arg\left(\dfrac{z-b}{z-a}\right)$ et $\left|\dfrac{z-b}{z-a}\right| = \dfrac{MB}{MA}$.

3. Caractérisation de certains triangles

A, B, C sont trois points distincts deux à deux, d'affixes respectives z_A, z_B, z_C.

Démontrez les équivalences suivantes.



a) « ABC est **rectangle** en A » équivaut à « $\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ est imaginaire pur ».

b) « ABC est un triangle **équilatéral direct** » équivaut à « $\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = e^{i\frac{\pi}{3}}$ ».

B Applications

1. On désigne par A, B, I les points d'affixes respectives $z_A = 3 + 2i$, $z_B = -3$ et $z_I = 1 - 2i$.

a) Écrivez sous forme algébrique $Z = \dfrac{z_B - z_I}{z_A - z_I}$.

b) Déduisez-en que le triangle IAB est rectangle isocèle.

2. On désigne par A, B, C les points d'affixes respectives $z_A = -2i$, $z_B = -\sqrt{3} + i$, $z_C = \sqrt{3} + i$.

a) Écrivez sous forme algébrique $\dfrac{z_B - z_A}{z_C - z_A}$.

b) Déduisez-en la nature du triangle ABC.

Des Mathématiques aux Sciences de l'ingénieur

39 Analyse fréquentielle des signaux

- Un signal périodique de période T est tel que : pour tout réel t, $u(t+\mathrm{T}) = u(t)$.
- La fréquence du signal est $\omega = \dfrac{1}{\mathrm{T}}$, exprimée en hertz.
- La **valeur moyenne** d'un signal est donnée par la formule :

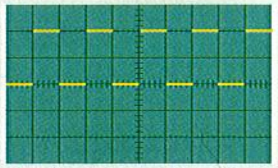
$$\mathrm{U}_{\text{moy}} = \frac{1}{\mathrm{T}}\int_0^{\mathrm{T}} u(t)\,\mathrm{d}t.$$

- Le mathématicien français Joseph Fourier (1768-1830) a montré qu'un signal périodique quelconque, sous certaines conditions, peut se construire mathématiquement comme somme de sa valeur moyenne et d'une somme finie ou infinie de fonctions sinusoïdales de périodes multiples de T :

Plus N est grand, plus on se rapproche du signal exact $u(t)$.

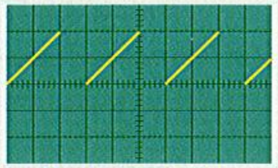
$$u_{\mathrm{N}}(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\mathrm{N}} a_n \cos(\omega n t) + b_n \sin(\omega n t), \text{ où } a_0 = \mathrm{U}_{\text{moy}}.$$

Exemples de signaux 2π-périodiques



① Signal rectangulaire

$$u(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } -\dfrac{\pi}{2} \leqslant t < \dfrac{\pi}{2} \\ 0 & \text{si } \dfrac{\pi}{2} \leqslant t < \dfrac{3\pi}{2} \end{cases}$$



② Signal en dents de scie

$u(t) = t$ si $t \in [0\,;2\pi[$

A Calcul des coefficients a_n et b_n

1. Démontrez que pour tout réel x,

$$\cos(x) = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2} \quad \text{et} \quad \sin(x) = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}.$$

2. ω désigne un nombre réel et n un entier naturel tel que $n \geqslant 1$.

a) Exprimez $\cos(\omega n t)$ et $\sin(\omega n t)$ en fonction de $e^{i\omega n t}$ et $e^{-i\omega n t}$.

b) Déduisez-en que $a_n \cos(\omega n t) + b_n \sin(\omega n t) = \dfrac{a_n - ib_n}{2}e^{i\omega n t} + \dfrac{a_n + ib_n}{2}e^{-i\omega n t}$.

3. On pose $c_0 = a_0 = \mathrm{U}_{\text{moy}}$ et pour tout entier $n \geqslant 1$, $c_n = \dfrac{a_n - ib_n}{2}$ et $c_{-n} = \dfrac{a_n + ib_n}{2}$.

Démontrez que $u_{\mathrm{N}}(t) = \displaystyle\sum_{n=-\mathrm{N}}^{n=\mathrm{N}} c_n e^{i\omega n t}$.

B Signal rectangulaire exemple ①

Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on donne :

$$c_n = \frac{1}{n\pi}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right).$$

a) Justifiez que $a_0 = \dfrac{1}{2}$ et que, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $b_n = 0$.

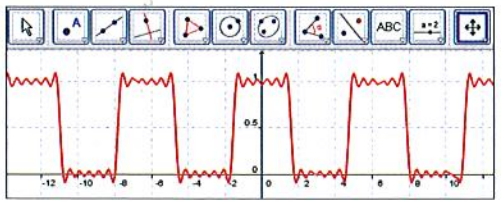
b) Démontrez que, si n est pair, alors $a_n = 0$, et que, si n est impair, $n = 2p+1$ ($p \in \mathbb{N}$) alors :

$$a_n = a_{2p+1} = \frac{2(-1)^p}{\pi(2p+1)}.$$

c) Déduisez-en que :

$$u_5(t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\cos(t) - \frac{2}{3\pi}\cos(3t) + \frac{2}{5\pi}\cos(5t).$$

d) À l'aide de GeoGebra, tracez l'allure de u_{11}. Que constatez-vous ?



C Signal en « dents de scie » exemple ②

Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on donne :

$$c_n = \frac{1}{n}i.$$

a) Justifiez que $a_0 = \pi$ et que, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $a_n = 0$.

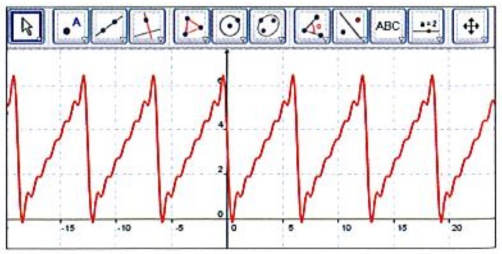
b) Démontrez que, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$,

$$b_n = -\frac{2}{n}.$$

c) Déduisez-en que :

$$u_4(t) = \pi - 2\left[\sin(t) + \frac{1}{2}\sin(2t) + \frac{1}{3}\sin(3t) + \frac{1}{4}\sin(4t)\right].$$

d) À l'aide de GeoGebra, tracez l'allure de u_7. Que constatez-vous ?



DE TÊTE

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(\mathrm{O}\,;\vec{u},\vec{v})$.

40 On pose $z_1 = 2+4i$ et $z_2 = 3-2i$.
Donnez la forme algébrique des nombres :
- $z_1 + z_2$ • $z_1 - z_2$ • $3z_1$

41 Déterminez la forme algébrique de chacun des nombres suivants.
a) $(2i)^2$; $(-i\sqrt{3})^2$; $(1+i)^2$.
b) $2i(3+5i)$ et $2(3-i)+4(i+2)$.

42 Quelle est la partie réelle de $(2+3i)(5+4i)$?

43 Quel est le conjugué de $i - \sqrt{2}$?

44 Donnez le module des nombres suivants.
a) $1+i$. **b)** $2i$. **c)** $-2+i$. **d)** $2+3i$.

45 Donnez un argument de chacun des nombres suivants.
a) -3. **b)** i. **c)** $-i$. **d)** $(-i\sqrt{2})^4$.

46 Sachant que $\dfrac{\pi}{5}$ est un argument de z, donnez un argument de chacun des nombres suivants.
a) $3z$. **b)** $-z$. **c)** $\bar{z}$. **d)** $\dfrac{1}{z}$.

47 Donnez la forme algébrique de chacun des nombres suivants.
a) $2e^{i\pi}$. **b)** $3e^{i\frac{\pi}{2}}$. **c)** $e^{i\frac{\pi}{4}}$.

