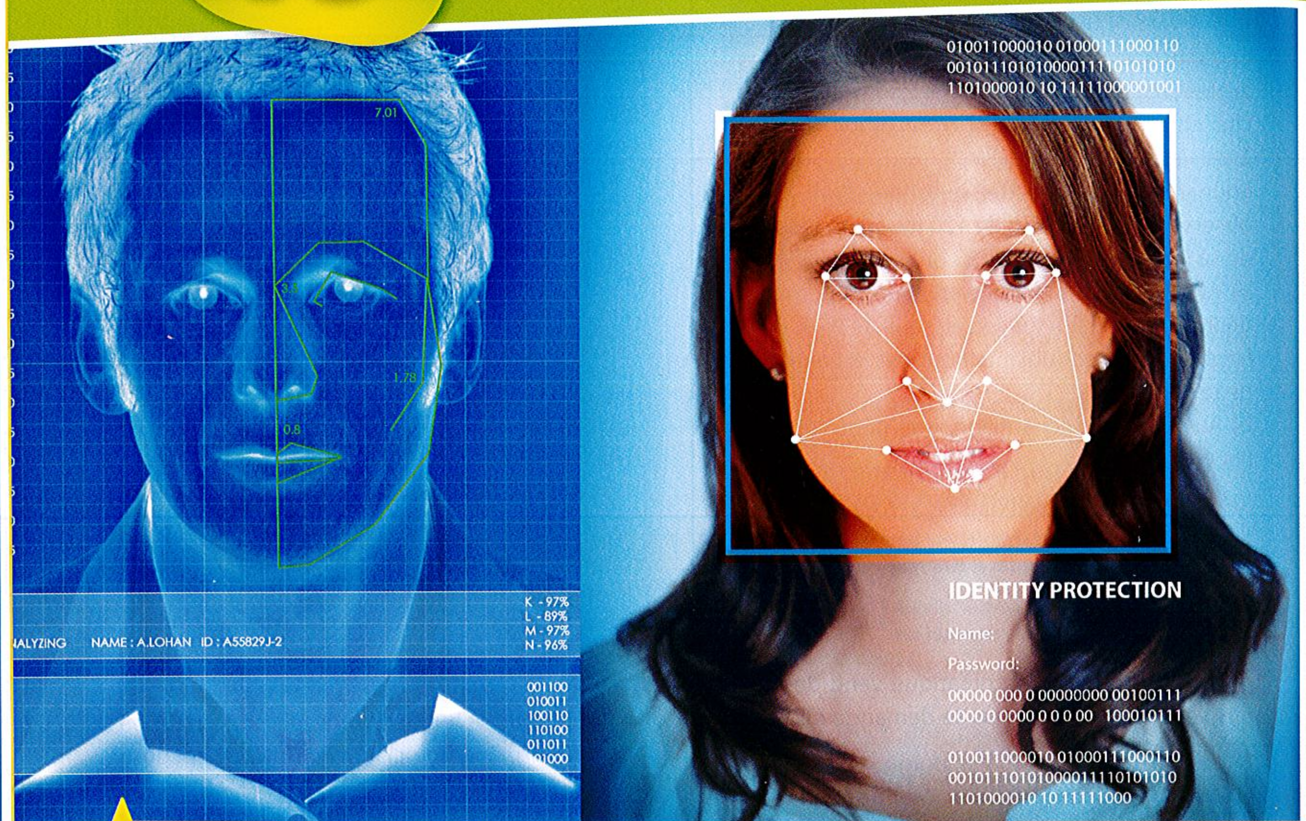
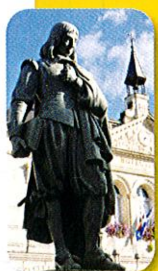
10 Repérage dans le plan. Configurations du plan



La reconnaissance faciale est entrée dans le quotidien de millions d'utilisateurs (Apple : iPhoto ; Google : Picasa ou encore Facebook).

Le dispositif utilise le repérage et les coordonnées pour reconnaître un visage.



Au fil des siècles

René Descartes (1563-1640) a compris et expliqué comment transformer les problèmes géométriques en problèmes numériques. C'est à cette occasion qu'il a introduit les coordonnées, dites aujourd'hui cartésiennes.

● ***Rechercher sur Internet dans quel ouvrage il a fait sa célèbre citation « Je pense donc je suis ».***

Les capacités du programme

	Choix d'exercices	
• Repérer un point donné du plan, placer un point connaissant ses coordonnées.	25 28	31
• Calculer la distance entre deux points dans un repère orthonormé.	2 50	93
• Calculer les coordonnées du milieu d'un segment.	33 73	36
• Utiliser les propriétés des triangles, des quadrilatères, des cercles.	5 11	62
• Utiliser les propriétés des symétries.	70	95

Bien démarrer

Travailler en autonomie

1 Calculer une distance

Sur cette droite graduée sont indiquées les années de naissance et de mort de deux savants grecs, Euclide et Ptolémée.

a) À quel âge chacun est-il mort ?

b) Combien d'années après la mort d'Euclide, Ptolémée est-il né ?

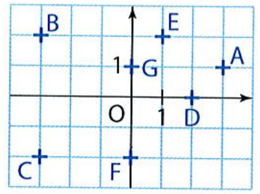
2 Repérer des points du plan

Dans le repère orthogonal d'origine O ci-contre :

a) lire les coordonnées des points E, D, B et F ;

b) nommer les points qui ont des abscisses égales ;

c) nommer les points qui ont des ordonnées égales.



3 Placer des points dans un repère

Tracer un repère orthonormé (*unité* : 1 cm) et placer les points :

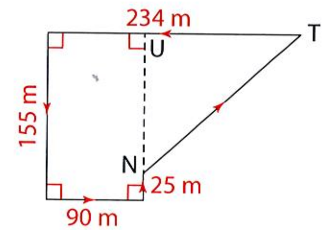
M(–1 ; 2,5) N(0 ; –3) P(–5,5 ; 0) Q(–2,3 ; –1,5)

4 Utiliser le théorème de Pythagore

Voici le schéma du parcours du cross d'un lycée.

a) Calculer la longueur NT.

b) En déduire la longueur totale du parcours.



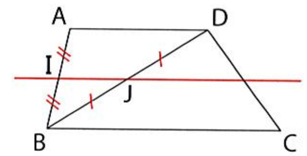
5 Démontrer avec des milieux

ABCD est le trapèze ci-contre avec (AD) et (BC) parallèles.
I et J sont les milieux respectifs des segments [AB] et [BD]

1. Démontrer que :

a) (IJ) // (AD) **b)** (IJ) // (BC)

2. En déduire que (IJ) coupe [CD] en son milieu.

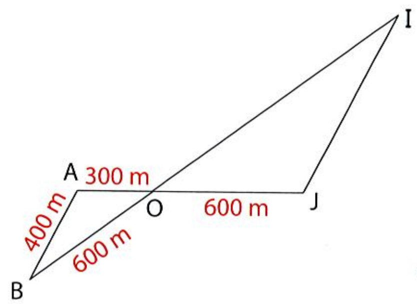


6 Utiliser le théorème de Thalès

Les droites (BI) et (AJ) sont sécantes en O et les droites (AB) et (IJ) sont parallèles.

Calculer la longueur :

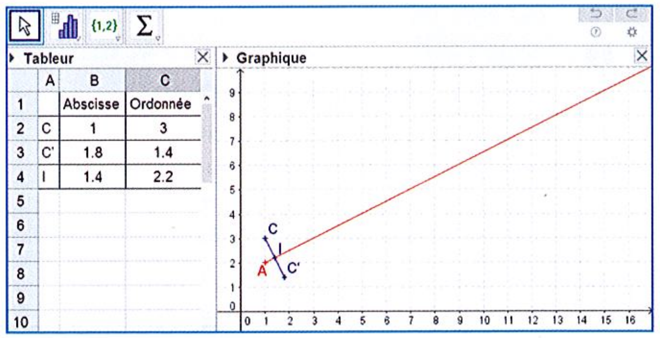
a) OI **b)** IJ



Aide et corrigés sur le site **hyperbole.nathan.fr/2de-2017**

1 Les coordonnées du milieu d'un segment

Un funambule s'apprête à effectuer une longue traversée sur un fil que l'on assimile à un segment [AB]. Il fait des essais de balancier (que l'on assimile à un segment [CC′]), pour définir la bonne longueur. Arrivé au milieu du parcours, le funambule sera pris en photo.



	A	B	C
1		Abscisse	Ordonnée
2	C	1	3
3	C′	1.8	1.4
4	I	1.4	2.2
5			
6			
7			
8			
9			
10			

Problème

Déterminer les coordonnées du point où sera le funambule lors de la photo.

1 Conjecturer avec un logiciel de géométrie

a) Ouvrir la disposition Tableur.

Dans la zone de saisie, entrer A = (1, 2) et B = (113.2, 58.4), puis créer le segment [AB].

b) Placer un point C à coordonnées entières.

Créer le point C′ symétrique de C par rapport à la droite (AB).

Noter I le point d'intersection des segments [AB] et [CC′].

c) Dans la partie Tableur, préparer une feuille de calcul comme indiqué ci-dessus.

Dans la cellule B2, saisir =x(C) (affiche l'abscisse de C).

Dans la cellule C2, saisir =y(C) (affiche l'ordonnée de C).

Compléter la plage B3:C4 de façon analogue.

d) Déplacer le point C à des nœuds du quadrillage.

Observer les affichages dans la feuille de calcul et conjecturer une formule pour calculer les coordonnées de I à l'aide des coordonnées de C et C′.

2 Résoudre le problème

a) Lorsque le professeur a validé la conjecture émise à la question 1, l'utiliser pour déterminer les coordonnées du point M où le funambule sera pris en photo.

b) Lorsque le funambule est en ce point M, quelle que soit la longueur du balancier [CC′], quelle est la nature du quadrilatère ACBC′ ? Justifier.

