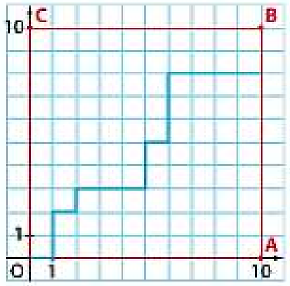
On envisage de simuler cette expérience à l'aide de la calculatrice programmable ou d'un logiciel.
Écrivez un algorithme indiquant :
– l'échec si aucun lancer n'a fait apparaître un 6 ;
– le nombre de coup(s) nécessaire(s) pour obtenir un 6.

Aide

Pour générer un nombre entier au hasard entre 1 et 6 :
– avec Casio : Int(6×Ran#) + 1
– avec T.I. : entAléat(1,6)
– avec Algobox : floor(6*random()) + 1

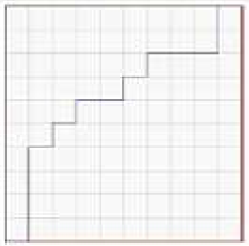
35 Des chemins aléatoires

On considère, dans un repère orthonormé d'origine O, le carré OABC dont les sommets A, B et C ont pour coordonnées : A(10 ; 0), B (10 ; 10) et C(0 ; 10).
On définit un chemin dans ce carré de la manière suivante :
– le chemin commence au point O ;
– les déplacements successifs, de longueur 1, ne se font que sur les mailles du quadrillage 10 × 10 du carré. Ils ne peuvent se faire que vers la droite ou vers le haut ;
– le chemin se termine sur le pourtour du carré, c'est-à-dire sur l'un des côtés [AB] ou [BC].



1. a) Justifier que la longueur ℓ d'un chemin ainsi défini est telle que $10 \leqslant \ell \leqslant 20$.
b) Quel est le lien entre la longueur ℓ du chemin et les coordonnées du point d'arrivée ?
2. L'algorithme suivant, écrit avec Algobox, a pour but la construction aléatoire d'un tel chemin et du calcul de sa longueur.
La direction à prendre est fixée par la donnée d'un nombre au hasard par le logiciel : random() renvoie un nombre de l'intervalle [0 ; 1[.
a) Repérez dans l'algorithme la direction prise suivant la valeur obtenue au hasard.
b) Complétez alors l'algorithme.

```
VARIABLES
  x EST_DU_TYPE NOMBRE
  y EST_DU_TYPE NOMBRE
  a EST_DU_TYPE NOMBRE
  longueur EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
  x PREND_LA_VALEUR 0
  y PREND_LA_VALEUR 0
  longueur PREND_LA_VALEUR 0
  TRACER_SEGMENT (0,0)->(10,0)
  TRACER_SEGMENT (10,0)->(10,10)
  TRACER_SEGMENT (10,10)->(0,10)
  TRACER_SEGMENT (0,10)->(0,0)
  TANT_QUE (x<10 ET y<10) FAIRE
    DEBUT_TANT_QUE
    a PREND_LA_VALEUR random()
    SI (a<0.5) ALORS
      DEBUT_SI
      x PREND_LA_VALEUR x+1
      TRACER_SEGMENT (x-1,y)->(x,y)
      FIN_SI
      SINON
        DEBUT_SINON
        y PREND_LA_VALEUR .........
        TRACER_SEGMENT ............
        FIN_SINON
    longueur PREND_LA_VALEUR .........
    FIN_TANT_QUE
  AFFICHER "La longueur du chemin est : "
  AFFICHER longueur
FIN_ALGORITHME
```



```
***Algorithme lancé***
La longueur du chemin est : 19
***Algorithme terminé***
```

3. a) Compte tenu de la remarque faite à la question **1.b)**, proposez une autre façon de calculer la longueur du chemin.
b) À quel endroit de l'algorithme devez-vous placer l'instruction concernant ce nouveau mode de calcul ?
4. Comment compléter cet algorithme afin qu'il indique aussi l'aire de la partie du carré située en dessous du chemin ?

Aide

Cette partie peut être considérée comme un « entassement » de rangées horizontales…

CHAPITRE 1

Second degré. Équations et inéquations

D'un siècle à un autre

Pendant toute la partie aérienne de son saut, le skieur n'est soumis qu'à son propre poids : il est en chute libre. L'équation de son mouvement est de degré 2 et la courbe qu'il décrit est une parabole (chronophotographie ci-dessus).
La découverte de la trajectoire parabolique est attribuée à Galilée, mais les travaux d'al-Khuwārizmī ont été déterminants pour la résolution des équations de degré 2.

En savoir plus sur al-Khuwārizmī

→ Chercheurs d'hier p. 35

Rappels & Questions-tests

Compléments numériques

Identités remarquables

- $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
- $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$
- Pour tout nombre k **positif** :
$$(\sqrt{k})^2 = k.$$

On en déduit la factorisation de certaines expressions. Ainsi :
$$x^2 - 3 = x^2 - (\sqrt{3})^2 = (x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3}).$$

1 Factorisez.

a) $x^2 - 9$ b) $x^2 - 5$ c) $36x^2 - 25$

d) $x^2 - \frac{3}{4}$ e) $(x+1)^2 - 7$

2 Développez.

a) $(x+3)^2$ b) $(2x-3)(4x+5)$ c) $\left(x - \frac{4}{7}\right)^2$

3 Justifiez que pour tout nombre x :

a) $(x+6)^2 - 10 = x^2 + 12x + 26$;

b) $x^2 + 3x - \frac{19}{4} = \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 - 7$.

Comparaison

- Pour tous nombres a et b **positifs** :
« $a < b$ » équivaut à « $a^2 < b^2$ ».
- Pour tous nombres a et b **négatifs** :
« $a < b$ » équivaut à « $a^2 > b^2$ ».

4 a) Prouvez que pour tout $x > \sqrt{3}$, $x^2 + 5 > 8$.

b) Prouvez que pour tout $x < -\sqrt{5}$, $x^2 - 1 > 4$.

Équations

1. « $A(x) \times B(x) = 0$ » équivaut à « $A(x) = 0$ ou $B(x) = 0$ ».
2. a est un nombre donné. L'équation $x^2 = a$:

- ne possède aucune solution si $a < 0$;
- possède une seule solution 0, si $a = 0$;
- possède deux solutions, $\sqrt{a}$ et $-\sqrt{a}$, si $a > 0$.

5 Résolvez les équations suivantes.

a) $(3x-4)(-2x+5) = 0$ b) $-3(x-1)(x+2) = 0$

c) $x^2 = 8$ d) $x^2 = -9$

e) $2x^2 + 3x = 0$ f) $x^2 - 9 = 0$

g) $(x+3)^2 - 4 = 0$

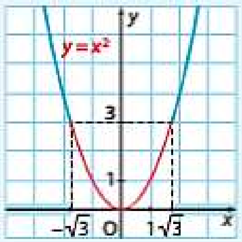
Inéquations liées à la fonction carré

- k est un nombre donné.

Pour résoudre des inéquations du type $x^2 > k$ ou $x^2 < k$, on peut utiliser la parabole représentant la fonction carré.

- Ainsi pour résoudre $x^2 > 3$, on utilise la figure ci-contre.

On lit l'ensemble des solutions sur l'axe des abscisses (en bleu) :
$]-\infty ; -\sqrt{3}[\cup]\sqrt{3} ; +\infty[$.



6 Résolvez les inéquations suivantes.

a) $x^2 > 5$

b) $x^2 < 3$

c) $x^2 \leqslant 8$

d) $x^2 < -2$

e) $x^2 - 9 < 0$

f) $x^2 > -12$

7 Vrai ou faux ?

a) Si $x^2 \geqslant 1$, alors $x \geqslant 1$.

b) Si $x^2 \leqslant 4$ et x négatif, alors $x < -2$.

Voir les corrigés p. 363

Activité 1 RÉSOLUTION D'ÉQUATIONS DU SECOND DEGRÉ

Vous avez déjà résolu des équations du second degré en utilisant une factorisation.
Examinons des cas plus complexes.

1 Résolution de l'équation $x^2 + 2x - 8 = 0$

Notre premier objectif est d'essayer de factoriser le trinôme $x^2 + 2x - 8$.

a) $x^2 + 2x$ est le début du développement d'un carré de la forme $(x+\alpha)^2$. Déterminez α.

b) Déduisez-en une expression du trinôme de la forme $(x+\alpha)^2 + \beta$.

c) Vérifiez que le nombre β est négatif et donc que le trinôme peut s'écrire sous la forme d'une différence de deux carrés. Factorisez alors le trinôme et résolvez l'équation.

2 Résolution de l'équation $2x^2 - 8x - 10 = 0$

On souhaite se ramener à une situation proche de la situation précédente. On observe que le coefficient 2 peut se mettre en facteur et que le trinôme peut s'écrire $2(x^2 - 4x - 5)$.

a) En utilisant la méthode vue précédemment, vérifiez que le trinôme peut s'écrire $2[(x-2)^2 - 3^2]$.

b) Factorisez alors le trinôme et résolvez l'équation.