48 Résolvez dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 = -4$.

49 Donnez la notation exponentielle de $-2e^{i\frac{\pi}{5}}$.

L'ENSEMBLE DES NOMBRES COMPLEXES

Pour les exercices 50 à 54
Donnez la forme algébrique des nombres complexes proposés.

50 $z_1 = (3+i)(4-2i)$; $z_2 = (3-i)^2$;
$z_3 = (2+i\sqrt{3})(2-i\sqrt{3})$.

51 $z_1 = (1+i)(4-3i)(1-i)$; $z_2 = (3+i)^2(3-2i)$.

52 $z_1 = \dfrac{2}{1+i}$; $z_2 = \dfrac{1}{3-i\sqrt{2}}$; $z_3 = \dfrac{1}{i\sqrt{2}-3}$.

53 $z_1 = \dfrac{2-5i}{3+2i}$; $z_2 = \dfrac{6+3i}{1-2i}$; $z_3 = \dfrac{3i}{3+4i}$.

54 $z_1 = \dfrac{2}{1-2i} + \dfrac{3}{2+i}$; $z_2 = 2i - \dfrac{3}{2-i}$.

55 Pour tout nombre complexe z, on pose $f(z) = z^2 - z$ avec $z = x + yi$, x et y réels.
Démontrez que $f(z)$ a pour partie réelle $x^2 - y^2 - x$ et pour partie imaginaire $y(2x-1)$.

56 Résolvez dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes d'inconnue z. (Donnez les solutions sous forme algébrique.)
a) $iz = 3+i$.
b) $(2-i)z - 2i = iz + 2 - 3i$.
c) $(2iz+i)(4z-8-4i) = 0$.
d) $\dfrac{z-2i}{z+2} = 4i$.

57 Résolvez dans $\mathbb{C}$ les systèmes suivants.
a) $\begin{cases} 3z + z' = 2-5i \\ z - z' = -2+i \end{cases}$. **b)** $\begin{cases} 3z + z' = 5+2i \\ -z + z' = 1-2i \end{cases}$.

CONJUGUÉ D'UN COMPLEXE

58 Donnez une forme algébrique du conjugué $\bar{z}$ du complexe z dans chacun des cas suivants.
a) $z = 2+5i$. **b)** $\dfrac{1}{i+2}$. **c)** $z = \dfrac{2-i}{2i+1}$.
d) $z = (3-2i)(i+1)$. **e)** $z = \dfrac{i(3-2i)}{2i+1}$.

59 On note $z_1 = \dfrac{2i+1}{i+2}$ et $z_2 = \dfrac{1-2i}{2-i}$.
1. Pourquoi peut-on affirmer sans calcul que $z_1 + z_2$ est réel et $z_1 - z_2$ imaginaire pur ?
2. Retrouvez ces résultats par le calcul.

60 Écrivez en fonction de $\bar{z}$ le conjugué du nombre complexe Z dans chacun des cas suivants.
a) $\mathrm{Z} = -2i + 3z$. **b)** $\mathrm{Z} = 3 + i - 2iz$.
c) $\mathrm{Z} = (2-iz)(2z-4+3i)$. **d)** $\mathrm{Z} = \dfrac{2i+1-iz}{5i+2z}$.

61 Résolvez dans $\mathbb{C}$ les équations d'inconnue z.
a) $4\bar{z} + 2i - 4 = 0$. **b)** $(iz-2+i)(2i\bar{z}+i-2) = 0$.
c) $2z + i\bar{z} = 4$. **d)** $2iz - \bar{z} = 4i$.

62 Résolvez dans $\mathbb{C}$ les équations d'inconnue z.
a) $\dfrac{\bar{z}+i}{\bar{z}-i} = 1$. **b)** $\dfrac{2}{\bar{z}+i} + \dfrac{2}{\bar{z}-i} = 4$.

ÉQUATION DU SECOND DEGRÉ À COEFFICIENTS RÉELS

63 Résolvez dans $\mathbb{C}$ chacune des équations suivantes d'inconnue z.

a) $2z^2-6z+5=0$. **b)** $z^2-5z+9=0$.

c) $z^2+z+1=0$. **d)** $z^2-2z+3=0$.

e) $z^2=z+1$. **f)** $z^2+3=0$.

g) $z^2-(1+\sqrt{3})z+\sqrt{3}=0$. **h)** $z^2+2\sqrt{2}z+4=0$.

i) $(z^2+2)(z^2-4z+4)=0$. **j)** $\dfrac{z-3}{z-2}=z$.

k) $z^2-2(1+\sqrt{2})z+2(\sqrt{2}+2)=0$.

64 θ est un réel de l'intervalle $[0\,;2\pi[$.

1. Résolvez dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2-2(\sin(\theta))z+1=0$.

2. Donnez les solutions sous forme exponentielle.

65 θ est un réel de l'intervalle $[0\,;2\pi[$.
Résolvez dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes.

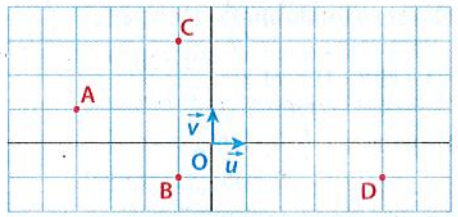
a) $z^2-2(1+2\cos\theta)z+5+4\cos\theta=0$.

b) $z^2-2(1+\cos\theta)z+2(1+\cos\theta)=0$.

AFFIXE D'UN POINT, AFFIXE D'UN VECTEUR

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(O\,;\vec{u},\vec{v})$.

66 **1.** Par lecture graphique, déterminez les affixes des points A, B, C et D puis celles des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$.



2. Que peut-on dire des droites (AB) et (CD) ? Justifiez.

67 **1.** Placez les points A, B et C d'affixes respectives $a=1+2i$, $b=-3-i$ et $c=3-2i$.

2. Déterminez l'affixe du point D tel que le quadrilatère ABCD soit un parallélogramme.

68 **1.** Calculez $(1+i)^2$, $(1+i)^4$ et $(1+i)^8$.

2. M_n est le point d'affixe $(1+i)^n$, $n\in\mathbb{N}$. Pour quelles valeurs de n, le point M_n appartient-il à l'axe des abscisses ?

69 Dans chacun des cas suivants, représentez l'ensemble des points M dont l'affixe z vérifie l'égalité proposée.

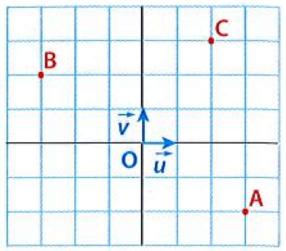
a) $\mathrm{Re}(z)=-2$. **b)** $\mathrm{Im}(z)=3$.

FORME TRIGONOMÉTRIQUE ET NOTATION EXPONENTIELLE

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$.

70 **1.** Calculez le module des affixes respectives a, b et c des points A, B et C représentés ci-contre.

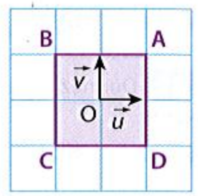
2. Déduisez-en que les points A, B et C appartiennent à un même cercle de centre O.



71 Calculez le module de chacun des nombres complexes suivants.

- $z_1=-3+4i$
- $z_2=\sqrt{6}-i\sqrt{2}$
- $z_3=(\sqrt{6}-i\sqrt{2})^2$
- $z_4=(-3+4i)(\sqrt{6}-i\sqrt{2})$
- $z_5=\dfrac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{-3+4i}$

72 Donnez l'affixe de chaque sommet du carré représenté ci-contre, puis un argument de chacune de ces affixes.

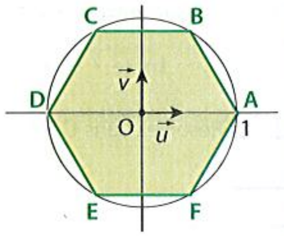


73 **1.** Représentez les points A, B, C, D, E, F et G d'affixes respectives $1+i$, $-1-i$, 5, -3, $2i$, $3-3i$, $-5i$ et $4+4i$.