2 La distance entre deux points

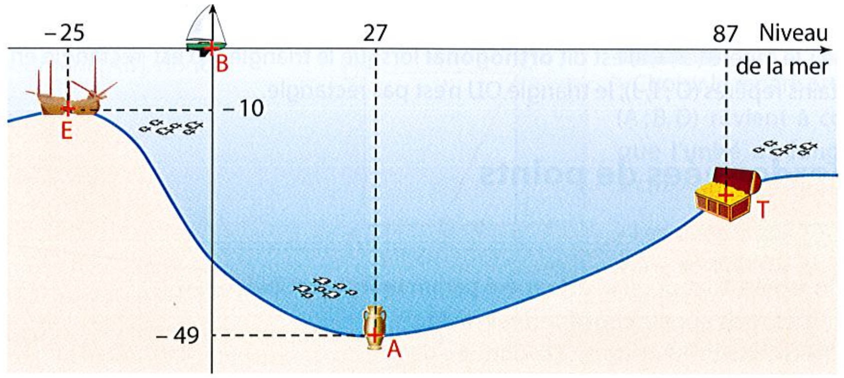
Sur un site de plongée sous-marine, on repère les points d'intérêt par leurs coordonnées dans le repère orthonormé (*unité* : 1 m) d'origine B représenté ci-dessous.

On admet que tous les points ci-dessous sont situés dans le plan de ce repère.

Des amphores sont situées au point A(27 ; −49) et l'épave d'un vieux galion est posée au fond au point E(−25 ; −10).

Un trésor est situé au point T d'abscisse 87.

On sait que les distances AT et AE (en ligne droite) sont égales.



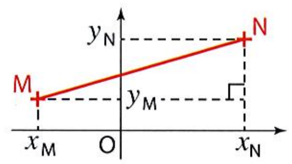
Problème

Déterminer les coordonnées du point T où se trouve le trésor.

1 Calculer une première distance

À l'aide d'un triangle rectangle et du théorème de Pythagore, calculer la distance AE.

2 Établir une formule générale



a) Dans un repère orthonormé, M$(x_M ; y_M)$ et N$(x_N ; y_N)$ sont deux points tels que $x_M < x_N$ et $y_M < y_N$.

Exprimer la distance MN en fonction de x_M, x_N, y_M, y_N.

b) Vérifier que cette formule est encore valable dans chacun des cas :

- $x_M < x_N$ et $y_M > y_N$;
- $x_M > x_N$ et $y_M < y_N$;
- $x_M > x_N$ et $y_M > y_N$.

3 Résoudre le problème

a) Exprimer la distance AT en fonction de l'ordonnée y_T du point T.

b) Utiliser la condition AT = AE pour en déduire les coordonnées possibles du trésor.

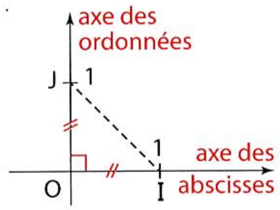
c) Donner les coordonnées de T sachant que son ordonnée est supérieure à celle de A (comme sur la figure ci-dessus).

1 Coordonnées de points du plan

a. Repères

DÉFINITION

Un repère **orthonormé** d'origine O est un triplet (O ; I, J) de points tels que le triangle OIJ est rectangle isocèle en O.



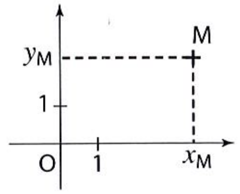
- La droite graduée de repère (O ; I) est l'axe des abscisses.
- La droite graduée de repère (O ; J) est l'axe des ordonnées.

Remarque : le repère (O ; I, J) est dit **orthogonal** lorsque le triangle OIJ est rectangle en O. Pour certains repères (O ; I, J), le triangle OIJ n'est pas rectangle.

b. Coordonnées de points

PROPRIÉTÉ

Dans un repère, tout point M est repéré par un **unique** couple $(x_M ; y_M)$ de nombres réels appelé **coordonnées** de M.
x_M est l'**abscisse** de M et y_M est l'**ordonnée** de M.



PROPRIÉTÉ ADMISE

Dans un repère orthonormé, $A(x_A ; y_A)$ et $B(x_B ; y_B)$ sont deux points.
Le milieu I du segment [AB] a pour coordonnées $(x_I ; y_I)$ avec $x_I = \dfrac{x_A + x_B}{2}$ et $y_I = \dfrac{y_A + y_B}{2}$.

EXEMPLE

Avec A(2 ; –3) et B(–5 ; 4), le milieu I du segment [AB] a pour coordonnées $\left(-\dfrac{3}{2} ; \dfrac{1}{2}\right)$. En effet :

$$x_I = \frac{2+(-5)}{2} = -\frac{3}{2} \quad \text{et} \quad y_I = \frac{-3+4}{2} = \frac{1}{2}.$$

c. Distance entre deux points

PROPRIÉTÉ

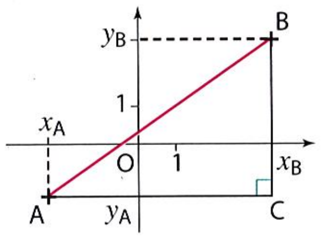
Dans un repère **orthonormé**, $A(x_A ; y_A)$ et $B(x_B ; y_B)$ sont deux points.
La distance entre les points A et B est $\mathbf{AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}}$.

DÉMONSTRATION : cas où $x_B > x_A$ et $y_B > y_A$

On note C le point tel que $x_C = x_B$ et $y_C = y_A$.
Dans le triangle ABC rectangle en C, le théorème de Pythagore permet d'écrire $AB^2 = AC^2 + BC^2$, c'est-à-dire :

$$AB^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2$$

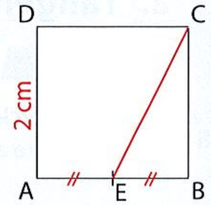
Donc $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$ (car AB est positif).



Exercice résolu — Utiliser un repère et calculer une distance

1 Énoncé

ABCD est un carré de côté 2 cm.
E est le milieu du côté [AB].
On considère le repère orthonormé (A ; B, D).
a) Donner les coordonnées des points A, B, C, D, E.
b) Calculer la distance EC.



Solution

a) A(0 ; 0), B(1 ; 0), D(0 ; 1) et C(1 ; 1).
E est le milieu du segment [AB], donc :

$$x_E = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{0+1}{2} = \frac{1}{2}$$

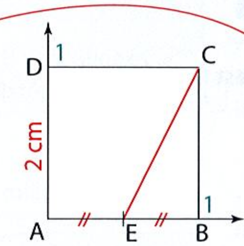
et $$y_E = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{0+0}{2} = 0.$$

Donc $E\left(\dfrac{1}{2} ; 0\right)$.

b) $EC = \sqrt{(x_C - x_E)^2 + (y_C - y_E)^2}$

$$EC = \sqrt{\left(1 - \frac{1}{2}\right)^2 + (1-0)^2}$$

Donc $EC = \sqrt{\left(\dfrac{1}{2}\right)^2 + 1^2} = \sqrt{\dfrac{1}{4} + 1} = \sqrt{\dfrac{5}{4}} = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$.



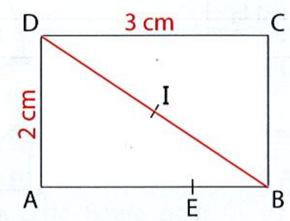
Conseils

- Choisir le repère orthonormé (A ; B, D) revient à considérer que l'unité de longueur est 2 cm. Ainsi AB = AD = 1.
- Les coordonnées de E peuvent se lire sur la figure ci-contre.
- La distance EC est donc $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$ unité de longueur.

Remarque : l'unité de longueur est 2 cm, donc la longueur EC, en cm, est $EC = \dfrac{\sqrt{5}}{2} \times 2\text{ cm} = \sqrt{5}$ cm.
On peut vérifier avec la règle graduée que $EC \approx 2{,}2$ cm.

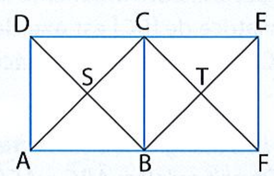
À votre tour

2 ABCD est un rectangle tel que :
AB = 3 cm et AD = 2 cm.



E est le point du côté [AB] tel que AE = 2 cm.
On considère le repère orthonormé (A ; E, D).
a) Donner les coordonnées des points A, B, C, D, E.
b) I est le milieu de la diagonale [BD].
Calculer les coordonnées de I.
c) Calculer la distance ID.

3 ABCD et BCEF sont deux carrés de côté 1,5 cm.



1. On considère le repère orthonormé (B ; F, C).
a) Lire les coordonnées des points A, B, C, D, E, F.
b) S et T sont les centres des deux carrés.
Calculer les coordonnées des points S et T.
c) Calculer la distance AT.
2. Reprendre les questions précédentes avec chacun des repères :
a) (A ; B, D) **b)** (D ; A, C)

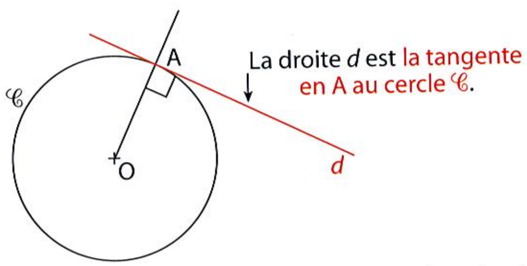
2 Cercles et triangles

a. Tangente à un cercle

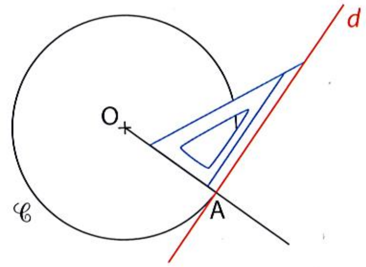
DÉFINITION

$\mathscr{C}$ est un cercle de centre O et A est un point de ce cercle $\mathscr{C}$.
La **tangente** au cercle $\mathscr{C}$ en A est **la droite perpendiculaire** en A à la droite (OA).

Reconnaître une tangente



Constuire une trangente

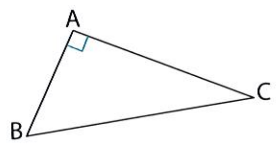


Remarque : la tangente à $\mathscr{C}$ en A n'a que le point A en commun avec le cercle $\mathscr{C}$.

b. Les triangles particuliers

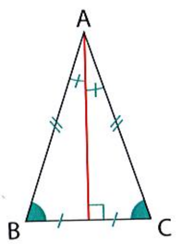
TRIANGLE RECTANGLE

- Un **triangle rectangle** est un triangle qui possède un angle droit.
- **Théorème de Pythagore et sa réciproque :** un triangle ABC est rectangle en A si, et seulement si, $BC^2 = AB^2 + AC^2$.