3 Résolution de l'équation $x^2 + 4x + 5 = 0$

a) En utilisant la même méthode, justifiez que : $x^2 + 4x + 5 = 0$ équivaut à $(x+2)^2 + 1 = 0$.

b) Expliquez pourquoi cette équation n'a pas de solution.

Activité 2 FONCTION TRINÔME ET PARABOLE

TICE

1 Dans GeoGebra, créez trois curseurs :

- a, dans l'intervalle $[-10 ; 10]$ avec un incrément égal à 0,2 ;
- α et β, dans l'intervalle $[-30 ; 30]$ avec un incrément égal à 0,5.

2 Dans la fenêtre de saisie, tapez $f(x) = a*(x-\alpha)^2 + \beta$.

Quelle est la nature de la courbe lorsque a est non nul ?

3 Faites alors varier les trois curseurs et observez le comportement de la représentation graphique de f.

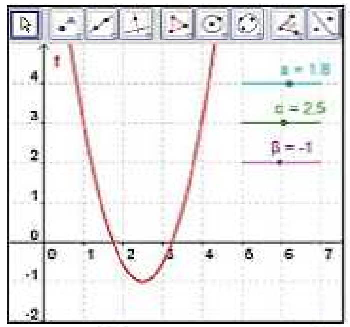
Que pouvez-vous conjecturer sur le lien entre :

a) la valeur de a et l'allure de la courbe ?

b) la valeur de α et la position du sommet de la courbe ?

c) la valeur de β et la position du sommet de la courbe ?

d) les valeurs de a et de β et le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$?



outil 1 outil 3

Problème ouvert

Refaites cet exercice après le chapitre … Est-il plus facile ?

Les mesures des côtés d'un triangle sont 3, 4 et 6. Est-il possible d'ajouter une même longueur à chacun de ses côtés pour obtenir un triangle rectangle ?

1 Fonction trinôme du second degré

1.1 Rappels

Définition 1 On appelle fonction trinôme du second degré, toute fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$ où a, b et c sont trois nombres connus, et $a \neq 0$.

Représentation graphique. Sens de variation

- La courbe représentative d'une fonction trinôme est une **parabole**.
- Pour le sens de variation, on admet les résultats suivants.

Vous trouverez dans le chapitre 4 les outils pour les démontrer.

Cas $a > 0$

x	$-\infty$	$-\dfrac{b}{2a}$	$+\infty$
$f(x)$	↘	m	↗

Cas $a < 0$

x	$-\infty$	$-\dfrac{b}{2a}$	$+\infty$
$f(x)$	↗	M	↘

1.2 Forme canonique

En classe de Seconde, vous avez rencontré diverses écritures d'un même polynôme du second degré. Par exemple :

- $2x^2 - 4x - 6$
- $2(x+1)(x-3)$
- $2(x-1)^2 - 8$

Nous verrons page 28 l'exploitation de la forme la plus adéquate en vue de la résolution d'un problème. On s'intéresse ici à la troisième forme, dite canonique.

Théorème 1 Tout trinôme du second degré $f(x) = ax^2 + bx + c$ (avec $a \neq 0$) s'écrit sous la forme $a(x-\alpha)^2 + \beta$, avec $\alpha = -\dfrac{b}{2a}$. Cette forme est appelée **forme canonique**.

Démonstration. Puisque $a \neq 0$, $f(x) = a\left(x^2 + \dfrac{b}{a}x\right) + c$.

Entre parenthèses, on reconnaît le début du développement de $\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2$. En effet :

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}.$$

On en déduit que $x^2 + \dfrac{b}{a}x = \left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{b^2}{4a^2}$.

Il en résulte que
$$f(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2}\right] + c$$
$$= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c$$
$$= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{-b^2 + 4ac}{4a}.$$

En posant $\alpha = -\dfrac{b}{2a}$ et $\beta = \dfrac{-b^2 + 4ac}{4a}$, on obtient $f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$.

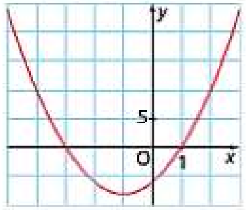
Remarque. Le sommet de la parabole représentative de la fonction trinôme f a pour coordonnées $(\alpha\,;\beta)$.

2 Équation du second degré

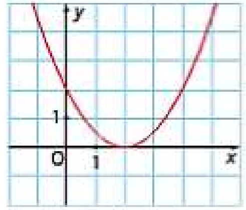
Résoudre l'équation $ax^2 + bx + c = 0$, $(a \neq 0)$, c'est trouver (s'il en existe) tous les nombres qui vérifient cette égalité. Un tel nombre est dit **solution** de l'équation et **racine** du trinôme $ax^2 + bx + c$.

2.1 Approche graphique

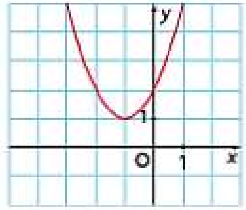
On se limite ici au **cas $a > 0$**.



$f(x) = 2x^2 + 4x - 6$



$f(x) = \dfrac{1}{2}(x-2)^2$



$f(x) = x^2 + 2x + 2$

La représentation graphique d'une fonction trinôme f permet de conjecturer le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$. Dans ces trois exemples, par simple lecture, on conjecture respectivement deux solutions, une solution et aucune solution.

2.2 Résolution de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$, $(a \neq 0)$

Théorème 2 Le nombre de solutions de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$, $(a \neq 0)$, dépend du signe du nombre **Δ égal à $b^2 - 4ac$**. Ce nombre Δ est appelé **discriminant** du trinôme $ax^2 + bx + c$.

$\Delta < 0$	$\Delta = 0$	$\Delta > 0$
pas de solution	Une solution dite « double » : $x_0 = -\dfrac{b}{2a} = \alpha$	Deux solutions distinctes : $x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

Démonstration.

Posons $\Delta = b^2 - 4ac$ et reprenons la forme canonique vue au paragraphe **1.2**.

$$f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{-b^2 + 4ac}{4a} = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a} = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right]$$

$f(x) = a\left[\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{\Delta}{4a^2}\right]$. Cette forme **$a[(x-\alpha)^2 + \gamma]$** est aussi appelée **forme canonique**.

- **Si $\Delta < 0$**, alors $-\dfrac{\Delta}{4a^2}$ est strictement positif. Il en est de même pour l'expression entre crochets. $f(x)$ est le produit de deux facteurs non nuls : l'équation $f(x) = 0$ n'a pas de solution.
- **Si $\Delta = 0$**, alors $f(x) = a\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2$. Ainsi, puisque $a \neq 0$, $f(x) = 0$ équivaut à $x + \dfrac{b}{2a} = 0$. L'équation $f(x) = 0$ a une solution et une seule : $x = -\dfrac{b}{2a}$.
- **Si $\Delta > 0$**, alors $\Delta = (\sqrt{\Delta})^2$ et $f(x) = a\left[\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{(\sqrt{\Delta})^2}{4a^2}\right] = a\left(x + \dfrac{b}{2a} + \dfrac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x + \dfrac{b}{2a} - \dfrac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)$.

Ainsi, puisque $a \neq 0$, $f(x) = 0$ équivaut à $\left(x + \dfrac{b}{2a} + \dfrac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right) = 0$ ou $\left(x + \dfrac{b}{2a} - \dfrac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right) = 0$. L'équation $f(x) = 0$ a deux solutions $x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$.

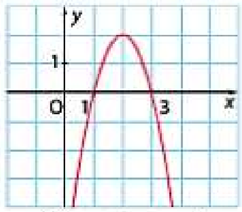
Forme factorisée. Cette démonstration nous permet d'obtenir une factorisation de $f(x)$ lorsque $\Delta \geqslant 0$:

- si $\Delta = 0$, $f(x) = a(x - x_0)^2$;
- si $\Delta > 0$, $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$.

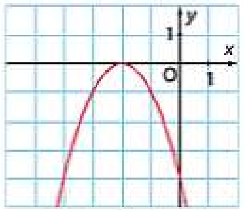
3 Signe du trinôme

3.1 Approche graphique

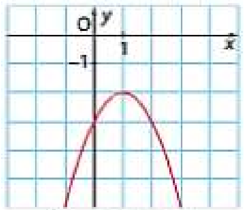
On se limite, ici, au cas $a < 0$.



$f(x) = -2x^2 + 8x - 6$



$f(x) = -x^2 - 4x - 4$



$f(x) = -x^2 + 2x - 3$

Ces représentations graphiques nous permettent de conjecturer que :

- les solutions de l'inéquation $-2x^2 + 8x - 6 \geqslant 0$ sont les nombres de l'intervalle $[1\,;3]$;
- l'inéquation $-x^2 - 4x - 4 \geqslant 0$ n'a qu'une solution : le nombre -2 ;
- le trinôme $-x^2 + 2x - 3$ est toujours strictement négatif.

3.2 Résolution algébrique

On sait étudier le signe d'un produit de facteurs (du premier degré). Or nous avons vu, dans la démonstration du théorème 2, les cas où la factorisation de $f(x)$ est possible.