2. Donnez, sans calcul, par des considérations géométriques un argument de chacun de ces nombres.

74 L'hexagone régulier ABCDEF est de centre O.

Donnez l'affixe de chacun des sommets de l'hexagone, puis un argument de chacune de ces affixes.



75 Dans chacun des cas suivants, repésentez l'ensemble des points M dont l'affixe z vérifie l'égalité donnée.

a) $\arg(z)=\dfrac{\pi}{3}\ (\mathrm{mod}\ 2\pi)$. **b)** $\arg(z)=-\dfrac{\pi}{6}\ (\mathrm{mod}\ 2\pi)$.

c) $\arg(iz)=\dfrac{5\pi}{4}\ (\mathrm{mod}\ \pi)$. **d)** $\arg\left(\dfrac{z}{1+i}\right)=\dfrac{\pi}{4}\ (\mathrm{mod}\ \pi)$.

76 Déterminez, dans chaque cas, un argument dans $]-\pi\,;\pi]$ de z.

a) $z=(2-2i)(1+i)$. **b)** $z=2i(\sqrt{2}+i\sqrt{6})$.

c) $z=-3i(1+i)$. **d)** $z=(\sqrt{3}+i)^3$.

77 Déterminez, dans chaque cas, une forme trigonométrique de z.

a) $z=3+3i\sqrt{3}$. **b)** $z=2-2i\sqrt{3}$.

c) $z=-\sqrt{2}+i\sqrt{2}$. **d)** $z=2-2i$.

e) $z=-3i$. **f)** $z=-5$.

g) $z=-\dfrac{2}{5}+\dfrac{2i\sqrt{3}}{5}$. **h)** $z=\dfrac{3}{1-i}$.

i) $z=(1-i\sqrt{3})(1+i)$. **j)** $z=\dfrac{1+i\sqrt{3}}{2-2i}$.

78 Donnez une forme trigonométrique de chacun des nombres complexes suivants.

a) $z_1=\cos\left(\dfrac{\pi}{6}\right)-i\sin\left(\dfrac{\pi}{6}\right)$. **b)** $z_2=-\cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$.

c) $z_3=-\cos\left(\dfrac{\pi}{5}\right)-i\sin\left(\dfrac{\pi}{5}\right)$.

d) $z_4=-7\left[\cos\left(\dfrac{2\pi}{7}\right)+i\sin\left(\dfrac{2\pi}{7}\right)\right]$.

e) $z_5=\sin\left(\dfrac{\pi}{9}\right)+i\cos\left(\dfrac{\pi}{9}\right)$.

79 Écrivez sous forme trigonométrique chacun des nombre complexes suivants.

a) $z_1=\left[\cos\left(\dfrac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\dfrac{\pi}{4}\right)\right]^{10}$.

b) $z_2=(\sqrt{2}-i\sqrt{2})\left(-\cos\left(\dfrac{\pi}{7}\right)+i\sin\left(\dfrac{\pi}{7}\right)\right)$.

c) $z_3=(1+i)^{2012}(1-i)^{2013}$.

80 **BAC** On donne les nombres complexes :

$$z_1=\frac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2}\quad\text{et}\quad z_2=1-i.$$

1. Donnez une forme trigonométrique de :

$$z_1,\ z_2\quad\text{et}\quad\frac{z_1}{z_2}.$$

2. Donnez une forme algébrique de $\dfrac{z_1}{z_2}$.

3. Déduisez-en que :

$$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\quad\text{et}\quad\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}.$$

81 On considère le nombre complexe :

$$z=(\sqrt{3}+1)+(\sqrt{3}-1)i.$$

1. Écrivez z^2 sous forme algébrique.

2. Déterminez le module et un argument de z^2.

3. À l'aide des propriétés du module et des arguments, donnez le module et un argument de z.

4. Déduisez-en la valeur exacte de :

$$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)\text{ et }\sin\left(\frac{\pi}{12}\right).$$

82 **LOGIQUE** **Implication**

Pour chacune des implications suivantes :

a) Dites si elle est vraie.

b) Formulez l'implication réciproque.

c) Dites si cette implication réciproque est vraie.

Toutes les réponses doivent être justifiées.

1. Si $|z|=1$, alors $\bar{z}=\dfrac{1}{z}$.

2. Si $z=z'$ ou $z=-z'$, alors $|z|=|z'|$.

3. Si $\dfrac{z}{\bar{z}}$ est réel, alors z est réel ou z est imaginaire pur.

83 Donnez une forme exponentielle de chacun des nombres complexes suivants.

- $z_1=-2ie^{i\frac{\pi}{3}}$
- $z_2=(1-i)e^{i\frac{\pi}{6}}$
- $z_3=-\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{5}}$
- $z_4=\dfrac{3}{e^{i\frac{\pi}{7}}}$
- $z_5=\dfrac{-2}{3e^{i\frac{\pi}{5}}}$
- $z_6=\dfrac{3i}{e^{i\frac{2\pi}{5}}}$

84 On pose $z_1=e^{i\frac{\pi}{3}}$, $z_2=3e^{-i\frac{\pi}{4}}$ et $z_3=\sqrt{2}e^{i\frac{2\pi}{3}}$.

Trouvez une forme exponentielle de chacun des nombres suivants.

- z_1z_2
- $\dfrac{z_1}{z_2}$
- z_1^3
- $z_1z_2z_3$
- z_3^4
- $\dfrac{z_2}{z_3}$

85 On pose $z_1=-1-i$ et $z_2=\dfrac{1}{2}+\dfrac{i\sqrt{3}}{2}$.

1. Écrivez $\dfrac{z_1}{z_2}$ sous forme algébrique, puis sous forme exponentielle.

2. Déduisez-en le module et un argument de $\dfrac{z_1}{z_2}$, puis la valeur exacte de $\cos\dfrac{11\pi}{12}$ et $\sin\dfrac{11\pi}{12}$.

86 **BAC** Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$ (unité graphique 4 cm). On note A, B, C, D les points d'affixes respectives :

$$a=1,\quad b=e^{i\frac{\pi}{3}},\quad c=\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i,\quad d=\frac{\sqrt{3}}{2}e^{-i\frac{\pi}{6}}.$$

1. Écrivez c sous forme exponentielle et d sous forme algébrique.

2. a) Placez les points A, B, C, D dans le repère.

b) Démontrez que le quadrilatère OACB est un losange.

87 Dans chacun des cas suivants, écrivez z sous forme exponentielle et déduisez-en la forme algébrique de $\bar{z}$ et celle de $\dfrac{1}{z}$.

a) $z=\dfrac{6}{1+i}$. **b)** $z=(1+i\sqrt{3})^4$.

c) $z=3ie^{i\frac{\pi}{3}}$. **d)** $z=-12e^{i\frac{\pi}{4}}$.

88 À l'aide de la notation exponentielle, retrouvez les formules trigonométriques donnant :

- $\cos(a+b)$ et $\sin(a+b)$;
- $\cos(a-b)$ et $\sin(a-b)$;
- $\cos(2a)$ et $\sin(2a)$.

NOMBRES COMPLEXES ET GÉOMÉTRIE

Pour les exercices de cette rubrique, le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$.