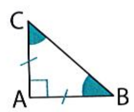


TRIANGLE ISOCÈLE

- Un triangle ABC **isocèle** en A est un triangle tel que AB = AC.
- Dans un triangle ABC isocèle en A :
  – les angles à la base ont même mesure : $\widehat{ABC} = \widehat{ACB}$;
  – la médiatrice de [BC] est **axe de symétrie** du triangle (c'est aussi la hauteur issue de A et la bissectrice de l'angle $\widehat{BAC}$).

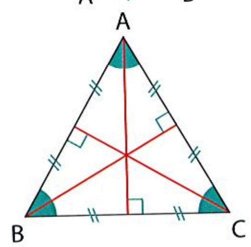


Remarque : un triangle ABC est **rectangle isocèle** en A lorsque $\widehat{BAC} = 90°$ et AB = AC. On sait qu'alors $\widehat{ABC} = \widehat{ACB} = 45°$.



TRIANGLE ÉQUILATÉRAL

- Un triangle **équilatéral** ABC est un triangle tel que AB = AC = BC.
- Les trois angles d'un triangle équilatéral ont pour mesure 60°.
- Un triangle équilatéral a **trois axes de symétrie** (ce sont les médiatrices de ses côtés, ses hauteurs, les bissectrices de ses angles).



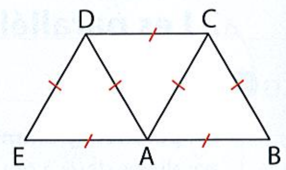
Exercice résolu — Reconnaître un triangle particulier

4 Énoncé

ABC, ACD et ADE sont trois triangles équilatéraux disposés comme sur la figure ci-contre.

a) Démontrer que A est le milieu du segment [BE].

b) Démontrer que le triangle BCE est un triangle rectangle.



Solution

a) • Les triangles ABC, ACD et ADE sont équilatéraux, donc $\widehat{BAC} = \widehat{CAD} = \widehat{DAE} = 60°$.
Ainsi, $\widehat{BAE} = 3 \times 60° = 180°$ donc les points E, A, B sont alignés.
• Les triangles ABC, ACD et ADE sont équilatéraux, donc AB = AE.
• **Conclusion :**
E, A, B sont alignés et AB = AE donc A est le milieu du segment [EB].

b) Les triangles ACD et ADE sont équilatéraux donc CA = CD et EA = ED. Donc la droite (EC) est la médiatrice du côté [AD].
Cette droite est aussi la bissectrice de l'angle $\widehat{ACD}$, donc $\widehat{ACE} = 30°$.
$\widehat{BCE} = \widehat{BCA} + \widehat{ACE} = 60° + 30° = 90°$, donc le triangle BCE est rectangle en C.

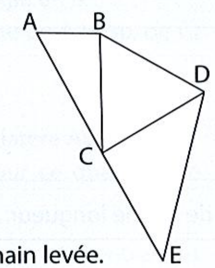
Conseils

• Pour montrer que A est le milieu du segment [BE], on démontre :
– que B, A, E sont alignés,
– puis que AB = AE.

• Pour le triangle équilatéral ACD, la médiatrice de [AD] est aussi la bissectrice de l'angle $\widehat{ACD}$.

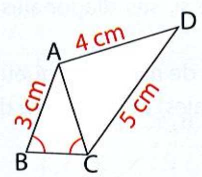
À votre tour

5 ABC est un triangle rectangle en B tel que : $\widehat{BAC} = 60°$ et BC = 4 cm.
BCD est un triangle équilatéral.
Les points A, C, E sont alignés et le triangle CDE est tel que $\widehat{CED} = 45°$.



a) Tracer et coder une figure à main levée.
b) Quelle est la nature du triangle CDE ?
En déduire la longueur CE.

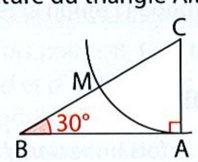
6 Utiliser les informations codées sur cette figure pour reconnaître la nature du triangle ACD.



7 MNP est un triangle tel que :
MN = 4,1 cm, NP = 7 cm, MP = 5,7 cm.
Le triangle MNP est-il rectangle ?

8 MON est un triangle isocèle en O tel que MN = 5 cm et $\widehat{MNO} = 30°$.
A est le point du segment [MN] tel que MA = 3 cm.
MAI est un triangle équilatéral avec I et O de part et d'autre de la droite (MN).
a) Construire une figure avec les instruments de géométrie.
b) Quelle est la nature du triangle MOI ?

9 ABC est un triangle rectangle en A tel que $\widehat{ABC} = 30°$.
Le cercle de centre C qui passe par A, coupe le côté [BC] en M.
Quelle est la nature du triangle AMC ?

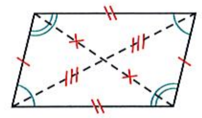


3 Quadrilatères

a. Les parallélogrammes

DÉFINITION

Un **parallélogramme** est un quadrilatère dont les côtés opposés sont parallèles deux à deux.



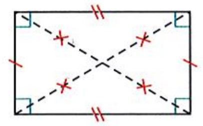
PROPRIÉTÉS

- Un quadrilatère est un parallélogramme si, et seulement si, ses diagonales se coupent en leur milieu.
- Un parallélogramme a **un centre de symétrie** (le point d'intersection de ses diagonales).

b. Les rectangles

DÉFINITION

Un **rectangle** est un quadrilatère qui a quatre angles droits.



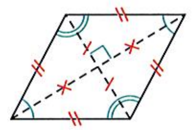
PROPRIÉTÉS

- Un quadrilatère est un rectangle si, et seulement si, ses diagonales se coupent en leur milieu et ont la même longueur.
- Un parallélogramme qui a un angle droit est un rectangle.
- Un rectangle a **deux axes de symétrie** (les médiatrices de ses côtés) et **un centre de symétrie** (le point d'intersection de ses diagonales).

c. Les losanges

DÉFINITION

Un **losange** est un quadrilatère qui a quatre côtés de même longueur.

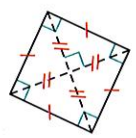


PROPRIÉTÉS

- Un quadrilatère est un losange si, et seulement si, ses diagonales sont perpendiculaires en leur milieu.
- Un parallélogramme qui a deux côtés consécutifs de même longueur est un losange.
- Un losange a **deux axes de symétrie** (ses diagonales) et **un centre de symétrie** (le point d'intersection de ses diagonales).

d. Les carrés

Un **carré** est à la fois un rectangle et un losange.



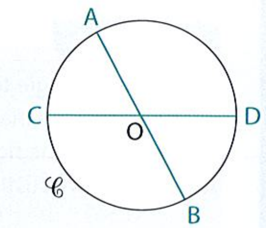
Exercice résolu — Reconnaître un quadrilatère particulier

10 Énoncé

[AB] et [CD] sont deux diamètres d'un cercle $\mathscr{C}$ de centre O.

a) Quelle est la nature du quadrilatère ACBD ?

b) Que peut-on dire de plus pour ce quadrilatère lorsque les diamètres [AB] et [CD] sont perpendiculaires ?

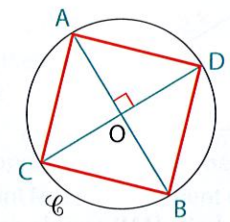


Solution

a) Les diagonales [AB] et [CD] du quadrilatère ACBD se coupent en leur milieu O.
Donc ACBD est un parallélogramme.
Or, de plus, AB = CD, donc les diagonales de ACBD ont la même longueur.
Par conséquent ACBD est un rectangle.

b) Les diagonales du rectangle ACBD se coupent en leur milieu.
De plus, elles sont perpendiculaires, ACBD est un losange.

Conclusion : dans ce cas, ACBD est à la fois un losange et un rectangle, c'est donc un carré.



Conseil

- Pour reconnaître la nature de ACBD on utilise ici ses diagonales.

On montre d'abord qu'il s'agit d'un parallélogramme et ensuite qu'il s'agit d'un rectangle.

À votre tour

11 ABC est un triangle rectangle en B.
On note A′ (resp. C′) le symétrique de A (resp. de C) par rapport à B.

a) Construire une figure.

b) Quelle est la nature du quadrilatère ACA′C′ ?

c) Que peut-on dire de plus pour ce quadrilatère lorsque BA = BC ?

12 ABCD est un parallélogramme de centre O et AOBE est un parallélogramme.

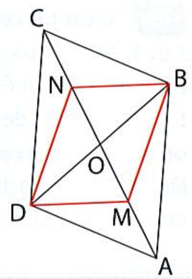
Démontrer que si ABCD est un losange, alors AOBE est un rectangle.

13 ABCD est un parallélogramme de centre O.

M est le milieu du segment [OA].
N est le milieu du segment [OC].

a) Expliquer pourquoi OM = ON.

b) En déduire que le quadrilatère MBND est un parallélogramme.



14 ABC est un triangle. On note :

- E le point de [AB] tel que $AE = \frac{1}{3}AB$;
- F le point de [AC] tel que $CF = \frac{2}{3}CA$;
- G le point de [BC] tel que $BG = \frac{1}{3}BC$.

a) Construire une figure.

b) Quelle est la nature du quadrilatère EFGB ?

15 ABC est un triangle inscrit dans un cercle de diamètre [AB]. On note C′ le symétrique du point C par rapport au centre du cercle.

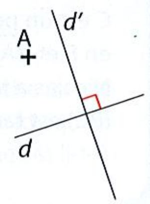
a) Construire une figure.

b) Quelle est la nature du quadrilatère ACBC′ ?

16 **a)** Réaliser la figure ci-contre.

b) Construire trois points B, C, D tels que les droites d et d' soient axes de symétrie du quadrilatère ABCD.

c) Quelle est la nature de ABCD ?