$\Delta < 0$	$\Delta = 0$	$\Delta > 0$
pas de factorisation	$ax^2 + bx + c = a(x - x_0)^2$ avec $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$	$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$ avec $x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$

Théorème 3 **Signe du trinôme**

$f(x) = ax^2 + bx + c$, $(a \neq 0)$, est un trinôme du second degré.

$\Delta < 0$	$\Delta = 0$	$\Delta > 0$
$f(x)$ est du signe de a	$f(x)$ est du signe de a (et nul pour $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$)	$f(x)$ est du signe de a **sauf** lorsque x est entre les racines x_1 et x_2, auquel cas $f(x)$ et a sont de signes contraires.

Démonstration.

Reprenons la forme du trinôme : $f(x) = a\left[\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{\Delta}{4a^2}\right]$.

- Si $\Delta < 0$, alors l'expression entre crochets est strictement positive donc $f(x)$ est du signe de a.
- Si $\Delta = 0$, alors $f(x) = a\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2$. Pour tout $x \neq -\dfrac{b}{2a}$, l'expression entre parenthèses est strictement positive, donc $f(x)$ est du signe de a.
- Si $\Delta > 0$, alors $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$; $f(x)$ est un produit de trois facteurs.

L'un est constant et les deux autres sont des binômes du premier degré dont on sait étudier le signe selon la valeur x.

En notant x_1 la plus petite des racines, on obtient le tableau suivant :

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
a		signe de a		signe de a		signe de a	
$x - x_1$		$-$	0	$+$		$+$	
$x - x_2$		$-$		$-$	0	$+$	
$(x - x_1)(x - x_2)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		signe de a		signe de $(-a)$		signe de a	

En résumé, le trinôme $ax^2 + bx + c$ est toujours du signe de a, sauf pour les valeurs de x comprises entre les racines, lorsqu'il en possède.

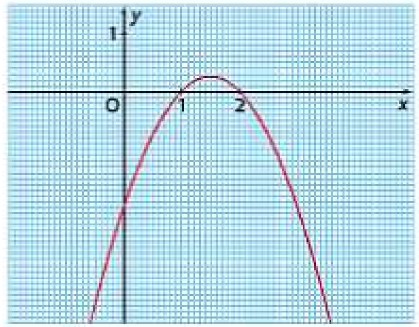
3.3 Application à la résolution d'inéquations

Pour résoudre une inéquation du second degré, on détermine le signe du trinôme associé.

Animation

Exemple. Résolution de $-x^2 + 3x - 2 \geqslant 0$

Graphiquement, à l'aide de la représentation de la fonction trinôme $f(x) = -x^2 + 3x - 2$, on peut conjecturer que les solutions de l'inéquation sont les nombres de l'intervalle $[1\,;2]$.



Le calcul du discriminant conduit à $\Delta = 1$. Le trinôme a deux racines, $x_1 = 1$ et $x_2 = 2$.

Le coefficient a est négatif ($a = -1$). Le trinôme est donc positif (du signe contraire de a) entre les racines.

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$-x^2 + 3x - 2$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Ceci confirme que l'ensemble des solutions est l'intervalle fermé $[1\,;2]$.

Application

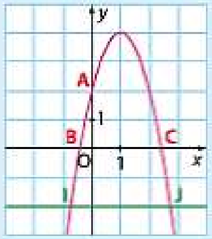
Compléments numériques

OBJECTIF 1 Utiliser les différentes formes d'un trinôme

Un trinôme du second degré peut s'écrire sous plusieurs formes.
- La forme réduite et développée : $ax^2 + bx + c$.
- La forme canonique : $a(x - \alpha)^2 + \beta$.
- La forme factorisée (si elle existe) : $a(x - x_1)(x - x_2)$ ou $a(x - x_0)^2$.

EXERCICE RÉSOLU A Choisir une forme appropriée pour résoudre un problème

La courbe ci-contre est la représentation graphique de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -2x^2 + 4x + 2$.



1. a) Déterminez la forme canonique de $f(x)$.
b) Déduisez-en une forme factorisée.

2. Choisissez la forme la plus appropriée de $f(x)$ pour répondre aux questions suivantes.
a) Calculez les coordonnées des points A, B et C.
b) Calculez les abscisses des points I et J.

Méthode

1. a) On met $a = -2$ en facteur.
- On considère $x^2 - 2x$ comme le début du développement d'un carré.
- On en déduit la forme canonique.

b) $(x - 1)^2 - 2$ est de la forme : $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$.

2. a) On connaît l'abscisse de A, qui est zéro, donc l'ordonnée de A est $f(0)$.
- Les points B et C ont pour ordonnée zéro.

b) Les points I et J ont pour ordonnée -2.
- Graphiquement, on voit que la plus petite des deux solutions est l'abscisse du point I.

Solution

1. a) $f(x) = -2[x^2 - 2x - 1]$.
$x^2 - 2x = (x - 1)^2 - 1$.
Donc $f(x) = -2[(x - 1)^2 - 2]$ (1).

b) $(x - 1)^2 - 2 = [(x - 1) - \sqrt{2}][(x - 1) + \sqrt{2}]$ donc :
$f(x) = -2(x - 1 - \sqrt{2})(x - 1 + \sqrt{2})$ (2).

2. a) La forme développée donne $f(0) = 2$.
x_B et x_C sont les solutions de l'équation $f(x) = 0$. La forme factorisée (2) donne :
$x_B = 1 - \sqrt{2}$ et $x_C = 1 + \sqrt{2}$ (car $x_B < x_C$).

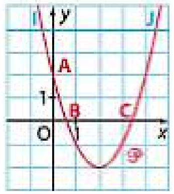
b) x_I et x_J sont les solutions de l'équation $f(x) = -2$. Soit avec la forme canonique (1) :
$-2[(x - 1)^2 - 2] = -2$
donc $(x - 1)^2 - 2 = 1$ ou $(x - 1)^2 - 3 = 0$.
Il en résulte que $x - 1 = -\sqrt{3}$ ou $x - 1 = \sqrt{3}$ soit :
$x_I = 1 - \sqrt{3}$ et $x_J = 1 + \sqrt{3}$.

Mise en pratique

1 Dans chacun des cas suivants, écrivez le trinôme $f(x)$ sous sa forme canonique.
a) $f(x) = x^2 + 6x$. **b)** $f(x) = -3x^2 + 6x - 2$.
c) $f(x) = x^2 + x - 1$. **d)** $f(x) = 2x(x - 3)$.

2 f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
$f(x) = x^2 + 3x - 2$.
1. Écrivez $f(x)$ sous sa forme canonique.
2. Déduisez-en que pour tout nombre x, $f(x) \geqslant -\frac{17}{4}$.

3 $\mathscr{P}$ est la courbe représentative de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 4x + 2$.



1. a) Quelle est la forme canonique de $f(x)$?
b) Déduisez-en une forme factorisée.
2. Calculez les coordonnées des points A, B, C, I et J.

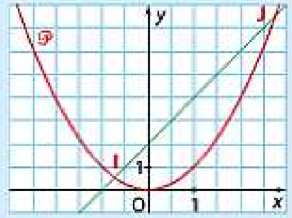
OBJECTIF 2 Résoudre une équation du second degré

Théorème 2. Le nombre de solutions de l'équation du second degré $ax^2 + bx + c = 0$, $(a \neq 0)$, dépend du signe du discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$.
- Si $\Delta > 0$, l'équation a deux solutions : $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$.
- Si $\Delta = 0$, l'équation a une solution « double » : $x_0 = \frac{-b}{2a}$.
- Si $\Delta < 0$, l'équation n'a pas de solution.

EXERCICE RÉSOLU B

1. Résolvez les équations suivantes.
a) $x^2 - 3x = 0$ **b)** $2x^2 - 12x + 18 = 0$ **c)** $x^2 - 3x + 7 = 0$

2. Sur la figure ci-contre, on a tracé la parabole $\mathscr{P}$ d'équation $y = x^2$ et la droite d d'équation $y = 2x + 2$.
Quelles sont les coordonnées des points I et J ?



Méthode

1. a) et **b)** Le calcul de Δ ne doit pas se faire de manière systématique. Il est inutile si, dans l'équation $ax^2 + bx + c = 0$, $b = 0$ ou $c = 0$ ou encore si l'on reconnaît une identité remarquable.
c) On calcule $\Delta = b^2 - 4ac$.

2. On utilise les équations des courbes.
- Pour résoudre l'équation $x^2 - 2x - 2 = 0$, on calcule Δ.
- On conclut. En observant la figure, on en déduit que la plus petite solution est l'abscisse de I.

Solution

1. a) Après factorisation, l'équation s'écrit $x(x - 3) = 0$. D'où les solutions $x = 0$ et $x = 3$.
b) $2x^2 - 12x + 18 = 2(x^2 - 6x + 9) = 2(x - 3)^2$ donc l'équation a une seule solution $x = 3$.
c) $\Delta = (-3)^2 - 4 \times 1 \times 7 = 9 - 28 = -19$.
$\Delta < 0$, l'équation n'a donc pas de solution.