89 **1.** Placez les points A, B, C d'affixes respectives :

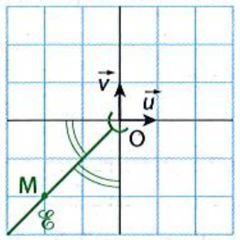
$$z_A = -\frac{1}{3} - 2i,\quad z_B = 1 + 2i,\quad z_C = \frac{7}{3} + 6i.$$

2. Les points A, B, C sont-ils alignés ?

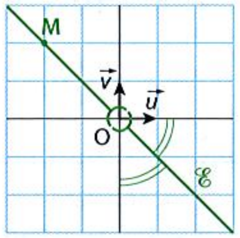
90 Dans chacun des cas suivants, on a représenté un ensemble $\mathscr{E}$ de points M du plan dont l'affixe a pour module r et pour argument θ.

Caractérisez à l'aide de r ou de θ, ou des deux, cet ensemble $\mathscr{E}$.

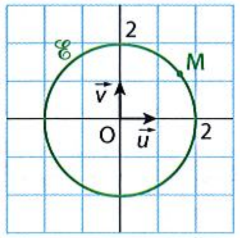
a)



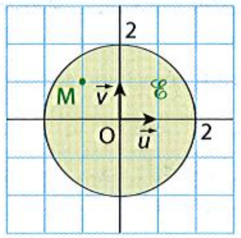
b)



c)



d)



91 **1.** Placez les points A, B, C et D d'affixes respectives :

$z_A = 1{,}5i$, $z_B = 3{,}5 + i$, $z_C = 1 - 1{,}5i$ et $z_D = -2{,}5 - i$.

2. Quelle est la nature du quadrilatère ABCD ? Justifiez.

92 On donne dans le plan complexe les points A, B et C d'affixes respectives :

$$z_A = -2,\quad z_B = 1 + i \quad\text{et}\quad z_C = -1 - 3i.$$

1. Placez les points A, B et C.

2. Quelle est la nature du triangle ABC ? Justifiez.

93 Soit Γ l'ensemble des points M du plan complexe dont l'affixe z vérifie : $|z-(2-i)| = \sqrt{2}$.

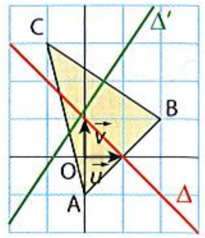
1. On note A le point d'affixe $2 - i$.

a) Démontrez que : $M \in \Gamma$ si, et seulement si, $AM = \sqrt{2}$.

b) Déduisez-en l'ensemble Γ. Représentez Γ.

2. Déterminez d'une autre façon l'ensemble Γ en utilisant la forme algébrique de $z = x + yi$, où x et y sont réels.

94 Sur la figure ci-contre, on a placé les points A, B, C d'affixes respectives $-i$, $2+i$, $-1+3i$, et les droites médiatrices Δ et Δ' des segments [AB] et [BC] respectivement.



1. Prouvez que :

$M(z) \in \Delta \Leftrightarrow |z-(-i)| = |z-2-i|$.

2. Caractérisez de manière analogue l'appartenance d'un point M(z) à la médiatrice Δ'.

3. Déterminez et représentez l'ensemble des points M(z) tels que :

$$|z+i| = |z-2-i| = |z+1-3i|.$$

95 Δ est l'ensemble des points du plan complexe d'affixe z telle que :

$$|z-1-2i| = |z+2-i|.$$

1. On note A et B les points d'affixes respectives $1+2i$ et $-2+i$.

a) Démontrez que : $M \in \Delta$ si, et seulement si, MA = MB.

b) Déduisez-en l'ensemble Δ.

2. Déterminez d'une autre façon l'ensemble Δ en utilisant la forme algébrique de $z = x + yi$, où x et y sont réels.

96 **1.** Dans chacun des cas suivants, déterminez l'ensemble des points M du plan complexe dont l'affixe z vérifie la condition donnée.

a) $|z-3| = 2$.

b) $|z+2i| = 1$.

c) $|z-i| = |z+2|$.

d) $|z-(2+i)| = |z|$.

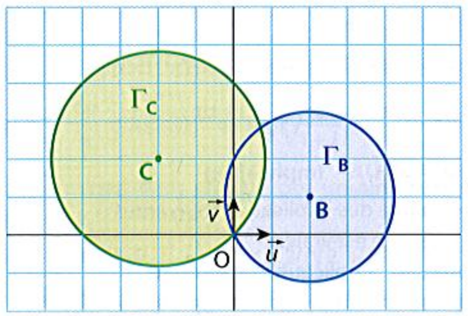
2. a) Justifiez que pour tout nombre complexe z,

$$|\bar{z}+i| = |z-i|.$$

b) Déduisez-en l'ensemble des points M du plan complexe tels que : $|\bar{z}+i| = 2$.

c) Même question avec : $|\bar{z}-2i| = |z+2|$.

97 Sur la figure ci-dessous, on a représenté les cercles de centres B et C d'affixes respectives $z_B = 2+i$ et $z_C = -2+2i$, et passant par l'origine O du repère. On note Γ_B et Γ_C les disques fermés correspondants.



1. Prouvez que :

$M(z) \in \Gamma_B$ si, et seulement si, $|z-2-i| \leqslant \sqrt{5}$.

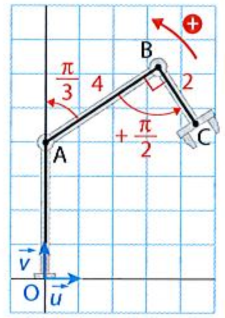
2. Caractérisez de manière analogue l'appartenance du point M(z) au disque Γ_C.

3. Caractérisez l'ensemble $\mathscr{E}$ des points M(z) tels que :

$$|z-2--i| \leqslant \sqrt{5} \text{ et } |z+2-2i| \leqslant 2\sqrt{2}.$$

98 **Le bras du robot**

Le bras d'un robot est formé de trois tiges pouvant pivoter (dans un même plan) autour des points A et B, le point A étant fixe. On se place dans un repère orthonormé direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$.



1. Calculez les affixes de A, B et C.

2. On suppose dans cette question que :

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{OA}) = \theta,\ \theta \in \left]0\,;\frac{\pi}{2}\right[.$$

a) Démontrez alors que C a pour affixe :

$z_C = (4\sin(\theta) + 2\cos(\theta)) + i(4 - 2\sin(\theta) + 4\cos(\theta))$.

b) Pour quelle valeur de θ le bras du robot atteint-il le point d'affixe $3\sqrt{2} + i(4+\sqrt{2})$?

Bras articulé du robot *Opportunity* envoyé sur la planète Mars. À son extrémité, se trouvent des instruments de mesures.

EXERCICES DE SYNTHÈSE

99 **ROC** **Restitution organisée des connaissances**

Prérequis

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$. Si z et z' sont deux nombres complexes non nuls, alors $\arg(zz') = \arg z + \arg z' \pmod{2\pi}$.

1. Démonstration

z et z' sont deux nombres complexes non nuls.

Démontrez que :

a) $\arg\left(\dfrac{z}{z'}\right) = \arg z - \arg z' \pmod{2\pi}$;

b) $\arg\left(\dfrac{1}{z^2}\right) = -2\arg z \pmod{2\pi}$.