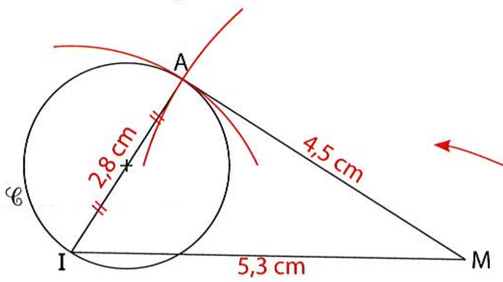
Problème résolu — Reconnaître une tangente

17 Énoncé

MAI est un triangle tel que MA = 4,5 cm, AI = 2,8 cm, MI = 5,3 cm.
$\mathscr{C}$ est le cercle de diamètre [AI].
Coline a tracé une figure et elle affirme : « La droite (AM) est tangente au cercle $\mathscr{C}$. »
A-t-elle raison ? Justifier.

Solution

• **Construction d'une figure**



• **Résolution du problème**

Sur la figure, on conjecture que la droite (AM) semble perpendiculaire à la droite (AI).
On se propose donc de savoir si le triangle MAI est rectangle en A.
$IM^2 = 5,3^2 = 28,09$.
$AI^2 + AM^2 = 2,8^2 + 4,5^2 = 7,84 + 20,25 = 28,09$.
Ainsi $AI^2 + AM^2 = IM^2$ donc d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle MAI est rectangle en A.
Donc $\widehat{MAI} = 90°$ et la droite (AM) est perpendiculaire en A à la droite (AI) (qui porte le diamètre [AI] du cercle $\mathscr{C}$).
La droite (AM) est donc tangente en A au cercle $\mathscr{C}$.
• **Conclusion :** l'affirmation de Coline est exacte.

Conseils

• On trace le segment [MI] puis on construit le point A avec le compas et la règle.
• Pour démontrer qu'une droite d est tangente à un cercle de centre O en l'un de ses points A, on démontre que d et (OA) sont perpendiculaires.

À votre tour

18 $\mathscr{C}$ est un cercle de centre A et B est un point de ce cercle.
C est un point tel que le triangle ABC est isocèle en B et $\widehat{BAC} = 45°$.
Nicolas a fait une figure et il affirme : « La droite (BC) est tangente au cercle $\mathscr{C}$ ».
A-t-il raison ? Justifier.

19 $\mathscr{C}$ est un cercle de centre L.
J et K sont deux points du cercle $\mathscr{C}$ tels que le triangle JKL soit équilatéral.
I est le milieu de [LK] et I′ est son symétrique orthogonal par rapport à (JK).
Démontrer que la droite (JI′) est tangente au cercle $\mathscr{C}$.

Problème résolu — Comprendre le rôle d'un algorithme

20 Énoncé

Le plan est muni d'un repère orthonormé.
1. Faire fonctionner l'algorithme ci-contre avec A(−2 ; 1), B(3 ; 2) dans chacun des cas :
a) $x = 1$, $y = -1$; **b)** $x = -5$, $y = 28$.
Compléter les affichages de sortie.
2. a) Quel est le rôle de cet algorithme ?
b) Traduire cet algorithme dans le langage d'une calculatrice ou avec AlgoBox.

Variables : $x, y, x_A, y_A, x_B, y_B, e, f$ sont des nombres réels
Entrées : Saisir x, y, x_A, y_A, x_B, y_B
Traitement et sortie : Affecter à e la valeur $(x - x_A)^2 + (y - y_A)^2$
Affecter à f la valeur $(x - x_B)^2 + (y - y_B)^2$
Si $e = f$ alors
  Afficher "..."
 sinon
  Afficher "..."
Fin Si

Solution

1. a) $e = (1-(-2))^2 + (-1-1)^2 = 3^2 + (-2)^2 = 13$
$f = (1-3)^2 + (-1-2)^2 = (-2)^2 + (-3)^2 = 13$
$e = f$, c'est-à-dire MA = MB, donc l'algorithme affiche en sortie "M appartient à la médiatrice de [AB]".
b) $e = (-5-(-2))^2 + (28-1)^2 = (-3)^2 + 27^2 = 738$
$f = (-5-3)^2 + (28-2)^2 = (-8)^2 + 26^2 = 740$
$e \neq f$, donc l'algorithme affiche en sortie "M n'appartient pas à la médiatrice de [AB]".
2. a) Cet algorithme permet de savoir si le point M$(x ; y)$ appartient ou non à la médiatrice du segment [AB].
b)

CASIO

```
======MEDIATRI======
"X=":?→X↵
"Y=":?→Y↵
"XA=":?→I↵
"YA=":?→J↵
"XB=":?→K↵
"YB=":?→L↵
(X-I)²+(Y-J)²→E↵
(X-K)²+(Y-L)²→F↵
If E=F↵
Then "OUI"◢
Else "NON"◢
IfEnd
```

TI

```
PROGRAM:MEDIATRI
:Prompt X,Y,I,J,
K,L
:(X-I)²+(Y-J)²→E
:(X-K)²+(Y-L)²→F
:If E=F
:Then
:Disp "OUI"
:Else
:Disp "NON"
:End
```

AlgoBox

```
▼ VARIABLES
  ├x EST_DU_TYPE NOMBRE
  ├y EST_DU_TYPE NOMBRE
  ├xA EST_DU_TYPE NOMBRE
  ├yA EST_DU_TYPE NOMBRE
  ├xB EST_DU_TYPE NOMBRE
  ├yB EST_DU_TYPE NOMBRE
  ├e EST_DU_TYPE NOMBRE
  └f EST_DU_TYPE NOMBRE
▼ DEBUT_ALGORITHME
  ├LIRE x
  ├LIRE y
  ├LIRE xA
  ├LIRE yA
  ├LIRE xB
  ├LIRE yB
  ├e PREND_LA_VALEUR pow(x-xA,2)+pow(y-yA,2)
  ├f PREND_LA_VALEUR pow(x-xB,2)+pow(y-yB,2)
  ▼ SI (e==f) ALORS
    ├DEBUT_SI
    ├AFFICHER "M appartient à la médiatrice de [AB]"
    ├FIN_SI
    ▼ SINON
      ├DEBUT_SINON
      ├AFFICHER "M n'appartient pas à la médiatrice de [AB]"
      └FIN_SINON
└FIN_ALGORITHME
```

À votre tour

21 Écrire un algorithme qui affiche si un triangle ABC est isocèle en A ou non lorsqu'on saisit en entrée les coordonnées de A, B, C.

22 Écrire un algorithme qui affiche si un triangle ABC est rectangle en A ou non lorsqu'on saisit en entrée les coordonnées de A, B, C.

23 Le quadrilatère de Varignon

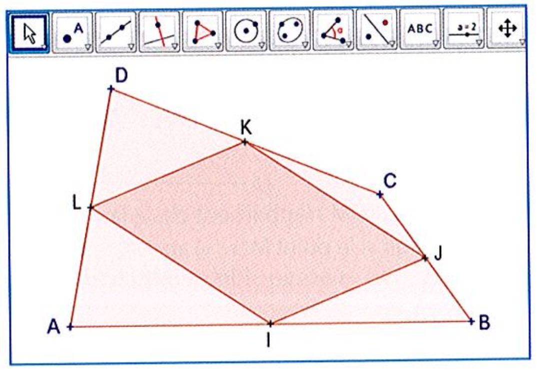
Objectif

Développer une démarche expérimentale, à l'aide d'un logiciel de géométrie.

ABCD est un quadrilatère.
I, J, K, L sont les milieux respectifs des côtés [AB], [BC], [CD], [DA].
On se propose d'étudier la nature du quadrilatère IJKL selon celle du quadrilatère ABCD.

1 Conjecture avec un logiciel

a) Réaliser la figure ci-dessous avec un logiciel de géométrie.



b) Tester le parallélisme des droites (IJ) et (KL), (IL) et (JK) avec le bouton **Relation entre deux objets**.
Conjecturer la nature du quadrilatère IJKL.

c) Déformer le quadrilatère ABCD et tester la conjecture précédente.

d) Semble-t-il que l'on puisse choisir le quadrilatère ABCD de façon que IJKL soit un rectangle ? un losange ? un carré ?

2 Une preuve

a) Démontrer que les droites (IJ) et (KL) sont parallèles, puis qu'il en est de même des droites (IL) et (JK).
En déduire la nature du quadrilatère IJKL.

b) On suppose que ABCD est un rectangle.
Quelle est alors la nature du quadrilatère IJKL ? Justifier.

c) On suppose que ABCD est un losange.
Quelle est alors la nature du quadrilatère IJKL ? Justifier.

d) Quelle est la nature du quadrilatère IJKL lorsque ABCD est un carré ?
Justifier.

3 Travailler en autonomie — Compte-rendu

Le quadrilatère IJKL est dit de Varignon.

a) Rechercher sur Internet quelques informations sur Pierre Varignon.

b) Démontrer que le périmètre de IJKL est égal à la somme des longueurs des diagonales de ABCD.

24 Utiliser une symétrie

Objectif

Conjecturer avec un logiciel de géométrie, puis démontrer.

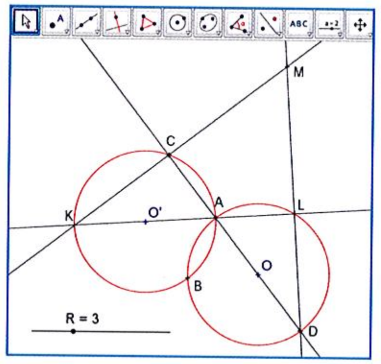
$\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ sont deux cercles de même rayon R et de centres respectifs O et O'.
$\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ sont sécants en A et B.
La droite (AO) recoupe $\mathscr{C}'$ en C et $\mathscr{C}$ en D.
La droite (AO') recoupe $\mathscr{C}'$ en K et $\mathscr{C}$ en L.
Les droites (CK) et (LD) se coupent en M.
On se propose de savoir si les points A, B, M sont alignés ou non.

1 Conjecture avec un logiciel

a) Créer un curseur R allant de 0 à 10 avec un incrément de 0,1 (utiliser **Curseur**).

b) Créer des cercles de centre O, rayon R et de centre O', rayon R (utiliser **Cercle (centre-rayon)**).

c) Terminer la réalisation de la figure ci-dessous.



d) Tester l'alignement des points A, B, M avec le bouton **Relation entre deux objets**.

e) Déplacer le curseur et émettre une conjecture pour les points A, B, M.