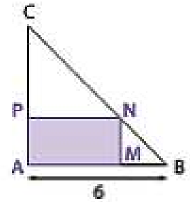
2. I et J appartiennent à la fois à $\mathscr{P}$ et d donc leurs coordonnées vérifient le système :
$\begin{cases} y = x^2 \\ y = 2x + 2 \end{cases}$ soit $\begin{cases} y = x^2 \\ x^2 - 2x - 2 = 0 \end{cases}$
On résout l'équation $x^2 - 2x - 2 = 0$.
$\Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times (-2) = 4 + 8 = 12 = (2\sqrt{3})^2$.
L'équation a donc deux solutions :
$x_1 = \frac{2 + 2\sqrt{3}}{2} = 1 + \sqrt{3}$ et $x_2 = \frac{2 - 2\sqrt{3}}{2} = 1 - \sqrt{3}$.
I a pour abscisse $1 - \sqrt{3}$ et pour ordonnée $2(1 - \sqrt{3}) + 2$, soit $4 - 2\sqrt{3}$. De même, J a pour abscisse $1 + \sqrt{3}$ et pour ordonnée $4 + 2\sqrt{3}$.

Mise en pratique

4 Résolvez les équations suivantes, sans calculer le discriminant.
a) $7x^2 + 8x = 0$ **b)** $6 - x^2 = 0$
c) $(x + 3)^2 = 25$ **d)** $x^2 - 10x + 25 = 0$

5 Résolvez les équations suivantes.
a) $x^2 - 5x + 2 = 0$ **b)** $-3t^2 - 8t + 2 = 0$
c) $-7t^2 + t - 1 = 0$ **d)** $-3x^2 + 2\sqrt{3}x - 1 = 0$

6 ABC est un triangle rectangle isocèle tel que :
AB = AC = 6.
M est un point du segment [AB] tel que BM = x, avec $0 < x < 6$.
Pour quelles valeurs de x l'aire du rectangle AMNP est-elle égale à $\frac{1}{3}$ aire (ABC) ?



OBJECTIF 3 Étudier le signe d'un trinôme. Résoudre une inéquation

Le trinôme $ax^2 + bx + c$, $(a \neq 0)$, est du signe de a, sauf entre les racines lorsqu'il en possède.

EXERCICE RÉSOLU C Exploiter une factorisation

Résolvez chacune des inéquations du second degré suivantes.

a) $4x - 2x^2 < 0$ b) $(x+3)(x+1) \leqslant 2x + 6$

Méthode

Pour ces inéquations du second degré, une factorisation s'obtient sans calcul de Δ.

a) On factorise $f(x)$ et on en déduit ses racines.

• On cherche le signe du coefficient de x^2 et on en déduit le signe de $f(x)$.

• On conclut.

b) On reconnaît un facteur commun : $(x+3)$. On factorise et on en déduit les racines.

• En développant mentalement le produit de facteurs, on trouve le signe du coefficient de x^2.

• On conclut.

Solution

a) Notons $f(x) = 4x - 2x^2$.
Résoudre l'inéquation $4x - 2x^2 < 0$ revient à déterminer les valeurs de x pour lesquelles $f(x)$ est strictement négatif.

$f(x) = 2x(2 - x)$, produit nul pour 0 et 2.
Le coefficient de x^2 est négatif $(a = -2)$.
On résume le signe de $f(x)$ ainsi :

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

L'inéquation $4x - 2x^2 < 0$ a pour ensemble des solutions $S =]-\infty ; 0[\cup]2 ; +\infty[$.

b) L'inéquation est équivalente à :
$$(x+3)(x+1) - (2x+6) \leqslant 0 \quad (1).$$
Notons $f(x) = (x+3)(x+1) - (2x+6)$.
Résoudre l'inéquation (1) revient à déterminer les valeurs de x pour lesquelles $f(x)$ est négatif ou nul.

$f(x) = (x+3)(x+1) - (2x+6)$
$= (x+3)(x+1) - 2(x+3)$
$= (x+3)(x+1-2) = (x+3)(x-1)$,
produit nul pour -3 et 1.

Le coefficient de x^2 est positif, $(a = 1)$.
On en déduit le signe de $f(x)$.

x	$-\infty$		-3		1		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

L'ensemble des solutions est $S = [-3 ; 1]$.

Mise en pratique

7 Résolvez les inéquations suivantes.

a) $(1 - 2x)(3 + 5x) \geqslant 0$

b) $(2x - 3)(x + 2) < 0$

c) $-3x^2 - 5x < 0$

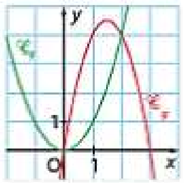
8 Résolvez les inéquations suivantes :

a) $16 - (2x - 1)^2 \leqslant 0$

b) $(2x - 1)(x + 5) < 3x + 15$

c) $(x - 7)^2 \leqslant (2x - 1)^2$

9 $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ sont les représentations graphiques des fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par :
$f(x) = x^2$ et $g(x) = 6x - 2x^2$.



1. Conjecturez graphiquement l'ensemble des réels x pour lesquels $\mathscr{C}_g$ est au-dessus de $\mathscr{C}_f$.

2. Résolvez le problème par le calcul.

EXERCICE RÉSOLU D Signe d'un trinôme et résolution d'une inéquation

Animation

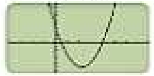
f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^2 - 9x + 4$.

1. Conjecturez le signe de $f(x)$ puis étudiez ce signe.

2. Résolvez l'inéquation $f(x) < 0$.

Méthode

1. On peut utiliser la calculatrice pour tracer la parabole représentant la fonction et conjecturer la réponse.



• On détermine le signe du discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$.

• On connaît le signe du coefficient de x^2 donc on peut dresser le tableau du signe de $f(x)$.

• On conclut.

2. Pour connaître l'ensemble des solutions de l'inéquation $f(x) < 0$, on exploite le tableau donnant le signe de $f(x)$.

Solution

1. On conjecture que $f(x) < 0$ pour $x \in]x_1 ; x_2[$ où x_1 et x_2 sont les racines de $f(x)$.

• $\Delta = (-9)^2 - 4 \times 2 \times 4 = 81 - 32 = 49$.
$\Delta > 0$, donc le trinôme $f(x)$ a deux racines :
$$x_1 = \frac{9-7}{4} = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{9+7}{4} = 4.$$

• Le coefficient de x^2 est positif $(a = 2)$ donc :

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		4		$+\infty$
signe de $f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$f(x) > 0$ pour $x \in \left]-\infty ; \frac{1}{2}\right[\cup]4 ; +\infty[$.

$f(x) \leqslant 0$ pour $x \in \left[\frac{1}{2} ; 4\right]$.

2. D'après le tableau, $f(x) < 0$ signifie que $\frac{1}{2} < x < 4$. Donc $f(x) < 0$ équivaut à $x \in \left]\frac{1}{2} ; 4\right[$.
L'ensemble des solutions est :
$$S = \left]\frac{1}{2} ; 4\right[.$$

Mise en pratique

10 Dans chacun des cas suivants, dressez le tableau du signe du trinôme.

a) $x^2 + x - 2$ b) $-x^2 + 2x - 3$

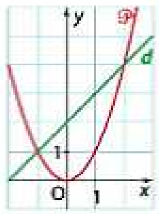
c) $100t^2 - 60t + 9$ d) $-2x^2 + 5x - 3$

11 Résolvez les inéquations suivantes.

a) $x^2 + x - 20 \leqslant 0$ b) $x^2 - x + 1 < 0$

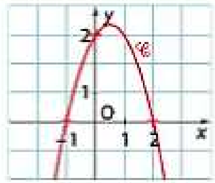
c) $x^2 + 7x + 12 \geqslant 0$ d) $7x^2 - 5x + 1 > 0$

12 Sur la figure, on a tracé la parabole $\mathscr{P}$ d'équation $y = x^2$ et la droite d d'équation $y = x + 2$.



Quel est l'ensemble des nombres x pour lesquels la parabole $\mathscr{P}$ est en dessous de la droite d ?

13 $\mathscr{C}$ est la représentation graphique d'une fonction trinôme définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$.



1. Quel est le signe de a ? Quel est le signe du discriminant ?

2. Résolvez graphiquement $f(x) \geqslant 0$.

3. Expliquez pourquoi $f(x) = -\frac{3}{2}(x+1)(x-2)$.

14 1. Résolvez l'inéquation $x^2 - 40x + 384 \leqslant 0$.

2. Application

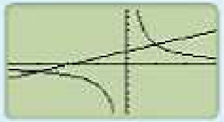
Une pelouse de forme rectangulaire a pour périmètre 80 m. Quelles sont les dimensions possibles de cette pelouse pour que sa superficie soit supérieure ou égale à 384 m² ?

EXERCICES

EXERCICE RÉSOLU E Résoudre une équation et une inéquation où l'inconnue figure au dénominateur

Sur la vue d'écran ci-contre apparaissent (en partie) les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ représentatives des fonctions f et g définies par :

$$f(x) = x + 2 \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{3}{x} \ (x \neq 0).$$



Déterminez par le calcul :

a) les abscisses des points communs aux deux courbes ;

b) les valeurs de x pour lesquelles la courbe $\mathscr{C}_f$ est au-dessus de $\mathscr{C}_g$.