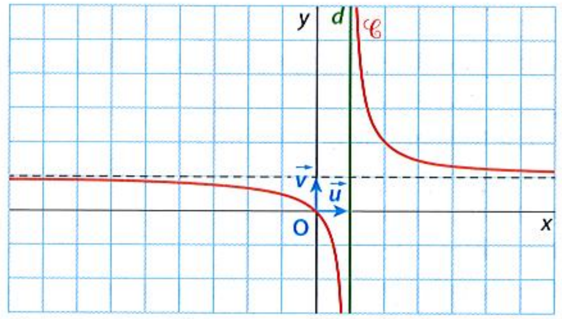
2. Application

z est un complexe non nul d'image M. On associe à M le point M′ d'affixe $\dfrac{1}{z^2}$. On note d la demi-droite d'origine O et de vecteur directeur $\vec{w}$ tel que $(\vec{u},\vec{w}) = \dfrac{\pi}{3}$.

a) Quel est l'ensemble des points M′ lorsque M décrit la droite d privée de O ?

b) Quel est l'ensemble des points M lorsque M′ décrit la droite d privée de O ?

100 Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$. On a tracé dans ce repère la courbe $\mathscr{C}$ représentative de la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{x}{x-1}$ et la droite d d'équation $x = 1$. Au point M d'affixe z, on associe le point M′ d'affixe $Z = z^2 - 2(1+i)z$.



Démontrez que si M est un point de $\mathscr{C}$, alors M′ est un point de l'axe des abscisses.

101 **BAC**

z est un complexe non nul et $z' = \dfrac{-2}{z}$.

1. Quelle relation lie les modules de z et z' ? Les arguments de z et z' ?

2. Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$, M est le point d'affixe z, M′ le point d'affixe z'. $\mathscr{D}$ est le disque de centre O et de rayon 2, privé de O. A est le point d'affixe a telle que $|a| = 2$ et $\arg(a) = \dfrac{\pi}{4} \pmod{2\pi}$.

a) Quel est l'ensemble des points M′ lorsque le point M décrit $\mathscr{D}$?

b) Quel est l'ensemble des points M′ lorsque le point M décrit le segment [OA] privé de O ?

102 **ROC** **Restitution organisée des connaissances**

Prérequis. z est un nombre complexe tel que $z = a + bi$ où a et b sont deux réels. On note $\bar{z}$ le conjugué de z tel que $\bar{z} = a - bi$.

1. Démonstration

a) Démontrez que pour tous nombres complexes z et $\bar{z}$,

$$\overline{z \times z'} = \bar{z} \times \bar{z'}.$$

b) Démontrez par récurrence que pour tout entier naturel n non nul et tout nombre complexe z :

$$\overline{z^n} = (\bar{z})^n$$

2. Application 1

On considère l'équation (E) : $z^4 = -4$, où z est un nombre complexe.

a) Démontrez que si z est solution de (E), alors $-z$ et $\bar{z}$ sont aussi solutions de (E).

b) On considère le nombre complexe $z_0 = 1 + i$.

- Écrivez z_0 sous forme exponentielle.
- Vérifiez que z_0 est solution de (E).

c) Déduisez des questions précédentes trois autres solutions de l'équation (E).

3. Application 2

Cette partie utilise les résultats du TD 38, page 251.

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$.

A, B, C, D ont pour affixes respectives :

$$z_A = 1 + i,\ z_B = -1 + i,\ z_C = -1 - i,\ z_D = 1 - i.$$

a) Placez A, B, C, D dans le repère.

b) Soit E le point d'affixe $-1 + \sqrt{3}$.

Démontrez que le triangle BCE est équilatéral et que $(\overrightarrow{CE}, \overrightarrow{CB}) = \frac{\pi}{3} \pmod{2\pi}$.

c) F est le point d'affixe $-i(1 + \sqrt{3})$.

Démontrez que $\dfrac{z_A - z_E}{z_A - z_F}$ est un réel.

Déduisez-en que les points A, E, F sont alignés.

AVEC LES TICE

103 **Trouver un ensemble de points**

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$. Les points A, B, C ont respectivement pour affixes 4 ; $4 + 4i$; $4i$. Les points M et N sont définis par $\overrightarrow{AM} = m\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CN} = -m\overrightarrow{CB}$, m étant un réel de l'intervalle $[0\,;1]$.

Ω est le milieu du segment [MN].

1. Conjecturer avec GeoGebra

a) Créez un curseur pour le paramètre m avec $0 \leqslant m \leqslant 4$ (incrément 0,1).

b) Créez les points A, B et C et les vecteurs $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{CB}$.

c) Saisissez :

M = A + (m) vecteur (u) et N = C + (– m) vecteur (v).

e) Créez le point Ω, milieu de [MN] et affichez sa trace.

f) Faites varier m à l'aide du curseur. Quelle ligne semble décrire le point Ω ?

2. Démontrez votre conjecture.

104 Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$. Le réel m décrit l'intervalle $[0\,;4]$. P et Q ont respectivement pour affixes m et $(4-m)i$. $\mathscr{C}$ est le cercle de centre A, milieu de [PQ], et passant par P. La médiatrice du segment [PQ] coupe $\mathscr{C}$ aux points C et B $\left(\text{avec } (\overrightarrow{AP}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{2}\right)$.

On s'intéresse au comportement des points C et B lorsque m décrit l'intervalle $[0\,;4]$.

1. Constuisez la figure avec GeoGebra.

Aide
- Créez un curseur de paramètre m avec $0 \leqslant m \leqslant 4$ (incrément : 0,1).
- Saisissez $P = m + 0i$ et $Q = 0 + (4 - m)i$. Affichez la trace de B et C.

2. Conjecturer

Faites variez m à l'aide du curseur. Quelles conjectures faites-vous concernant B et C ?

3. Démontrer

1. a) Démontrez que $(\vec{u}, \overrightarrow{AC}) - (\vec{u}, \overrightarrow{AP}) = \frac{\pi}{2}$.

b) Déduisez-en que $\arg(z_C - z_A) - \arg(z_P - z_A) = \frac{\pi}{2}$ puis que $\dfrac{z_C - z_A}{z_P - z_A} = i$.

c) Démontrez alors que le point C est fixe en calculant son affixe.

2. a) Démontrez que B a pour affixe $z_B = (m-2)(1-i)$.

b) Démontrez que $z_B = (m-2)\mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{4}}$ si $0 \leqslant m \leqslant 2$, et $z_B = (2-m)\mathrm{e}^{i\frac{3\pi}{4}}$ si $2 \leqslant m \leqslant 4$.

c) Déduisez-en que B décrit un segment que l'on précisera.

Prendre toutes les initiatives

105 Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$.

M, N, P sont trois points d'affixes respectives z, z^2 et z^3, $z \in \mathbb{C}$.

Quel est l'ensemble des points M tels que le triangle MNP est rectangle en P ?

106 Déterminez, puis représentez dans le plan complexe, l'ensemble des points M dont l'affixe z vérifie z^3 est réel.

107 z_1 et z_2 sont deux nombres complexes de module 1, et d'arguments respectifs α et β.

Démontrez que $\dfrac{(z_1 + z_2)^2}{z_1 z_2}$ est un réel positif ou nul.

108 **Travail en autonomie**

→ Rédigez la solution de cet exercice en vous aidant du guide.

Sur le Web
Retrouvez le corrigé de cet exercice sur le site www.transmathlycee.net/eleve-TermS

Vrai ou faux

Pour chacune des propositions suivantes, indiquez si elle est vraie ou fausse et donnez une démonstration de la réponse choisie.

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$.

1. A est le point d'affixe $2 - 5i$ et B est le point d'affixe $7 - 3i$.

Proposition 1. Le triangle OAB est rectangle isocèle.

2. On note Δ l'ensemble des points M d'affixe z telle que :

$$|z - i| = |z + 2i|.$$

Proposition 2. Δ est une droite parallèle à l'axe des réels.

3. z est un nombre complexe non nul.

Proposition 3. Si $\frac{\pi}{2}$ est un argument de z, alors :

$$|i + z| = 1 + |z|.$$

4. Soit $z = 3 + i\sqrt{3}$.

Proposition 4. Pour tout entier naturel n non nul, z^{3n} est imaginaire pur.