2 Une preuve

a) La figure formée par les deux cercles $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ admet pour axes de symétrie la droite (OO') et une droite d.
Quelle est cette droite d ?

b) Par la symétrie orthogonale par rapport à d, quelle est l'image de la droite (AO) ?

c) C et D sont les points d'intersection de la droite (AO) avec respectivement $\mathscr{C}'$ et $\mathscr{C}$.
Quelles sont les images de C et D par la symétrie orthogonale par rapport à d ? Pourquoi ?

d) Quelle est la symétrique de la droite (CK) par rapport à la droite d ?

e) Lorsqu'une droite et sa symétrique par rapport à d sont sécantes, que peut-on dire de leur point d'intersection ? Conclure.

3 Travailler en autonomie — Compte-rendu

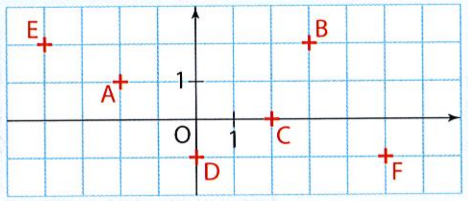
Décrire la méthode utilisée pour démontrer que les points A, B, M sont alignés en utilisant une symétrie axiale.

Coordonnées de points du plan

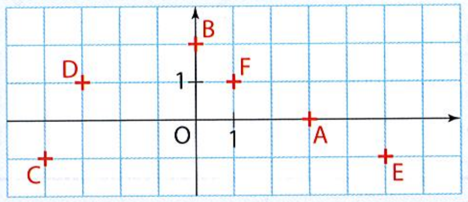
À l'oral

Pour les exercices 25 à 27, lire les coordonnées des points marqués.

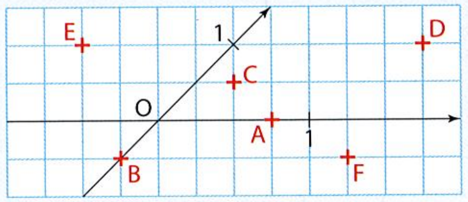
25



26



27



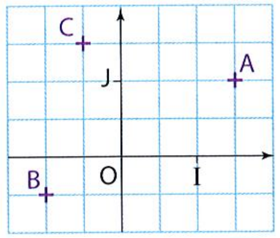
28 Dans un repère orthogonal d'origine O, on donne le point A(3 ; –2).
Quelles sont les coordonnées du symétrique de A par rapport à :
a) l'origine O ?
b) l'axe des abscisses ?
c) l'axe des ordonnées ?

Pour les exercices 29 et 30, calculer mentalement les coordonnées du milieu I du segment [AB].

29 A(2 ; 3), B(4 ; 5) **30** A(–2 ; 1), B(1 ; –6)

31 (O ; I, J) est un repère orthonormé tel que OI = OJ = 1 cm.
a) Placer les points A(–4 ; 6), B(–2 ; –3), C(2 ; 0), D(0 ; 3), E(2 ; 3).
b) Quelles sont les coordonnées des points A et B dans le repère (O ; C, D) ? dans le repère (O ; D, C) ?

32 **a)** Dans le repère (O ; I, J) ci-contre, lire les coordonnées des points A, B et C.



b) Reproduire le repère et placer D(1,5 ; 0), E(–0,5 ; 2), $F\left(-\frac{3}{2} ; \frac{3}{2}\right)$.
c) Quelles sont les coordonnées des points A, B et C dans le repère (D ; I, A) ?

Pour les exercices 33 et 34, calculer les coordonnées du milieu I du segment [AB].

33 **a)** $A\left(-5 ; \frac{1}{2}\right)$, $B\left(12 ; \frac{3}{4}\right)$.
b) $A\left(-5 ; \frac{3}{2}\right)$, $B\left(-\frac{1}{2} ; \frac{5}{2}\right)$.

34 **a)** $A\left(-\frac{1}{2} ; \frac{1}{3}\right)$, $B\left(\frac{5}{2} ; \frac{5}{3}\right)$.
b) $A(\sqrt{2} ; -\sqrt{3})$, $B(5\sqrt{2} ; 2\sqrt{3})$.

35 **a)** Tracer un repère orthogonal (O ; I, J) tel que OI = 2 cm et OJ = 3 cm.
b) Placer les points A(–2 ; 1), B(2 ; –2), C(3 ; –1).
c) Lire les coordonnées des points K et L milieux respectifs de [AB] et [AC]. Vérifier par le calcul.

Pour les exercices 36 à 39, calculer les coordonnées du point B tel que I soit le milieu de [AB].

36 A(4 ; 1), I(2 ; 0). **37** A(–3 ; 1), I(4 ; 2).

38 $A\left(\frac{1}{2} ; \frac{1}{4}\right)$, I(3 ; –1). **39** $A\left(-3 ; \frac{2}{3}\right)$, $I\left(4 ; \frac{1}{3}\right)$.

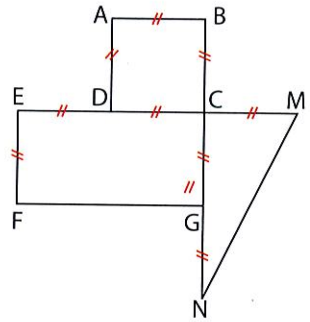
40 Dans un repère orthonormé d'origine O, on donne les points A(2 ; 5) et B(–5 ; 1).
a) Calculer les coordonnées du point M tel que O soit le milieu du segment [AM].
b) Calculer les coordonnées du point N tel que A soit le milieu du segment [BN].

41 **a)** Dans un repère orthonormé, placer les points $A\left(\frac{1}{2} ; \frac{2}{3}\right)$, $B\left(2 ; \frac{3}{4}\right)$, $C\left(-1 ; \frac{1}{2}\right)$.
b) Calculer les coordonnées du milieu J de [AB].
c) Les points B et C sont-ils symétriques par rapport au point A ?

42 Dans chaque cas, calculer les coordonnées du point A′, symétrique de A par rapport à K.
a) A(–2 ; 3), K(4 ; 5). **b)** $A(-\sqrt{2} ; 3)$, $K(\sqrt{2} ; -7)$.

43 Algo On donne les points $A(x_A ; y_A)$ et $B(x_B ; y_B)$ dans un repère.
Écrire un algorithme qui donne les coordonnées du point C, symétrique de B par rapport à A.

44 Cette figure est formée par un carré, un rectangle et un triangle rectangle.



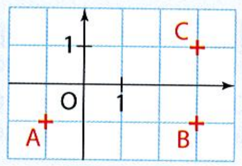
a) Donner les coordonnées de tous les points de cette figure dans le repère (C ; M, B).
b) Calculer les coordonnées du milieu I du segment [MN], puis du milieu J du segment [EI].

45 **a)** Construire un rectangle ABCD tel que AB = 5 cm et AD = 2 cm, puis placer les milieux I, J, K, L des côtés respectifs [AB], [BC], [CD], [DA].
b) Donner les coordonnées de tous les points de la figure dans le repère (A ; I, L).
c) Déterminer les coordonnées du centre O du rectangle ABCD.

Distance entre deux points

À l'oral

46 **a)** Dans ce repère orthonormé, lire les distances AB et BC.
b) En déduire mentalement la distance AC.



47 Dans un repère orthonormé, A(–5 ; 3) et B(4 ; –2) sont deux points. Calculer mentalement :
a) $(x_B - x_A)^2$ **b)** $(y_B - y_A)^2$ **c)** AB

Pour les exercices 48 et 49, A et B sont deux points d'un repère orthonormé. Calculer la distance AB.

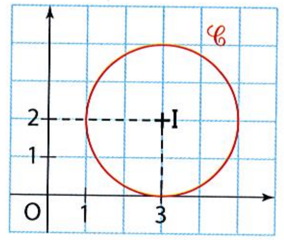
48 **a)** A(–5 ; –1), B(2 ; 1).
b) A(2 ; –3), B(–1 ; 4).

49 **a)** $A\left(\frac{3}{5} ; -\frac{1}{4}\right)$, $B\left(\frac{1}{10} ; \frac{1}{2}\right)$.
b) $A\left(\frac{1}{4} ; \frac{1}{5}\right)$, $B\left(-\frac{3}{4} ; -\frac{2}{5}\right)$.

50 (O ; I, J) est un repère orthonormé (*unité* : 1 cm).
a) Placer les points :
A(2 ; 5), B(1 ; 3), C(–3 ; 2), D(4 ; –1).
b) Avec la règle graduée, mesurer les longueurs AB et CD.
c) Calculer les distances AB et CD ; comparer aux mesures trouvées au **b)**.

51 (O ; I, J) est un repère orthonormé (*unité* : 2 cm).
a) Placer les points A(–5 ; 3) et B(4 ; 2).
b) Calculer la distance AB.
c) Avec la règle graduée, mesurer la longueur AB. Comparer avec le résultat trouvé au **b)**.
Expliquer.

52 Dans le repère orthonormé ci-contre, 𝒞 est le cercle de centre I(3 ; 2) et de rayon 2.



1. A est le point de coordonnées (4,7 ; 3).
a) Calculer la distance IA.
b) Le point A appartient-il au cercle 𝒞 ?
2. Le point $B(4 ; 2+\sqrt{3})$ appartient-il au cercle 𝒞 ?

53 Dans un repère orthonormé, on donne les points :
A(–2 ; 3), B(4 ; 1), C(3 ; –2), D(–2 ; –2).
a) Placer ces points.
b) Quelle est la nature du triangle ABC ? Justifier.
c) On note 𝒞 le cercle de centre $I\left(\frac{1}{2} ; \frac{1}{2}\right)$ et qui passe par A.
Les points B, C, D appartiennent-ils à 𝒞 ?
Justifier.

54 Dans un repère orthonormé, on donne les points $A(-1;2)$, $B(5;4)$, $C(8;5)$.

a) Calculer les distances AB, BC, AC.

b) Utiliser les rappels ci-dessous pour en déduire que les points A, B, C sont alignés.

Rappels

• **Inégalité triangulaire**

Pour tous points A, B, C, on a $AC \leqslant AB+BC$.

• $AC = AB+BC$ si, et seulement si, B appartient au segment [AC].