Méthode / Solution

Méthode a) On traduit algébriquement le problème.

Solution a) Les abscisses des points communs aux deux courbes sont les solutions de l'équation $x + 2 = \frac{3}{x}$, avec $x \neq 0$.

x est un nombre non nul.

Méthode • On transpose dans le premier membre et on réduit au même dénominateur.

Aide
Pour résoudre une équation où l'inconnue figure au dénominateur, on peut se ramener à $\frac{A(x)}{B(x)} = 0$, qui équivaut à $A(x) = 0$ et $B(x) \neq 0$.

Solution $x + 2 - \frac{3}{x} = 0$ équivaut à $\frac{x(x+2)-3}{x} = 0$

soit encore à $\frac{x^2+2x-3}{x} = 0$.

Notons $A(x) = x^2 + 2x - 3$. Le discriminant de $A(x)$ est 16 d'où les solutions :

$x = 1$ et $x = -3$.

$B(x) = x$ donc $B(x) \neq 0$ (car $x \neq 0$).

Méthode • On conclut.

Solution Les abscisses cherchées sont donc -3 et 1.

Méthode b) On traduit algébriquement le problème.

Solution b) Dire que $\mathscr{C}_f$ est au-dessus de $\mathscr{C}_g$ équivaut à dire que $f(x) \geqslant g(x)$, $x \neq 0$, soit $x + 2 \geqslant \frac{3}{x}$, $x \neq 0$.

Méthode • On se ramène à une inéquation du type : $\frac{A(x)}{B(x)} \geqslant 0$, c'est-à-dire à une inéquation dont le second membre est zéro.

Solution D'après les résultats de la question a), l'inéquation s'écrit : $\frac{x^2+2x-3}{x} \geqslant 0$.

Méthode • On dresse un tableau de signes.

x	$-\infty$		-3		0		1		$+\infty$
$A(x)$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$B(x)$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$\frac{A(x)}{B(x)}$		$-$	0	$+$	‖	$-$	0	$+$	

Méthode • On conclut.

Solution L'ensemble des solutions est :

$S = [-3\,;0[\cup [1\,;+\infty[$.

Mise en pratique

Pour les exercices 15 à 17

a) Déterminez les abscisses des points d'intersection des courbes représentatives des fonctions f et g.

b) Étudiez leur position relative.

15 $f(x) = x + 1$ et $g(x) = \frac{1}{x}$ $(x \neq 0)$.

16 $f(x) = 3x - 4$ et $g(x) = \frac{1}{x}$ $(x \neq 0)$.

17 $f(x) = \frac{1}{x-1}$ et $g(x) = \frac{x+1}{x-2}$ $(x \neq 1\,; x \neq 2)$.

Pour les exercices 18 à 21

Résolvez l'inéquation proposée.

18 $\frac{x^2+x-2}{x^2-9} \leqslant 0$.

19 $\frac{x+1}{x^2-3x+2} \leqslant 1$.

20 $\frac{1}{x+2} + \frac{3}{x} \leqslant -2$.

21 $\frac{x-1}{x+1} \geqslant \frac{2x-5}{x-1}$.

Pour se tester

Exercices interactifs

22 Questions sur le cours

Complétez les propositions suivantes.

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$.

1. Le nombre $b^2 - 4ac$ s'appelle ……

2. La courbe représentative de f est une ……

3. L'équation $ax^2 + bx + c = 0$ possède une seule solution si Δ est ……

4. Toute solution de l'équation $f(x) = 0$ est une …… du trinôme $ax^2 + bx + c$.

5. $\Delta = b^2 - 4ac$; si $\Delta < 0$, le signe de $f(x)$ est le même que celui de ……

23 Vrai ou faux

Les affirmations sont-elles vraies ou fausses ? Justifiez votre réponse.

1. 2 et -3 sont les racines du trinôme $-5x^2 + 13x - 6$.

2. Le trinôme $ax^2 + x - a$ $(a \neq 0)$ possède toujours deux racines distinctes.

3. La parabole d'équation $y = 10x^2 - x - 0{,}2$ est située entièrement au-dessus de l'axe des abscisses.

4. La forme canonique du trinôme $-2x^2 + 2x - 5$ est $-2\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{11}{2}$.

24 QCM Une seule réponse exacte

Pour chaque affirmation, une seule réponse est exacte. Identifiez-la en justifiant votre réponse.

1. $]-\infty\,; 2] \cup [5\,; +\infty[$ est l'ensemble des solutions de l'inéquation :

a) $(x-2)(x-5) > 0$

b) $-x^2 + 7x - 10 > 0$

c) $(x-2)(x-5) \geqslant 0$

2. L'ensemble des solutions de $6x^2 + x - 2 < 0$ est :

a) $\left[-\frac{2}{3}\,; \frac{1}{2}\right]$ b) $\left]-\frac{1}{2}\,; \frac{2}{3}\right[$ c) $\left]-\frac{2}{3}\,; \frac{1}{2}\right[$.

3. a est un réel $(a > 0)$. Le trinôme $ax^2 - 6x - 6$:

a) a deux racines distinctes.

b) a pour forme canonique $a\left[\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - 6 + \frac{9}{a^2}\right]$.

c) a pour racine $-\frac{1}{2}$ si $a = 10$.

4. L'équation $5x^2 - 6x + \frac{9}{5} = 0$:

a) n'a pas de solution. b) a une solution.

c) a deux solutions.

25 QCM Au moins une réponse exacte

Pour chaque affirmation, plusieurs réponses peuvent être exactes. Identifiez-les en justifiant votre réponse.

1. f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -10x^2 + 5x - 1$.

a) Pour tout nombre x, $f(x) \leqslant -0{,}375$.

b) Le discriminant Δ est négatif.

c) Le sommet de la parabole représentative de f a pour abscisse $\frac{1}{4}$.

d) La forme canonique de $f(x)$ est $-10(x + 0{,}25)^2 - 65$.

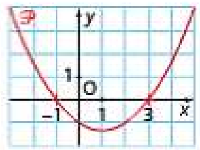
2. f est la fonction définie par $f(x) = ax^2 + bx + c$, $(a \neq 0)$.

a) Si $ac < 0$, alors le trinôme $f(x)$ a deux racines.

b) Si $b = 0$, le trinôme $f(x)$ a deux racines opposées.

c) Si $a + b + c = 0$, alors $x = 1$ est solution de l'équation $f(x) = 0$.

3. $\mathscr{P}$ est la courbe représentative d'une fonction f.



a) $f(x)$ est de la forme : $a(x^2 - 2x - 3)$ avec $a > 0$.

b) La valeur minimale de $f(x)$ est $-4a$.

c) Si le point $A(0\,; -1)$ est un point de la parabole, alors $f(x) = \frac{(x+1)(x-3)}{3}$.

4. Le trinôme $-3x^2 + x - 1$ est strictement négatif pour :

a) tout nombre x. b) aucun nombre x.

c) tout nombre de l'intervalle $]-5\,; 4[$.

→ Voir les corrigés p. 366

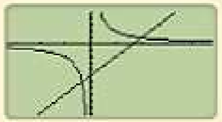
Apprendre à chercher

26 Position relative de deux courbes

Dans un repère (O ; I, J), d est la droite d'équation $y = 3x - 5$ et $\mathscr{H}$ l'hyperbole d'équation $y = \frac{2}{x}$, $(x \neq 0)$.

Objectif Étudier suivant les valeurs de x la position relative de $\mathscr{H}$ et d.

1. Une représentation graphique de $\mathscr{H}$ et de d, éventuellement à l'aide de la calculatrice, permet de conjecturer la réponse.



Quelle conjecture faites-vous concernant la position relative de ces deux courbes ?

2. Dire que d est au-dessus de $\mathscr{H}$ équivaut à dire que $3x - 5 \geqslant \frac{2}{x}$. On est donc amené à résoudre cette inéquation sur ℝ privé de zéro.

Démontrez que pour tout nombre $x \neq 0$:

$$3x - 5 \geqslant \frac{2}{x} \text{ équivaut à } \frac{3x^2 - 5x - 2}{x} \geqslant 0.$$

3. Pour étudier le signe d'un quotient, on dresse un tableau où sont indiqués le signe du numérateur et du dénominateur.

a) Quel est le signe du trinôme $3x^2 - 5x - 2$?

b) Recopiez le tableau et complétez-le.

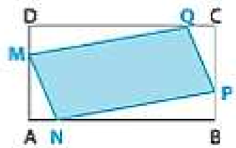
x	$-\infty$	0	$+\infty$
$3x^2 - 5x - 2$			
x			
$\frac{3x^2 - 5x - 2}{x}$			

c) Concluez.

27 Une aire minimale

ABCD est un rectangle tel que AB = 8 et AD = 4.
M est un point de [AD] tel que DM = x, avec $0 \leqslant x \leqslant 4$.
On construit les points N, P et Q tels que :

DM = AN = BP = CQ.



Objectif Trouver les valeurs de x pour lesquelles l'aire $\mathscr{A}$ du quadrilatère MNPQ est minimale.