5. z est un nombre complexe non nul.

Proposition 5. Si $|z| = 1$, alors $z^2 + \dfrac{1}{z^2}$ est un nombre réel.

Analyser l'énoncé
Les cinq affirmations sont indépendantes.

Analyser l'énoncé
Il s'agit de traduire une situation géométrique à l'aide des complexes.

Analyser l'énoncé
Le calcul des premiers termes vous permet de répondre.

Guide

1. Une figure vous permet de choisir judicieusement les longueurs et les angles à calculer. Vous pouvez ainsi opter pour le calcul de $\dfrac{z_A}{z_B - z_A}$ et son interprétation.

2. Notez A et B les points d'affixes i et $-2i$, et traduisez le module de l'affixe d'un vecteur en termes de distance.

3. z a pour argument $\frac{\pi}{2}$, c'est donc un nombre imaginaire pur tel que $\mathrm{Im}(z) > 0$, ou encore de la forme $z = ib$ avec $b > 0$.

4. On peut écrire z sous forme exponentielle et exploiter la formule $(re^{i\theta})^n = r^n e^{in\theta}$.

5. Dire que $|z| = 1$ signifie que $z = e^{i\theta}$, $\theta \in \mathbb{R}$.

ZOOM sur la rédaction
Si vous optez pour le calcul de $\dfrac{z_A}{z_B - z_A} = Z$, justifiez clairement que $|Z| = \dfrac{OA}{AB}$ et $\arg(Z) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{OA})$.

ZOOM sur la rédaction
N'oubliez pas de traduire $|z - i| = |z + 2i|$ en termes d'équivalence. Donnez la définition exacte de l'ensemble Δ.

ZOOM sur la rédaction
Justifiez clairement que $b > 0$, condition indispensable pour conduire le raisonnement.

109 BAC Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$, d'unité graphique 2 cm.

On réalisera une figure que l'on complètera tout au long de l'exercice.

On considère les points A d'affixe i, B d'affixe $-2i$ et D d'affixe 1.

On appelle E le point tel que le triangle ADE est équilatéral direct.

Soit f l'application qui à tout point M d'affixe $z\,(z \neq i)$ associe le point M′ d'affixe z' définie par : $z' = \dfrac{2z - i}{iz + 1}$.

1. Démontrez que le point E a pour affixe :

$$\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)(1+i).$$

2. Exprimez sous forme algébrique l'affixe du point D′ associé au point D par l'application f.

a) Démontrez que pour tout nombre complexe z différent de i, $(z' + 2i)(z - i) = 1$.

b) Déduisez-en que pour tout point M d'affixe $z\,(z \neq i)$:

$$BM' \times AM = 1 \text{ et } (\vec{u}\,;\overrightarrow{BM'}) = -(\vec{u}\,;\overrightarrow{AM}) + k \times 2\pi,$$
où $k \in \mathbb{Z}$.

3. a) Démontrez que les points D et E appartiennent au cercle $\mathscr{C}$ de centre A et de rayon $\sqrt{2}$.

b) En utilisant les résultats de la question **2. b)**, placez le point E′ associé au point E par l'application f. Vous laisserez apparents les traits de construction.

4. Quelle est la nature du triangle BD′E′ ? Justifiez.

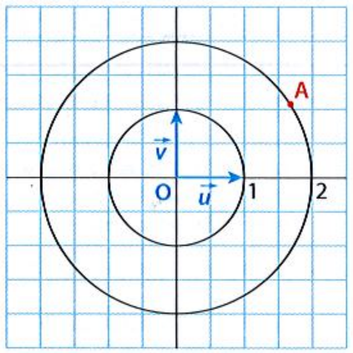
110 BAC Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$, on associe à tout point M d'affixe z non nulle, le point M′ milieu du segment $[MM_1]$ où M_1 est le point d'affixe $\dfrac{1}{z}$.

Le point M′ est appelé image de M.

1. a) Démontrez que :

$$OM \times OM_1 = 1 \text{ et } (\vec{u}\,;\overrightarrow{OM_1}) = -(\vec{u}\,;\overrightarrow{OM}) \pmod{2\pi}.$$

b) Sur la figure ci-dessous, le point A appartient au cercle de centre O et de rayon 2.



Construisez le point A′ image de A. (On laissera apparent les traits de construction.)

2. a) Justifiez que pour tout nombre complexe z non nul, le point M′ a pour affixe :

$$z' = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right).$$

b) B et C sont les points d'affixes respectives $2i$ et $-2i$. Calculez les affixes des points B′ et C′, images respectives de B et C.

c) Placez B, C, B′, C′ sur la figure précédente.

3. Déterminez l'ensemble des points M tels que M′ = M.

4. Prise d'initiative

Démontrez que si M appartient au cercle de centre O et de rayon 1, alors son image M′ appartient au segment [KL] où K et L sont les points d'affixes respectives −1 et 1.

111 BAC Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$ (unité graphique 2 cm).

On considère les points A, B et C d'affixes respectives :

$$z_A = -\frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2},\ z_B = \overline{z_A} \text{ et } z_C = -3.$$

Partie A.

1. Écrivez z_A et z_B sous forme exponentielle.

2. Placez les points A, B, C.

3. Démontrez que le triangle ABC est équilatéral.

Partie B. Soit f l'application qui à tout point M d'affixe z associe le point M′ d'affixe :

$$z' = \frac{1}{3}iz^2.$$

On note O′, A′, B′, C′ les points associés par f aux points O, A, B, C respectivement.

1. a) Déterminez la forme exponentielle des affixes des points A′, B′ et C′.

b) Placez les points A′, B′ et C′.

c) Démontrez l'alignement des points O, A, B′, ainsi que celui des points O, B, A′.

2. Démontrez que si M appartient à la droite (AB), alors M′ appartient à la parabole d'équation $y = -\dfrac{1}{3}x^2 + \dfrac{3}{4}$.

112 BAC QCM

Pour chaque question, plusieurs réponses peuvent être exactes. Justifiez vos réponses.

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$.

1. $\mathscr{E}$ est l'ensemble des points M d'affixe z vérifiant $z = 1 - 2i + e^{i\theta}\,(\theta \in \mathbb{R})$.

a) $\mathscr{E}$ est une droite passant par le point d'affixe $2 - 2i$.

b) $\mathscr{E}$ est le cercle de centre d'affixe $-1 + 2i$ et de rayon 1.

c) $\mathscr{E}$ est le cercle de centre d'affixe $1 - 2i$ et de rayon 1.

d) $\mathscr{E}$ est le cercle de centre d'affixe $1 - 2i$ et de rayon $\sqrt{5}$.

2. f est l'application qui à tout point M d'affixe z associe le point M′ d'affixe $z' = -iz - 2i$.

a) Le point d'affixe $-1 - 2i$ est un antécédent du point d'affixe i par f.

b) Si $z = -1 - i$, alors les points M et M′ sont confondus.

c) Si $|z'| = 1$, alors M est un point du cercle de centre A d'affixe -2 et de rayon 1.

d) Si $\arg(z) = \dfrac{\pi}{2} \pmod{2\pi}$ alors le point M′ décrit une demi-droite.

3. On considère, dans l'ensemble des nombres complexes, l'équation **(E)** :

$$z + |z|^2 = 7 + i.$$

a) **(E)** admet deux solutions distinctes qui ont 1 pour partie imaginaire.

b) **(E)** admet une solution qui a pour partie imaginaire 2.

c) Si z_1 et z_2 sont les solutions de **(E)**, alors $\sqrt{2}\,e^{-\frac{3i\pi}{4}}$ est la forme exponentielle du nombre complexe $\dfrac{z_1}{z_2}$ avec $\mathrm{Re}(z_2) > 0$.