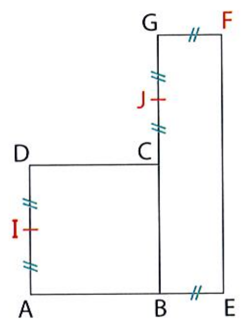
Pour les exercices 55 à 57, le plan est muni d'un repère orthonormé. Calculer AB, BC, AC et en déduire si les points A, B, C sont alignés.

55 $A(-1;5)$, $B(1;3)$, $C(5;-1)$.

56 $A(10;3)$, $B(-3;-2)$, $C(5;1)$.

57 $A(3;-2)$, $B(-3;7)$, $C(-1;4)$.

58 La figure ci-contre est formée par un carré et un rectangle.



a) Lire les coordonnées des points de la figure dans le repère orthonormé (A ; B, D).

b) Calculer IJ, JF, IF.

c) Les points I, J, F sont-ils alignés ?

59 Dans un repère orthonormé, on donne les points :

$A(1;2)$, $B(4;1)$, $C(-1;-9)$.

a) Placer ces points.

b) Le point C appartient-il à la médiatrice du segment [AB] ? Justifier.

60 Dans un repère orthonormé, on donne les points :

$A(-2;4)$, $B(4;1)$, $C(1;5)$.

a) Placer ces points.

b) Myrtille affirme : « Le point $H(0;3)$ est le pied de la hauteur issue de C ».

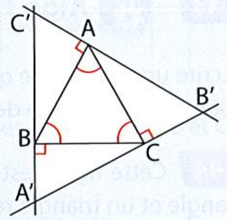
Cette affirmation est-elle vraie ou fausse ? Justifier.

Cercles et triangles

À l'oral

61 ABC est un triangle équilatéral.

Les perpendiculaires en A à la droite (AB), en B à la droite (BC), en C à la droite (AC), se coupent en les points A′, B′ et C′.



a) Calculer mentalement la mesure de l'angle $\widehat{CAB'}$ puis de l'angle $\widehat{CB'A}$.

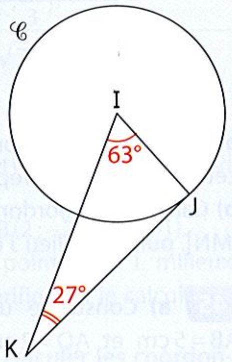
b) De même, calculer mentalement la mesure de chacun des angles $\widehat{BC'A}$ et $\widehat{CA'B}$.

c) Quelle est la nature du triangle A′B′C′ ?

62 Sur cette figure :

• $\mathscr{C}$ est un cercle de centre I et qui passe par un point J ;

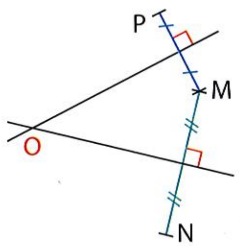
• $\widehat{KIJ} = 63°$ et $\widehat{IKJ} = 27°$.



a) Expliquer pourquoi le triangle IJK est rectangle.

b) Que peut-on dire de la droite (JK) pour le cercle $\mathscr{C}$?

63 Les médiatrices des segments [PM] et [MN] ci-contre se coupent en O.



a) Démontrer que $OP = ON$.

b) Que peut-on dire de la médiatrice du segment [PN] ?

Expliquer.

64 ABC est un triangle tel que :

$AB = 7{,}5$ cm, $BC = 6$ cm, $AC = 4{,}5$ cm.

Quelle est la nature du triangle ABC ?

Justifier.

65 $\mathscr{C}$ est un cercle de diamètre [EF].

d et d' sont les tangentes en E et F au cercle $\mathscr{C}$.

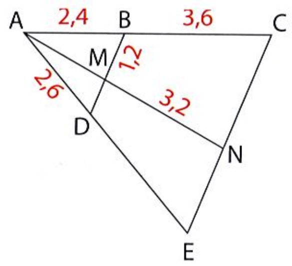
a) Construire une figure.

b) Montrer que les droites d et d' sont parallèles.

66 Les points A, B, C sont alignés. Il en est de même de A, M, N, de A, D, E, de B, M, D et de C, N, E.

Les droites (BD) et (CE) sont parallèles.

Calculer DE, AM, CN.

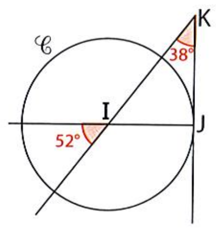


67 $\mathscr{C}$ est un cercle de centre I et de rayon IJ.

a) Justifier que la droite (JK) est tangente au cercle $\mathscr{C}$.

b) On donne $IK = 10$ cm et $JK = 7{,}5$ cm.

Calculer le rayon, en cm, du cercle $\mathscr{C}$.

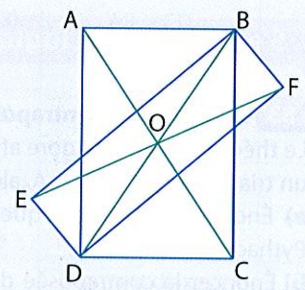


Quadrilatères

À l'oral

68 Les quadrilatères ABCD et BEDF ci-contre sont des rectangles.

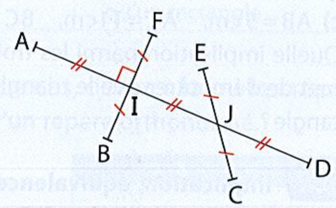
Quelle est la nature du quadrilatère FCEA ? Justifier.



69 D'après les codages de cette figure, que peut-on dire du quadrilatère :

• ICDE ? • ABJF ?

Justifier.



70 ABCD est un parallélogramme de centre O.

La perpendiculaire à (AB) passant par A coupe (BC) en E.

La perpendiculaire à (CD) passant par C coupe (AD) en F.

a) Construire une figure.

b) Quelle est la nature du quadrilatère AECF ?

c) En déduire que F est le symétrique de E par rapport à O.

71 ABCD est un rectangle tel que $AB = 5$ cm et $BC = \dfrac{10\sqrt{3}}{3}$ cm.

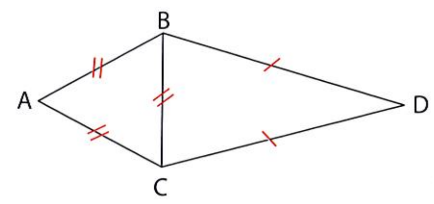
On note J le milieu de [BC] et I le point d'intersection des droites (AJ) et (BD).

a) Construire une figure.

b) Déterminer la mesure de chacun des angles $\widehat{JAB}$ et $\widehat{ABD}$ (éventuellement au dixième près).

c) Tony affirme : « Les droites (AJ) et (BD) sont perpendiculaires ». A-t-il raison ?

72 Sur la figure ci-dessous, ABC est un triangle équilatéral et BCD est un triangle isocèle en D.



Les médiatrices de [AB] et [BD] se coupent en I et les médiatrices de [AC] et [CD] se coupent en J.

a) Construire une figure.

b) Justifier que :

• $IA = ID$, • $JA = JD$, • $IA = JA$.

c) En déduire la nature du quadrilatère AIDJ.

Configurations du plan et coordonnées

À l'oral

73 Dans un repère, on donne les points :

$A(2;1)$, $B(3;2)$, $C(6;9)$, $D(5;8)$.

1. Calculer mentalement les coordonnées :

a) du milieu du segment [AC] ;

b) du milieu du segment [BD].

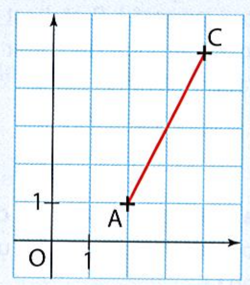
2. En déduire la nature du quadrilatère ABCD.

74 A et C sont les deux points du repère orthonormé ci-contre.

a) Calculer mentalement AC^2.

b) B est un point tel que $AB = \sqrt{2}$ et $BC = 3\sqrt{2}$.

Le triangle ABC est-il rectangle ?



Pour s'entraîner

Pour les exercices 75 à 77, placer les points dans un repère orthonormé, conjecturer la nature du triangle ABC, puis démontrer cette conjecture.

75 A(3 ; −2), B(−2 ; −3), C(−3 ; 2).

76 A(−1 ; 2), B(−3 ; 6), C(−7 ; −1).

77 A(0 ; 3), B(5 ; 1), C(−2 ; −2).

78 Dans un repère orthonormé, on donne les points :

A(−1 ; −1), B(2 ; 3) et C(4 ; −1).

a) Quelle semble être la nature du triangle ABC ? Justifier la réponse.
b) Calculer le périmètre du triangle ABC. Donner une valeur approchée au centième près.
c) Calculer l'aire du triangle ABC.

79 Dans un repère orthonormé, on donne les points :

A(−3 ; 2), B(3 ; 2,5), C(7 ; −2), D(1 ; −2,5).

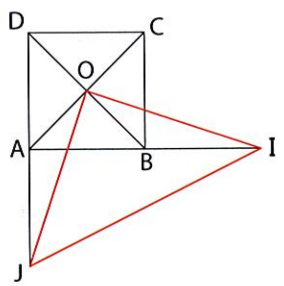
a) Démontrer que le quadrilatère ABCD est un parallélogramme.
b) Calculer les distances AB et AD.
Préciser la nature du quadrilatère ABCD.

80 Dans un repère orthonormé, on donne les points :

E(−3 ; −4), F(1 ; 2), G(−2 ; 4), H(−6 ; −2).

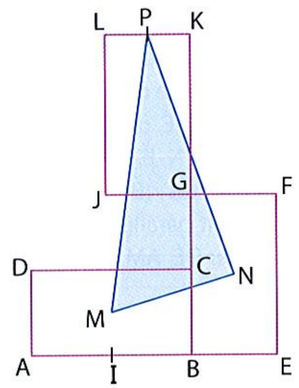
a) Démontrer que le quadrilatère EFGH est un parallélogramme.
b) Calculer les distances EG et FH.
Préciser la nature du quadrilatère EFGH.

81 ABCD est un carré de centre O.
I est le symétrique de A par rapport à B et J est le symétrique de D par rapport à A.



a) Utiliser le repère orthonormé (A ; B, D) pour démontrer que OIJ est un triangle rectangle isocèle en O.
b) Comparer les aires de ABCD et OIJ.