1. Il faut exprimer $\mathscr{A}$ en fonction de x.
L'aire $\mathscr{A}$ est égale à l'aire de ABCD privée de la somme des aires des domaines non coloriés.

Démontrez que $\mathscr{A} = 2x^2 - 12x + 32$.

2. On est donc amené à s'intéresser à la fonction f définie sur [0 ; 4] par $f(x) = 2x^2 - 12x + 32$.

a) Donnez la forme canonique de $f(x)$.

b) Déduisez-en que pour tout x de [0 ; 4], $f(x) \geqslant 14$.

c) Pour quelle valeur de x, $f(x) = 14$?

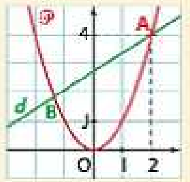
d) Concluez.

28 Droite tangente à une parabole

Dans un repère orthonormé (O ; I, J), $\mathscr{P}$ est la parabole d'équation $y = x^2$. A est le point de $\mathscr{P}$ d'abscisse 2. d est une droite quelconque passant par A, non parallèle à l'axe des ordonnées.

Objectif Trouver, parmi les droites d, une droite passant par A qui coupe $\mathscr{P}$ en un seul point.
On dit dans ce cas que d est **tangente** à la **parabole** $\mathscr{P}$.

1. Une droite d non parallèle à l'axe des ordonnées est de la forme $y = mx + p$. Or d passe par A donc, en traduisant le fait que A appartient à d, on écrit une relation entre les coefficients m et p.



Démontrez que d a pour équation $y = mx + 4 - 2m$.

2. En général, d recoupe $\mathscr{P}$ en un second point B. Ainsi A et B ont des coordonnées qui vérifient le système :

$$\begin{cases} y = x^2 \\ y = mx + 4 - 2m \end{cases} \text{équivalent à} \begin{cases} y = x^2 \\ x^2 - mx + 2m - 4 = 0 \end{cases}$$

Dire que « d et $\mathscr{P}$ ont un seul point commun » revient à dire que « l'équation $x^2 - mx + 2m - 4 = 0$ a une solution double. »

a) Justifiez cette affirmation.

b) Pour quelle valeur de m l'équation :

$$x^2 - mx + 2m - 4 = 0$$

a-t-elle une solution double ?

c) Vérifiez que la droite d obtenue pour cette valeur de m a bien le seul point A en commun avec $\mathscr{P}$.
Concluez.

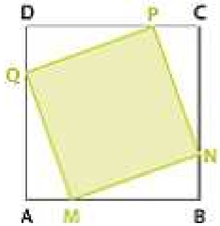
Narration de recherche

→ **L'objectif n'est pas seulement de résoudre le problème posé : vous devez aussi noter les différentes idées même lorsqu'elles n'ont pas permis de trouver la réponse. Expliquez pourquoi vous avez changé de méthode et ce qui vous a fait avancer, etc.**

29 ABCD est un carré d'aire $\mathscr{A}$. Les points M, N, P et Q sont tels que :

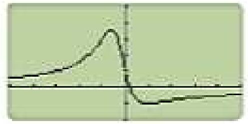
AM = BN = CP = DQ.

Où doit-on placer M sur le côté [AB] afin que l'aire de MNPQ soit comprise entre $\frac{5}{8}\mathscr{A}$ et $\frac{2}{3}\mathscr{A}$?



30 f est la fonction définie par :

$$f(x) = \frac{-5x + 1}{2x^2 + x + 1}.$$

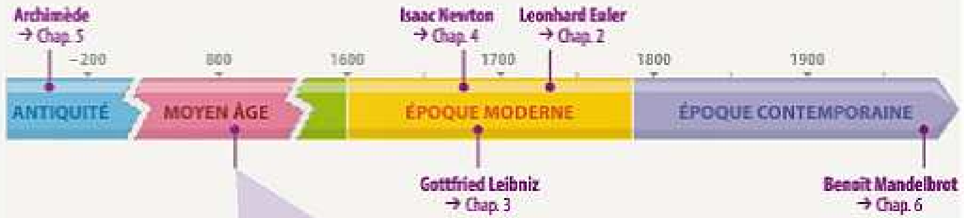


Après avoir justifié que f est définie pour tout nombre x, démontrez que la représentation graphique de f dans un repère orthonormé est entièrement contenue dans une bande de plan de largeur 5.

Eux aussi, ils ont cherché avant de trouver !

Chercheurs d'hier

→ **Voici quelques mathématiciens importants qui ont travaillé dans le domaine de l'Analyse.**



al-Khuwārizmi
(788-850)

Mathématicien, géographe, astronome,
il se consacra aux mathématiques à Bagdad.
Son apport est particulièrement important en algèbre, notamment sur les techniques de résolution des équations de degré 1 et 2.
Il accompagne toujours celles-ci de méthodes géométriques.

Première page de l'*Abrégé du calcul par la restauration et la comparaison*, publié en 825.

Sur le Web http://www.bibmath.net/bios/index.php3?action=affiche&quoi=khwarizmi

Utiliser sa calculatrice

→ Pour « approcher » les solutions éventuelles d'une équation du second degré

31 Résolution d'une équation du second degré

La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^2 + (1 - \sqrt{18})x - \sqrt{2}$.

1. Faites afficher la courbe représentative de f, pour x compris entre –3 et 3 et y compris entre –5 et 10.

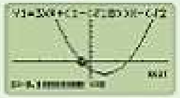
2. Utiliser ce graphique pour déterminer des valeurs approchées des solutions éventuelles de l'équation $f(x) = 0$.

3. Utilisez le menu ÉQUATION (Casio) ou l'éditeur de résolution d'équation (TI) pour confirmer vos résultats.

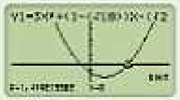
Avec une Casio

1. Voir le rabat de couverture I.

2. • Utilisez les touches SHIFT F5 (G-Solv) puis sélectionnez ROOT F1.



• Déplacez le curseur vers la droite pour faire afficher le deuxième point.



3. • Allez dans le menu ÉQUATION.

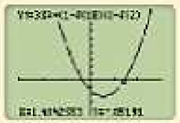
• Sélectionnez l'instruction POLY F2 puis Degree F1.

• Entrez les coefficients du trinôme et appuyez sur EXE.

Avec une TI

1. Voir le rabat de couverture IV.

2. Appuyez sur trace pour lire les valeurs approchées des solutions cherchées.



3. • Appuyez sur math.

• Sélectionnez 0:Solveur... et appuyez sur entrer.

• Saisissez l'équation désirée et appuyez sur entrer.

• Donnez alors à x une valeur initiale pour démarrer la recherche, puis saisissez alpha entrer (résol).

Vous obtenez une valeur « approchée » d'une des solutions.

• Modifiez la valeur initiale pour obtenir l'autre solution.

Utiliser sa calculatrice

→ Pour programmer la résolution d'une équation du second degré

TP 32 Un algorithme pour résoudre une équation du second degré

L'intérêt de ce TP réside dans l'analyse d'un algorithme qui permet de déterminer les racines d'un trinôme du second degré. Les calculatrices récentes contiennent de tels programmes.

1. Complétez l'algorithme suivant dont l'objectif est de résoudre l'équation $ax^2 + bx + c = 0$.

```
▼ Variables
  a, b, c, Δ
Traitement
  Saisir…
  Δ reçoit…
  DébutSi
  Si Δ < 0 alors afficher "…"
  Si … alors afficher "l'équation a une seule solution x0 = …"
  Si …
FinSi
```

2. L'algorithme précédent a été programmé pour deux calculatrices.

Saisissez ce programme dans votre calculatrice et utilisez-le pour résoudre les équations suivantes.

- $2x^2 + 4x + 1 = 0$.
- $-\frac{1}{2}x^2 + 5x - \frac{25}{2} = 0$.
- $-x^2 + x - 1 = 0$.
- $-\frac{1}{3}x^2 - 2x - 5 = 0$.

3. a) Complétez l'algorithme pour qu'il affiche un message d'erreur lorsque la valeur saisie pour a est 0.

b) Modifiez en conséquence le programme de votre calculatrice.

Avec une TI

```
PROGRAM:SDDEGRE
:EffEcr
:Disp "AX²+BX+C"
:Prompt A,B,C
:B²-4AC→D
:Disp "DELTA",D▸Frac
:If D<0:Then
:Disp "PAS DE SOLUTION"
:End
:If D=0:Then
:Disp "X0",-B/(2A)▸Frac
:End
:If D>0:Then
:Disp "2 SOLUTIONS"
:Disp "X1",(-B+√(D))/(2A)▸Frac
:Disp "X2",(-B-√(D))/(2A)▸Frac
:End
```

Avec une Casio

```
======2D DEGRE======
"AX²+BX+C"↵
"A":?→A↵
"B":?→B↵
"C":?→C↵
"delta":B²-4AC→D↵
If D<0↵
Then "PAS DE SOLUTION"↵
IfEnd↵
If D=0↵
Then "UNE SOLUTION"↵
"X0":-B÷2A↵
IfEnd↵
If D>0↵
Then "2 SOLUTIONS"↵
"X1":(-B+√D)÷(2A)↵
"X2":(-B-√D)÷(2A)↵
IfEnd↵
"FIN"↵
```

Entraînement

Compléments numériques

DE TÊTE

33 −2 est-il solution de l'équation $x^2 - 5x - 14$?