113 BAC

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$. On considère l'application f du plan dans lui-même qui, à tout point M d'affixe z, associe le point M′ d'affixe $z' = z^2 - 4z$.

1. On note A et B les points d'affixes respectives $z_A = 1 - i$ et $z_B = 3 + i$.

a) Calculez les affixes des points A′ et B′, images respectives des points A et B par f.

b) On suppose que deux points ont la même image par f. Démontrez qu'ils sont confondus ou que l'un est l'image de l'autre par une symétrie centrale que l'on précisera.

2. I est le point d'affixe −3.

a) Démontrez que le quadrilatère OMIM′ est un parallélogramme si, et seulement si, $z^2 - 3z + 3 = 0$.

b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - 3z + 3 = 0$.

3. a) Exprimez $z' + 4$ en fonction de $z - 2$. Déduisez-en une relation entre $|z' + 4|$ et $|z - 2|$, puis entre $\arg(z' + 4)$ et $\arg(z - 2)$.

b) Les points J et K ont pour affixes respectives $z_J = 2$ et $z_K = -4$.

Démontrez que tous les points M du cercle $\mathscr{C}$ de centre J et de rayon 2 ont leurs images M′ sur un même cercle que l'on déterminera.

c) E est le point d'affixe $z_E = -4 - 3i$.

Donnez la forme trigonométrique de $z_E + 4$ et, à l'aide du **3. a)**, démontrez qu'il existe deux points dont l'image par f est E.

Précisez sous forme algébrique l'affixe de ces deux points.

114 BAC Vrai ou faux

Pour chaque proposition, indiquez si elle est vraie ou fausse. Justifiez votre réponse.

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$. f est l'application qui à tout nombre complexe z non nul associe le nombre complexe $z' = f(z) = \left(\dfrac{z}{|z|}\right)^2$.

On note M le point d'affixe $z = x + yi\ (z \neq 0)$ et M′ le point d'affixe $z' = x' + yi'$.

a) $x' = \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ et $y' = \dfrac{2xy}{x^2 + y^2}$.

b) « $z' \in \mathbb{R}$ » équivaut à « M appartient à l'axe des ordonnées ».

c) $f\left[(1+i)^8\right]$ est un réel.

d) Il existe un seul point M tel que M et M′ soient confondus.

115 BAC QCM

Pour chaque question, une seule des trois propositions est exacte. Justifiez chaque fois votre réponse.

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct d'origine O.

1. Une solution de l'équation $2z + \bar{z} = 9 + i$ est :

a) 3 **b)** i **c)** $3 + i$

2. z est un nombre complexe, $|z + i|$ est égal à :

a) $|z| + 1$ **b)** $|z - 1|$ **c)** $|i\bar{z} + 1|$

3. z est un nombre complexe d'argument θ ; un argument de $-\dfrac{1 + i\sqrt{3}}{\bar{z}}$ est :

a) $-\dfrac{\pi}{3} + \theta$ **b)** $-\dfrac{2\pi}{3} + \theta$ **c)** $\dfrac{2\pi}{3} - \theta$

4. n est un entier naturel. Le nombre complexe $(\sqrt{3} + i)^n$ est un imaginaire pur si, et seulement si :

a) $n = 4$ **b)** $n = 6k + 3,\ k \in \mathbb{Z}$ **c)** $n = 6k,\ k \in \mathbb{Z}$

5. A et B sont deux points d'affixes respectives i et -1. L'ensemble des points M d'affixe z telle que $|z - i| = |z + 1|$ est :

a) la droite (AB) **b)** le cercle de diamètre [AB]

c) La droite perpendiculaire à [AB] passant par O

6. Ω est le point d'affixe $1 - i$. L'ensemble des points M d'affixe $z = x + yi$ vérifiant $|z - 1 + i| = |3 - 4i|$ a pour équation :

a) $y = -x + 1$ **b)** $(x - 1)^2 + y^2 = \sqrt{5}$

c) $z = 1 - i + 5e^{i\theta},\ \theta \in \mathbb{R}$

EXERCICES

Pour aller plus loin

116 Suite et nombres complexes (I)

1. a) (r_n) est la suite géométrique réelle de premier terme r_0 strictement positif et de raison $\frac{2}{3}$.
Exprimez r_n en fonction de r_0 et de n.
b) (θ_n) est la suite arithmétique réelle de premier terme θ_0 appartenant à $\left[0\,;\frac{\pi}{3}\right[$ et de raison $\frac{2\pi}{3}$.
Exprimez θ_n en fonction de θ_0 et n.
c) On pose $z_n = r_n(\cos\theta_n + i\sin\theta_n)$, $n \in \mathbb{N}$.
Sachant que z_0, z_1 et z_2 sont tels que $z_0 z_1 z_2 = 8$, déterminez le module et un argument de z_1 et de z_2.

2. Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(\mathrm{O}\,;\vec{u},\vec{v})$ (unité graphique 4 cm), on appelle M_n le point d'affixe z_n.
a) Placez les points M_0, M_1, M_2 et M_3.
b) Pour tout n de $\mathbb{N}$, calculez $\mathrm{M}_n\mathrm{M}_{n+1}$ en fonction de n.
c) On pose pour tout entier naturel n, $\mathrm{l}_n = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{M}_k\mathrm{M}_{k+1}$.
Exprimez l_n en fonction de n et déterminez la limite de l_n quand n tend vers $+\infty$.

117 Suite et nombres complexes (II)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(\mathrm{O}\,;\vec{u},\vec{v})$ (unité graphique 1 cm).
On considère les nombres complexes :
$$a = \frac{\sqrt{3}+1}{4} + i\left(\frac{\sqrt{3}-1}{4}\right) \text{ et } z_0 = 6 + 6i.$$
Pour tout entier naturel n non nul, on désigne par A_n le point d'affixe z_n définie par $z_n = a^n z_0$.

Partie A

1. Déterminez la forme algébrique de z_1 et de a^2.
2. Déterminez une forme exponentielle de z_1 et démontrez que $a^2 = \frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{6}}$.
3. a) Exprimez z_3, puis z_7 en fonction de z_1 et de a^2.
b) Placez les points A_0, A_1, A_3 et A_7, images respectives des nombres complexes z_0, z_1, z_3 et z_7.

Partie B

Pour tout entier naturel n, on pose $|z_n| = r_n$.
1. a) Démontrez que pour tout entier naturel n,
$$r_n = 12\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n+1}.$$
b) Déduisez-en que la suite (r_n) est une suite géométrique dont vous préciserez le premier terme et la raison.
2. Déterminez la limite de la suite (r_n) et interprétez géométriquement le résultat obtenu.
3. Déterminez le plus petit entier naturel p tel que $\mathrm{OA}_p \leqslant 10^{-3}$ et donnez alors une mesure en radian de l'angle orienté $(\vec{u}\,;\overrightarrow{\mathrm{OA}_p})$.