82 Une nouvelle marque souhaite créer son logo à partir des trois rectangles de côtés 1 cm et 2 cm, et du triangle dessinés ci-contre.



M est le centre du rectangle ABCD ;
N est le centre du rectangle BEFG ;
P et I sont les milieux respectifs des segments [LK] et [AB].
a) Déterminer les coordonnées des points de cette figure dans le repère orthonormé (A ; I, D).
b) Démontrer que le triangle MNP est rectangle en N.
c) Calculer les valeurs exactes du périmètre et de l'aire du triangle MNP.

S'entraîner à la logique

83 **Réciproque, contraposée** ▶ p. 339

Le théorème de Pythagore affirme que : « Si ABC est un triangle rectangle en A, alors $AB^2 + AC^2 = BC^2$ ».
a) Énoncer la réciproque du théorème de Pythagore.
b) Énoncer la contraposée du théorème de Pythagore.
c) AB = 5 cm, AC = 11 cm, BC = 12 cm.
Quelle implication parmi les trois précédentes permet de démontrer que le triangle ABC n'est pas rectangle ?

84 **Implication, équivalence** ▶ p. 339

La notation $P \Rightarrow Q$ signifie « Si P, alors Q ». Ce que l'on traduit par « P implique Q ».
La notation $P \Leftrightarrow Q$ signifie « P si, et seulement si, Q ». Ce que l'on traduit par « P équivaut à Q ».
Dans chaque cas, indiquer si $P \Rightarrow Q$ ou si $Q \Rightarrow P$ ou si $P \Leftrightarrow Q$.
a) P : ABCD est un losange.
Q : ABCD est un parallélogramme.
b) P : ABCD est un parallélogramme.
Q : [AC] et [BD] ont le même milieu.
c) P : AC = BD.
Q : ABCD est un rectangle.

Pour se tester

85 Dans chaque cas, donner **la** réponse exacte **sans justifier.**

		A	B	C	D
1	Un repère (O ; I, J) est orthonormé lorsque …	(OI) ⊥ (OJ)	OI = OJ	le triangle OIJ est isocèle	le triangle OIJ est rectangle isocèle en O
2	Dans un repère, les coordonnées du milieu de [AB] sont …	$\left(\frac{x_A - x_B}{2} ; \frac{y_A - y_B}{2}\right)$	$\left(\frac{x_A + y_A}{2} ; \frac{x_B + y_B}{2}\right)$	$\left(\frac{x_A + x_B}{2} ; \frac{y_A + y_B}{2}\right)$	$\left(\frac{x_B - x_A}{2} ; \frac{y_B - y_A}{2}\right)$
3	Dans un repère orthonormé, la distance AB est égale à …	$\sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$	$\sqrt{(x_A + x_B)^2 - (y_A + y_B)^2}$	$\sqrt{(y_A - x_A)^2 + (y_B - x_B)^2}$	$\sqrt{(x_A + y_A)^2 + (x_B + y_B)^2}$
4	Tout losange est …	un parallélogramme	un rectangle	un carré	inscriptible dans un cercle

86 Dans chaque cas, donner **la** ou **les** réponses exactes **sans justifier.**
Le plan est muni d'un repère orthonormé.

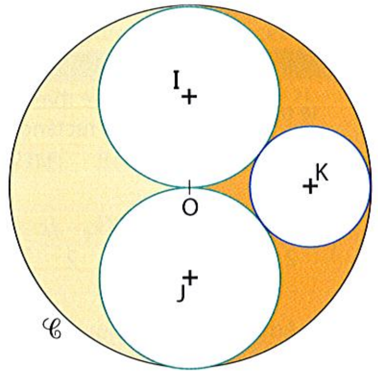
		A	B	C	D
1	A(−3 ; 4), B(3 ; 3), C(−1 ; −1), D(11 ; −3). Alors …	AB > CD	AB = CD	AB < CD	2AB = CD
2	A(−1 ; 4), B(5 ; 5), C(4 ; −1), D(−2 ; −2). ABCD est …	un parallélogramme	un losange	un rectangle	un carré
3	Les tangentes en deux points distincts d'un cercle peuvent être …	parallèles	perpendiculaires	sécantes	confondues
4	Un carré possède …	autant d'axes de symétrie qu'un rectangle	exactement 4 axes de symétrie	2 centres de symétrie	exactement 2 axes de symétrie

87 Dans chaque cas, donner **la** ou **les** réponses exactes **en justifiant.**
Le plan est muni d'un repère orthonormé.

		A	B	C	D
1	A(2 ; 2), B(6 ; 4), C(5 ; 1), D(9 ; 3) …	Si I est le milieu de [BC], alors $I\left(\frac{11}{2} ; \frac{5}{2}\right)$	Si J est le milieu de [AD], alors $J\left(\frac{11}{2} ; \frac{5}{2}\right)$	ABCD est un parallélogramme	ABDC est un parallélogramme
2	A(3 ; −2), B(7 ; −4), C(9 ; 0). Le triangle ABC est …	isocèle	rectangle	rectangle isocèle	équilatéral
3	Un quadrilatère ABCD tel que AC = BD et (AC) ⊥ (BD) peut être …	quelconque	un losange	un parallélogramme quelconque	un carré

Vérifiez vos réponses : p. 341

88 Avec un guide



Sur cette figure, 𝒞 est un cercle de centre O et de rayon 2,4 cm.
Tous les cercles tracés à l'intérieur de 𝒞 sont tangents au cercle 𝒞 et tangents deux à deux.
Les deux cercles verts de centres I et J ont le même rayon.

a) Calculer le rayon du cercle bleu de centre K.

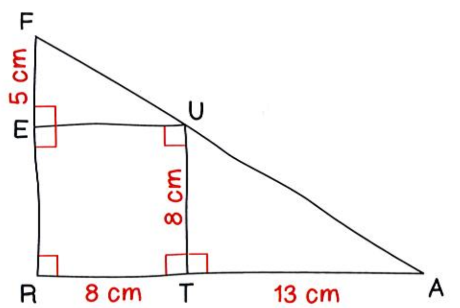
Conseil
Déterminer la nature de chacun des triangles IJK et IOK, puis déterminer le rayon du cercle bleu en résolvant une équation.

b) Calculer l'aire de la surface jaune.
c) En déduire l'aire de la surface orangée.

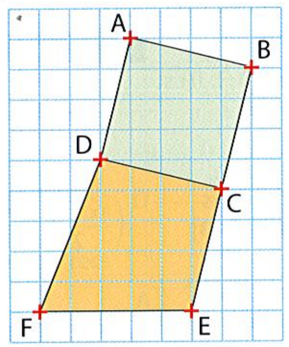
89 Narration de recherche — Étudier un alignement

Rédiger les différentes étapes de la recherche, sans omettre les fausses pistes et les changements de méthode.

Problème En utilisant les données portées sur cette figure à main levée, indiquer si les points A, F, U sont alignés ou non.



90 Travailler en groupe — Choisir un repère



Sur la figure ci-dessus, ABCD est un carré et CDFE est un quadrilatère tel que CE = CD et (CD) ⊥ (CE).

a) Chaque groupe fait le travail suivant :
- choisir un repère orthonormé à préciser ;
- indiquer les coordonnées des différents points de la figure ;
- comparer les coordonnées des milieux des segments [AE], [BF] et [CD].

b) Un rapporteur de chaque groupe expose les arguments du groupe.

91 Algo p. 326 et 328

Étudier la nature d'un triangle

Dans un repère orthonormé, on donne les points $A(x_A\,;y_A)$, $B(x_B\,;y_B)$, $C(x_C\,;y_C)$.

Variables : $a, b, c, x_A, y_A, x_B, y_B, x_C, y_C$, sont des nombres réels
Entrées : Saisir $x_A, y_A, x_B, y_B, x_C, y_C$
Traitement et sortie :
Affecter à c la valeur $\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$
Affecter à b la valeur $\sqrt{(x_C-x_A)^2+(y_C-y_A)^2}$
Affecter à a la valeur $\sqrt{(x_B-x_C)^2+(y_B-y_C)^2}$
Si $a=b$ ou $b=c$ ou $c=a$ alors
  Afficher " .... "
  Si $a^2=b^2+c^2$ ou $b^2=a^2+c^2$ ou $c^2=a^2+b^2$ alors
    Afficher " .... "
  Fin Si
Fin Si

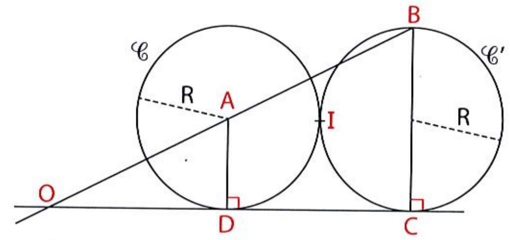
1. a) Que représente chacune des variables a, b, c ?
b) Compléter les affichages de l'algorithme ?
c) Le tester avec A(1 ; 5), B(9 ; –3), C(2 ; –2).

2. Compléter cet algorithme afin qu'il indique aussi les triangles équilatéraux.

Pour aller plus loin

92 Determine a length

Observe the figure below and prove that OD = 2R.



93 Inscrire un triangle dans un cercle

Dans un repère orthonormé, on donne les points :
A(6 ; 1), B(3 ; 5) et D(11 ; 11).

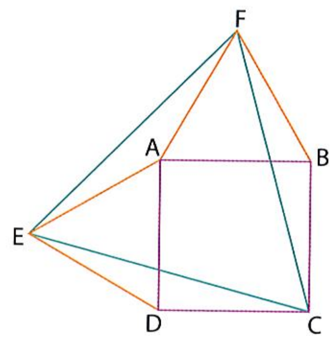
1. Quelle est la nature du triangle ABD ? Justifier.

2. On donne le point $C\left(\frac{17}{2}\,;6\right)$.

a) Démontrer que C est le milieu de [AD], puis que CA = CB = CD.
b) On note E le point de coordonnées (14 ; 7).
Le quadrilatère ABDE est-il un rectangle ? Justifier.