34 −1 est-il solution de l'inéquation $-2x^2 + 4x - 1 > 0$?

35 Quel est l'ensemble des solutions de l'inéquation $-2(x-1)(x-3) > 0$?

36 Quel est le discriminant du trinôme $x^2 - 2x - 3$?

37 Pourquoi l'équation $x^2 - 2x + 3 = 0$ n'a-t-elle pas de solution ?

38 Comment choisir m pour que $x = -1$ soit solution de l'équation $2x^2 + x - m = 0$?

39 On sait que $x^2 - 4x = (x - \bigcirc)^2 + \square$.
Quels nombres faut-il écrire à la place de $\bigcirc$ et $\square$?

40 Quelle est l'abscisse du sommet de la parabole d'équation $y = 2x^2 - 3x + 5$?

41 Trouvez un trinôme admettant 4 pour racine double.

42 Un polynôme du second degré de la forme $ax^2 + bx + c$ s'écrit $(2x-3)(2-x)$.
Trouvez a, b, c.

POLYNÔME DU SECOND DEGRÉ. FORME CANONIQUE

43 Donnez la forme canonique des trinômes suivants.

a) $2x^2 - 8x + 1$ b) $-3x^2 + 2x + 4$

c) $x^2 + 5x - 7$ d) $-x^2 + 3x$

44 f est la fonction polynôme définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = -2x^2 + 3x + 5.$$

1. a) Quelle est la forme canonique de $f(x)$?

b) Déduisez-en que pour tout nombre x, $f(x) \leqslant \frac{49}{8}$.

2. Déduisez de la question précédente une forme factorisée de $f(x)$.

45 On donne le trinôme :

$$f(x) = (x^2 - 9) - 2(x-3)(x+2).$$

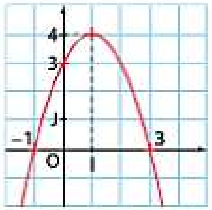
1. a) Développez et réduisez $f(x)$.

b) Quelle est sa forme canonique ?

2. a) Factorisez $f(x)$.

b) Résolvez l'équation $f(x) = 0$.

3. En exploitant les résultats des questions précédentes, précisez quels sont les arguments qui vous permettent de conjecturer que la parabole ci-contre est une représentation graphique de la fonction f.



RACINES D'UN TRINÔME. ÉQUATION DU SECOND DEGRÉ

46 Résolvez les équations suivantes sans calculer le discriminant.

a) $x^2 - 9 + 4(x+3) = 0$.

b) $5(x^2 - 1) = 3(x-1)(x+2)$.

c) $(7 - 2x)^2 + 1 = 0$.

d) $9 - (3x-1)^2 = 0$.

e) $x^2 - 26x + 169 = 0$.

Pour les exercices 47 à 52
Résolvez les équations données.

47 a) $2x^2 - 2x - 12 = 0$ b) $-x^2 + x + 2 = 0$

48 a) $-3x^2 + 7x + 1 = 0$ b) $3x^2 + \sqrt{12}x + 1 = 0$

49 a) $2x^2 + 12x + 18 = 0$ b) $-4x + 2x^2 + 4 = 0$

50 a) $x^2 - 3\sqrt{2}x + 4 = 0$ b) $x(x+4) + 8 = 0$

51 a) $1{,}8t + t^2 = 3{,}6$ b) $\sqrt{2}t^2 - 3t + \sqrt{2} = 0$

52 a) $2(1 - 3u) = u^2 - 3(2u + 1)$

b) $3u^2 - 4\sqrt{7}u - 12 = 0$

53 Écrivez chacun des trinômes suivants sous la forme d'un produit de facteurs du premier degré.

a) $A(x) = 12x^2 + 5x - 2$ b) $B(x) = -3x^2 + 4x + 4$

c) $C(x) = 4x^2 - 20x + 25$

54 **1.** Développez $(2 - \sqrt{3})^2$.

2. Résolvez l'équation :

$$x^2 - (2 + \sqrt{3})x + 2\sqrt{3} = 0.$$

55 **1.** m est un nombre quelconque. Comment choisir m pour que l'équation $3x^2 - 2mx + m = 0$ admette $x = 2$ pour solution ?

2. Calculez alors l'autre solution.

56 Comment choisir le nombre a pour que le trinôme $ax^2 + 6x + 1$ possède une racine double ? Calculez cette racine.

57 Déterminez les valeurs du réel m pour lesquelles l'équation $2x^2 + mx + 2 = 0$ n'a pas de solution.

58 **Un cube**

Si on augmente de deux centimètres la longueur de l'arête d'un cube, son volume augmente alors de 2 402 cm³.
Combien mesure l'arête de ce cube ?

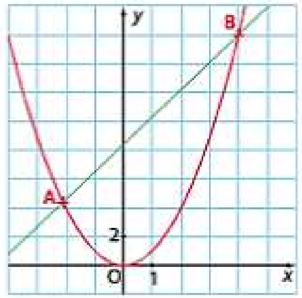
59 **Gagnants du Loto**

Des amis ont gagné le gros lot du Loto, dont le montant s'élève à 2 000 000 €. Si ce groupe d'amis avait compté cinq personnes de moins, chacun aurait touché 20 000 € de plus.

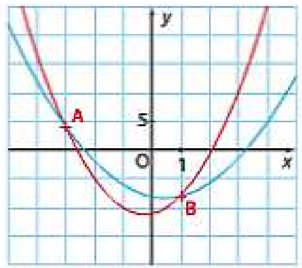
Combien sont-ils ?

60 Pourquoi le trinôme $ax^2 + x - a$ ($a \neq 0$) possède-t-il deux racines distinctes pour tout nombre a ?

61 Sur la figure ci-dessous, on a tracé la parabole d'équation $y = x^2$ et la droite d'équation $y = 1{,}9x + 8{,}4$.
Quelles sont les coordonnées exactes des points d'intersection A et B de ces deux courbes ?



62 Sur la figure ci-dessous, on a tracé les paraboles d'équations respectives $y = 2x^2 + x - 11$ et $y = x^2 - x - 8$.
Quelles sont les coordonnées des points d'intersection A et B de ces deux courbes ?



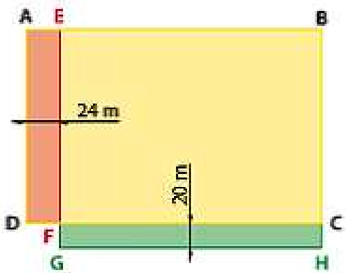
63 **L'écran d'un téléviseur**

Les dimensions de l'écran d'un téléviseur sont, en centimètres, 93 et 53.
Le cadre doit être de largeur constante x.

Calculez cette largeur pour que l'aire du cadre soit égale au cinquième de l'aire de l'écran. Vous donnerez le résultat à un millimètre près.

64 **Remembrement**

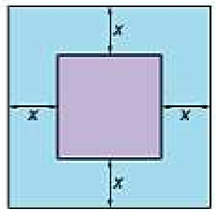
Un agriculteur, propriétaire d'un champ rectangulaire ABCD d'une superficie de 4 ha 32 a, doit, dans le cadre d'un remembrement, céder une bande AEFD de largeur 24 m et recevoir en échange une bande FCHG de largeur 20 m de façon à conserver la même superficie.



Quelles étaient les dimensions initiales de son terrain ?

65 **Variation d'une aire**

On a partagé un carré de 1 m de côté en deux domaines.
La partie coloriée en bleu est une bande de largeur x.
Comment choisir x pour que les parties bleues et mauves aient la même aire ?



66 **En électricité**

On dispose de deux conducteurs ohmiques de résistance R_1 et R_2.
Si on les monte en série (**figure 1**), on obtient un dipôle de résistance équivalente $R = R_1 + R_2$.
Si on les monte en dérivation (**figure 2**), on obtient un dipôle de résistance équivalente R telle que :

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

figure 1

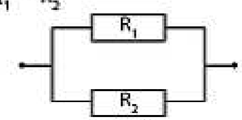
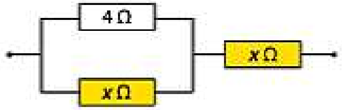


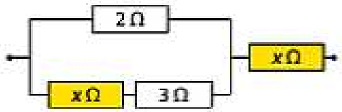
figure 2

Applications

1. Déterminez la valeur x de la résistance pour que la résistance équivalente de ce montage soit 6 Ω.



2. Déterminez la valeur x de la résistance pour que la résistance équivalente de ce montage soit 4,5 Ω.



FONCTIONS TRINÔMES

67 Chacune des courbes ci-dessous est la représentation graphique d'une fonction trinôme f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$.
Précisez dans chaque cas le signe du discriminant, ainsi que celui de a et c.