118 Suite et nombres complexes (III)

On considère les nombres complexes z_n définis, pour tout entier naturel n, par :
$$z_0 = 1 \quad \text{et} \quad z_{n+1} = \left(\frac{3}{4} + i\frac{\sqrt{3}}{4}\right)z_n.$$
On note A_n le point d'affixe z_n.
1. a) Calculez sous forme algébrique les nombres z_1, z_2, z_3, z_4, z_5 et z_6.
b) Dans un repère orthonormé direct (unité graphique 8 cm), placez les points A_0, A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 et A_6.
2. Pour tout entier naturel n, on pose $d_n = |z_{n+1} - z_n|$.
a) Vérifiez que pour tout entier $n \geqslant 1$,
$$z_{n+1} - z_n = \left(\frac{3}{4} + i\frac{\sqrt{3}}{4}\right)(z_n - z_{n-1}).$$
b) Déduisez-en une relation entre d_n et d_{n-1} pour tout $n \geqslant 1$; puis une expression de d_n en fonction de n et d_0.
c) Fournissez une interprétation géométrique des nombres d_n.
d) On pose $\mathrm{L}_n = \sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{A}_k\mathrm{A}_{k+1}$; L_n est la longueur de la ligne polygonale de sommets successifs A_0, A_1, ... A_n.
Déterminez L_n en fonction de n, puis la limite de L_n quand n tend vers $+\infty$.
3. Pour tout entier naturel n, on désigne par a_n l'argument de z_n dans l'intervalle $]-\pi\,;\pi]$.
a) Établissez une relation entre a_n et a_{n-1} pour tout entier $n \geqslant 1$. Déduisez-en l'expression de a_n en fonction de n.
b) Pour quelles valeurs de n, les points O, A_0 et A_n sont-ils alignés ?

Culture mathématique

Les ensembles de Julia

Ces ensembles constituent une très belle collection d'images. Ils sont liés aux suites de nombres complexes définies par la relation de récurrence $z_{n+1} = z_n^2 + c$ (z_0 et c étant deux nombres complexes donnés).
L'ensemble de Julia correspondant est la frontière de l'ensemble des nombres z_0 pour lesquels la suite est bornée, c'est-à-dire telle que : il existe un réel M tel que pour tout naturel n, $|z_n| \leqslant \mathrm{M}$.
(La frontière d'un ensemble est constituée des points qui, de façon intuitive, sont « situés au bord » de cet ensemble.)

119 Résolution d'une équation

On pose $\mathrm{P}(z) = z^4 - 6z^3 + 23z^2 - 34z + 26$.
1. α est un nombre complexe quelconque.
a) Démontrez que $\mathrm{P}(\overline{\alpha}) = \overline{\mathrm{P}(\alpha)}$.
b) Déduisez-en que si $\mathrm{P}(\alpha) = 0$, alors $\mathrm{P}(\overline{\alpha}) = 0$.
2. a) Calculez $\mathrm{P}(1+i)$.
b) Indiquez deux solutions complexes de l'équation $\mathrm{P}(z) = 0$.
3. On pose $\mathrm{Q}(z) = [z - (1+i)][z - (1-i)]$.
a) Vérifiez que $\mathrm{P}(z)$ est le produit du polynôme $\mathrm{Q}(z)$ et d'un polynôme $\mathrm{Q}_1(z)$ du second degré que l'on déterminera.
b) Résolvez dans $\mathbb{C}$ l'équation $\mathrm{P}(z) = 0$.

120

Dans le plan complexe, M est un point d'affixe $z = x + yi$, x et y réels. Lorsque $z \neq 1$, on associe au point M le point M′ d'affixe Z telle que : $\mathrm{Z} = \frac{5z-2}{z-1}$.
1. Exprimez $\mathrm{Z} + \overline{\mathrm{Z}}$ en fonction de z et $\overline{z}$.
2. Démontrez que le point M′ appartient à l'axe des ordonnées si, et seulement si, le point M appartient à un cercle privé d'un point.

121

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(\mathrm{O}\,;\vec{u},\vec{v})$.
À tout nombre complexe $z = x + yi$, $z \neq -1$, on associe le nombre complexe $\mathrm{Z} = \frac{2iz - i}{z+1}$.
1. Exprimez $\overline{\mathrm{Z}}$ en fonction de $\overline{z}$.
2. a) Justifiez que $|\mathrm{Z}| = 1$ équivaut à $\mathrm{Z}\overline{\mathrm{Z}} = 1$.
b) Démontrez que l'ensemble $\mathscr{E}_1$ des points M d'affixe z tels que $|\mathrm{Z}| = 1$ est un cercle que l'on construira dans le repère $(\mathrm{O}\,;\vec{u},\vec{v})$.
3. a) Justifiez que « Z est imaginaire pur » équivaut à « $\mathrm{Z} + \overline{\mathrm{Z}} = 1$ ».
b) Déduisez-en l'ensemble $\mathscr{E}_2$ des points M d'affixe z tels que Z est imaginaire pur.

PROLONGEMENTS DU TD 38

122 Fonction trigonométrique et nombres complexes

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(\mathrm{O}\,;\vec{u},\vec{v})$, on considère le point A d'affixe 2 et le cercle $\mathscr{C}$ de centre O passant par A. On note α le nombre complexe $1 + i\sqrt{3}$ et $\overline{\alpha}$ le conjugué de α.
1. a) Démontrez que $\alpha^2 - 4\alpha = 2\overline{\alpha} - 8$.
b) Démontrez que les points B et C d'affixes respectives α et $\overline{\alpha}$ appartiennent au cercle $\mathscr{C}$.
2. D est le point de $\mathscr{C}$ d'affixe $2e^{i\theta}$ où θ est un réel de $]-\pi\,;\pi]$. On note E le point de $\mathscr{C}$ tel que $(\overrightarrow{\mathrm{OD}}, \overrightarrow{\mathrm{OE}}) = \frac{\pi}{3}$.
Justifiez que E a pour affixe $z_{\mathrm{E}} = \alpha e^{i\theta}$.
3. On note F et G les milieux respectifs des segments [BD] et [CE].
a) Justifiez que F a pour affixe $z_{\mathrm{F}} = \frac{\alpha}{2} + e^{i\theta}$ et que G a pour affixe $z_{\mathrm{G}} = \frac{\alpha e^{i\theta} + \overline{\alpha}}{2}$.
b) En utilisant la question **1. a)**, démontrez que :
$$\frac{z_{\mathrm{G}} - 2}{z_{\mathrm{F}} - 2} = \frac{\alpha}{2}.$$
c) Déduisez-en que le triangle AFG est équilatéral.
4. *Dans cette question, toute trace de recherche ou d'initiative sera prise en compte.*
On se propose de démontrer qu'il existe une position du point D pour laquelle la longueur du côté AF du triangle AFG est minimale.
a) Démontrez que :
$$\mathrm{AF}^2 = 4 - 3\cos(\theta) + \sqrt{3}\sin(\theta).$$
b) On considère la fonction f définie sur $]-\pi\,;\pi]$ par :
$$f(x) = 4 - 3\cos(x) + \sqrt{3}\sin(x).$$
Le tableau ci-dessous donne les variations de f sur l'intervalle $]-\pi\,;\pi]$.
Justifiez et complétez le tableau de variation.

x	$-\pi$		$-\frac{\pi}{6}$		$\frac{5\pi}{6}$		π
f		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$	

c) Concluez.

123 Nombres complexes et géométrie

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(\mathrm{O}\,;\vec{u},\vec{v})$.

Partie A

A, B, C sont des points d'affixes respectives a, b, c. Les points A, B, C sont distincts deux à deux. On rappelle que :
$$(\vec{u}\,;\overrightarrow{\mathrm{AB}}) = \arg(b-a).$$
Démontrez que $(\overrightarrow{\mathrm{AB}}, \overrightarrow{\mathrm{AC}}) = \arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right) \pmod{2\pi}$.

Partie B

A est le point d'affixe $1 + i$. À tout point M d'affixe z non nulle, on associe le point M′ d'affixe $z' = \frac{z - 1 - i}{z}$. M′ est appelé image de M.
1. a) Déterminez sous forme algébrique l'affixe du point B′, image du point B d'affixe i.
b) Démontrez que $z' \neq 1$.
2. a) Déterminez l'ensemble $\mathscr{E}$ des points M pour lesquels $|z'| = 1$.
b) Déterminez l'ensemble $\mathscr{A}$ des points M pour lesquels z' est un réel différent de 1.