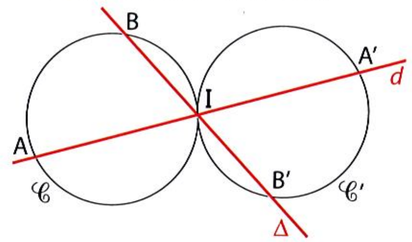
94 Imaginer une stratégie

Sur les côtés [AB] et [AD] d'un carré ABCD, on construit à l'extérieur de celui-ci, deux triangles équilatéraux AFB et AED.
Éléna affirme : « Le triangle CEF est équilatéral ».
Qu'en pensez-vous ?



95 Utiliser une symétrie

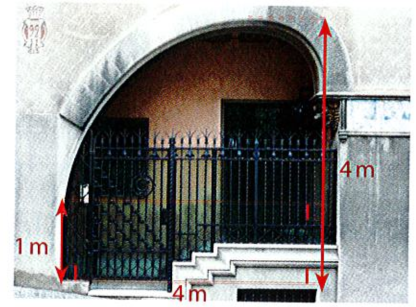
Deux cercles 𝒞 et 𝒞′ de même rayon, sont tangents extérieurement en un point I.
Deux droites d et Δ sécantes en I recoupent respectivement 𝒞 en A et B, et 𝒞′ en A′ et B′.



En utilisant la symétrie de centre I, démontrer que le quadrilatère ABA′B′est un parallélogramme.

96 L'arc rampant

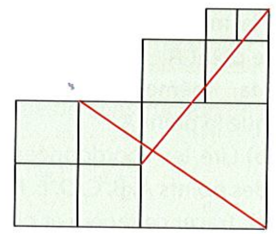
L'image ci-dessous montre un arc rampant. Il est formé de deux quarts de cercle de rayons différents.
Chaque quart de cercle possède, en ses extrémités, deux tangentes : l'une est verticale et l'autre est horizontale et commune aux deux quarts de cercle.



Représenter cet arc rampant à l'échelle $\frac{1}{50}$.
Laisser apparents les traits de construction.

97 Problème ouvert — Comparer des longueurs

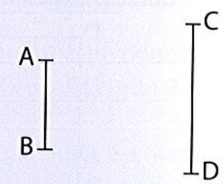
La figure ci-contre est constituée d'un assemblage de carrés.
Comparer les longueurs des segments tracés en rouge.



Des défis

98 Rechercher un ensemble de points

[AB] et [CD] sont les deux segments parallèles ci-contre.
Déterminer l'ensemble de tous les points qui sont les milieux d'un segment d'extrémités un point du segment [AB] et un point du segment [CD].



99 Utiliser des aires

Dans un repère orthonormé, on donne les points :
A(2 ; 0), B(6 ; 0), C(0 ; 3), D(0 ; 5).
Démontrer que les points A et D sont équidistants de la droite (BC).

Soutien — Repérer un point du plan, placer un point avec ses coordonnées

100 **Exercice test**

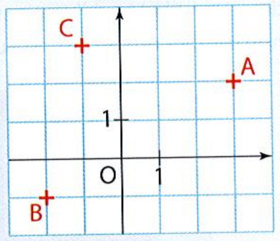
1. Lire ci-contre :

a) l'abscisse de A ;

b) l'ordonnée de A ;

c) les coordonnées de B et de C.

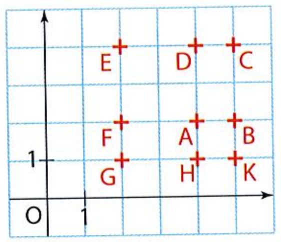
2. Tracer un repère et placer les points $D(2;-1)$ et $E\left(-2;\dfrac{5}{2}\right)$.



Appeler le professeur pour qu'il contrôle vos réponses et qu'il vous indique la suite.

101 **a)** Citer les points de la figure qui ont :

- la même abscisse que le point A ;
- la même ordonnée que le point A.



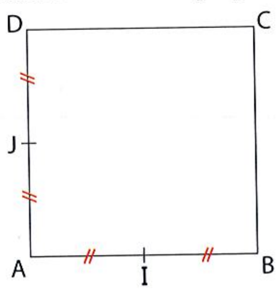
b) Lire les coordonnées des points A, B, C, D, E, F, G, H, K.

c) Tracer ce repère et placer le point :

- A' d'abscisse et d'ordonnée opposées à celles de A ;
- D' de même abscisse que D et d'ordonnée opposée à celle de D.

102 ABCD est un carré.

I et J sont les milieux des côtés [AB] et [AD].



a) Pourquoi le repère (A ; I, J) est-il orthonormé ?

b) Dans ce repère, lire les coordonnées des points de la figure.

c) Tracer cette figure et placer les points $E(1;1)$ et $F\left(\dfrac{1}{2};2\right)$ dans (A ; I, J).

Soutien — Calculer la distance entre deux points

103 **Exercice test**

Dans un repère orthonormé, on donne les points $A(-3;4)$ et $B(2;1)$.

a) Recopier et compléter :

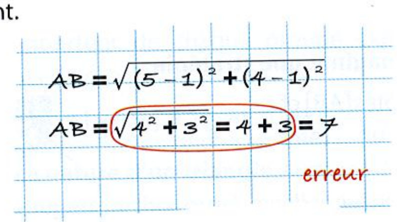
$AB=\sqrt{(\ldots-(\ldots))^2+(\ldots-\ldots)^2}$

$AB=\sqrt{\ldots^2+\ldots^2}=\sqrt{\ldots}$

b) Avec la calculatrice, donner une valeur approchée au dixième près de la distance AB.

Appeler le professeur pour qu'il contrôle vos réponses et qu'il vous indique la suite.

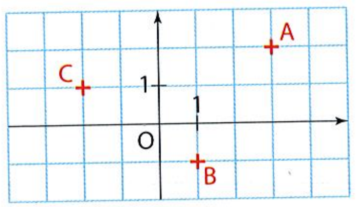
104 Un professeur demande de calculer la distance AB dans un repère orthonormé entre deux points A et B. Il est en train de corriger la copie de Laurent.



a) Indiquer l'erreur commise par Laurent.

b) Calculer correctement cette distance AB.

105 **a)** Lire les coordonnées des points A, B, C ci-dessous.



b) Calculer les distances BA et BC.

Que peut-on en déduire pour le triangle ABC ?

c) Calculer la distance AC.

d) Comparer les nombres AC^2 et BA^2+BC^2.

e) Que peut-on en déduire pour le triangle ABC ?

106 Dans un repère orthonormé, on donne les points $A(3;5)$, $B(-2;4)$, $C(8;6)$.

a) Calculer les distances AB et AC.

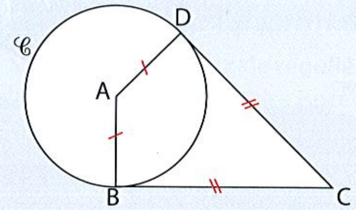
b) Vérifier que $BC=2\sqrt{26}$.

c) Que peut-on en déduire pour A, B, C ?

Soutien — Utiliser les propriétés des triangles, des quadrilatères, des cercles

107 **Exercice test**

Sur la figure ci-dessous, les droites (BC) et (CD) sont tangentes en B et D au cercle $\mathscr{C}$ de centre A. On donne AC = 13 et BC = 12.



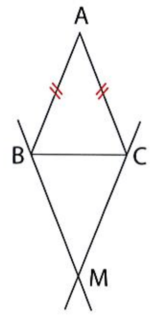
a) Quelle est la nature des triangles ABC et ADC ? Justifier.

b) Calculer le rayon du cercle $\mathscr{C}$.

Appeler le professeur pour qu'il contrôle vos réponses et qu'il vous indique la suite.

108 ABC est le triangle isocèle en A ci-contre.

La parallèle à (AC) passant par B et la parallèle à (AB) passant par C se coupent en M.



a) Quelle est la nature du quadrilatère ABMC ? Justifier.

b) En déduire que les droites (AM) et (BC) sont perpendiculaires.

109 $\mathscr{C}$ est un cercle de centre O et $\mathscr{C}'$ est un cercle de centre O' qui sont sécants en A et B.

E et F sont les points diamétralement opposés à A et B sur le cercle $\mathscr{C}$.

G et H sont les points diamétralement opposés à A et B sur le cercle $\mathscr{C}'$.

a) Construire une figure.

b) Quelle est la nature des quadrilatères ABEF et ABGH ? Justifier.

c) En déduire que EFGH est un rectangle.

110 $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ sont deux cercles de centre O et de rayons R = 4 cm et R' = 3 cm. [AC] est un diamètre de $\mathscr{C}$ et [BD] un diamètre de $\mathscr{C}'$ tels que $(AC)\perp(BD)$.

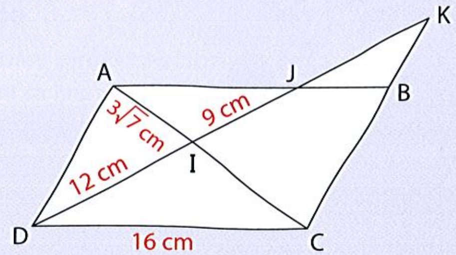
a) Montrer que ABCD est un losange.

b) Calculer l'aire, en cm², de ABCD.

Approfondissement — Construire une figure

111 Voici une figure à main levée où :

- ABCD est un parallélogramme ;
- les points D, I, J, K sont alignés ;
- $I\in[AC]$, $J\in[AB]$, $K\in(BC)$.



On se propose de construire cette figure avec les instruments de géométrie.

1. a) Démontrer que AJ = DI.

b) Calculer la longueur IC.

c) Calculer la longueur JK.

d) Démontrer que le triangle DIC est rectangle en I.

2. a) Rédiger un programme de construction de cette figure.

b) Construire cette figure à l'échelle $\dfrac{1}{2}$.

Approfondissement — Reconnaître un polygone particulier

112 Dans un repère orthonormé, on donne les points $A(11;-3)$, $B(8;-3+3\sqrt{3})$, $C(2;-3+3\sqrt{3})$.

a) Placer ces points.

b) Démontrer que le triangle ABC est isocèle en B.

c) Déterminer les coordonnées du point I tel que ABCI est un parallélogramme.

d) Démontrer que les points A, B et C sont situés sur un même cercle $\mathscr{C}$ et centre I.

e) Tracer ce cercle $\mathscr{C}$ et construire les points A', B', C' diamétralement opposés respectivement à A, B, C.

f) Quelle est la nature du polygone ABCA'B'C' ?