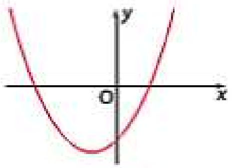


figure 1

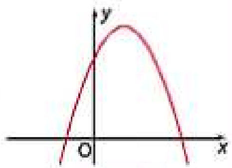


figure 2

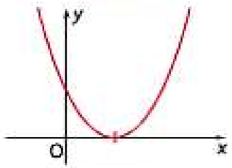


figure 3

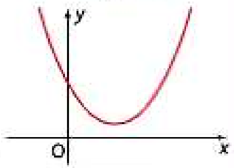
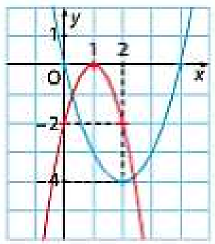


figure 4

68 f et g sont deux fonctions trinômes définies sur $\mathbb{R}$. Le discriminant de $f(x)$ est positif et celui de $g(x)$ est nul. On a tracé ci-contre les courbes représentatives de f et g.



1. Attribuez sa courbe à chaque fonction.

2. a) Pourquoi $f(x)$ est de la forme $ax(x-4)$?

b) À l'aide des renseignements portés sur la figure, trouvez la valeur de a.

3. a) Pourquoi $g(x)$ est-il de la forme $a(x-1)^2$?

b) Calculez a.

69 Les fonctions f et g sont définies sur $\mathbb{R}$ par :
$f(x) = 3x^2 - 12x + 5$ et $g(x) = -5x^2 + 8x - 10$.
On note $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ leurs représentations graphiques.

1. Quelles sont les coordonnées des sommets S et S' des paraboles $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$?

2. Dressez les tableaux de variation de f et g.

70 Équivalence LOGIQUE

f désigne une fonction trinôme.
L'énoncé « $f(x)$ possède deux racines distinctes » équivaut à « $\Delta > 0$ » est une équivalence.
Cela signifie que :
Si « $f(x)$ possède deux racines », alors « $\Delta > 0$ ».
Et réciproquement :
Si « $\Delta > 0$ », alors « $f(x)$ possède deux racines distinctes ».

g est la fonction trinôme définie par $g(x) = -x^2 + 2x + c$, où c est un nombre quelconque.

1. On considère les propositions Ⓐ et Ⓑ suivantes :
Ⓐ « Le trinôme $g(x)$ n'a pas de racine. »
Ⓑ « $c < -1$. »
Les propositions Ⓐ et Ⓑ sont-elles équivalentes ?

2. On considère les propositions Ⓐ et Ⓑ suivantes :
Ⓐ « $c > 0$. »
Ⓑ « Le maximum de g est strictement positif. »
Les propositions Ⓐ et Ⓑ sont-elles équivalentes ?
Justifiez en examinant chaque implication.

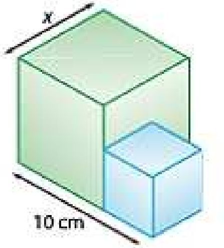
71 f est la fonction trinôme définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$f(x) = 3x^2 + 4x - 4.$$
On note $\mathcal{P}$ la parabole représentant f.

1. Quelles sont les coordonnées de son sommet S ?

2. $\mathcal{P}$ coupe l'axe des abscisses en I et J et l'axe des ordonnées en K.
Quelles sont les coordonnées des points I, J et K ?

3. Vérifiez à l'aide de votre calculatrice.

72 Les deux cubes sont tels que la somme des mesures de leurs côtés est égale à dix centimètres.
On note x la mesure du côté de l'un d'entre eux.



Déterminez la valeur de x pour laquelle la somme des volumes des deux cubes est minimale.

SIGNE DU TRINÔME

Pour les exercices 73 à 76
Étudiez le signe de chacun des trinômes suivant les valeurs de x.

73 a) $A(x) = (x-5)(x+2)$. b) $B(x) = (1+3x)(6+x)$.
c) $C(x) = (2-6x)(1+x)$. d) $D(x) = -9x(2+7x)$.

74 a) $A(x) = (x^2-4) - 3(x+2)(x-1)$.
b) $B(x) = (x-5)^2 - 16$.
c) $C(x) = 4(x+2)^2 - 9(3-2x)^2$.

75 a) $f(x) = x^2 + x - 2$. b) $g(x) = -3x^2 + 6x - 2$.
c) $h(x) = x^2 - 2x + 3$. d) $k(x) = 5x^2 + 41x + 80$.

76 a) $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 6x + 16$. b) $g(x) = x^2 - x + 1$.
c) $h(x) = -x^2 + x\sqrt{2} - 1$.

Pour les exercices 77 à 80
Résolvez chacune des inéquations.

77 a) $x^2 + 3x + 2 > 0$. b) $t^2 + t + 1 > 0$.
c) $x^2 - 7x + 12 \leqslant 0$. d) $-5t^2 - t - 2 \leqslant 0$.

78 a) $9x^2 + 30x + 25 \leqslant 0$. b) $-3t^2 - \frac{9}{2}t + 3 \leqslant 0$.
c) $-64x^2 + 48x + 7 < 0$. d) $4t^2 + 12t + 9 > 0$.

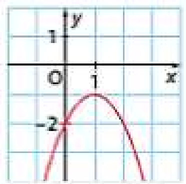
79 a) $(2-x)(4x+3) \geqslant 0$. b) $x^2 - 6 > 0$.
c) $(3+2x)^2 - 16 \geqslant 0$. d) $7x(3+2x) \geqslant 0$.

80 a) $\frac{3+x}{x-3} \geqslant 0$. b) $\frac{7-4x}{x+3} < 0$.
c) $\frac{x}{5-x} > 0$. d) $\frac{3}{x} \leqslant x + 2$.

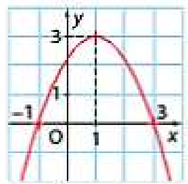
81 Chacune des courbes ci-dessous représente une fonction trinôme. Dans chaque cas, résolvez l'inéquation proposée.

→ *exercice résolu E, page 32.*

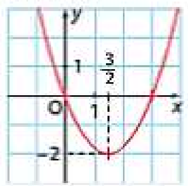
a) $f(x) \geqslant 0$



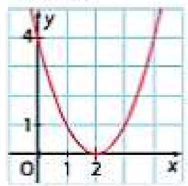
b) $f(x) > 0$



c) $f(x) \leqslant 0$

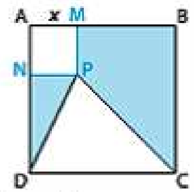


d) $f(x) > 0$



82 Optimisation

ABCD est un carré de 10 cm de côté et AMPN un carré de côté x tel que x appartient à l'intervalle $I = [0; 10]$. On désigne par $S(x)$ l'aire en cm² de la partie coloriée en bleu.



1. Démontrez que pour tout nombre x de I :
$$S(x) = -x^2 + 5x + 50.$$

2. a) Construisez le tableau de variation de S sur I.

b) Pour quelle valeur de x l'aire $S(x)$ est-elle maximale ? Que vaut alors cette aire ?

3. Quel est l'ensemble des nombres x de I pour lesquels $S(x) \leqslant$ aire(AMPN) ?

83 La méthode d'al-Khuwārizmī ALGORITHMIQUE

Pour déterminer la solution positive de l'équation :
$$x^2 + 12x = 108,$$
voici comment procédait Al-Khuwārizmī, mathématicien arabe du IXe siècle (voir page 10).

```
Diviser 12 par 2.
Élever ce quotient au carré.
Ajouter ce carré à 108.
Prendre la racine carrée de cette somme.
Retrancher à cette racine carrée le quotient du début.
```

1. a) Vérifiez que l'équation $x^2 + 12x = 108$ admet deux solutions de signes contraires et que l'algorithme proposé donne la solution positive.

b) Utilisez la même méthode pour déterminer la solution positive de l'équation $x^2 + 16x = 80$.

2. a) Prouvez que toute équation du type $x^2 + bx = c$ où $c > 0$ admet deux racines de signes contraires.
Pour cela, étudiez le signe du produit des racines en utilisant le théorème démontré dans l'exercice 87, page 42.

b) Complétez cet algorithme qui donne la racine positive d'une telle équation.

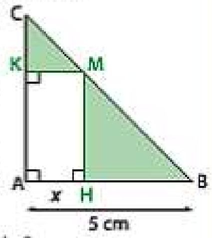
```
VARIABLES
  b EST_DU_TYPE NOMBRE
  c EST_DU_TYPE NOMBRE
  x1 EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
  LIRE b
  LIRE c
  x1 PREND_LA_VALEUR _ _ _ _ _ _
  AFFICHER x1
FIN_ALGORITHME
```

84 **Variation d'une aire. Inéquation**

ABC est un triangle rectangle isocèle tel que :

$AB = AC = 5$ cm.

AHMK est un rectangle. On pose $AH = x$, $0 \leqslant x \leqslant 5$.



1. Prouvez que l'aire $S(x)$ du domaine coloré est égale à :
$$x^2 - 5x + \frac{25}{2}.$$

2. a) Étudier sens de variation de S.

b) Pour quelle valeur de x cette aire est-elle minimale ? Calculez ce minimum.

3. Trouvez les valeurs de x de $[0\,;5]$ telles que $S(x) \leqslant \frac{75}{8}$.

AVEC LES TICE

85 **Travailler avec un paramètre**

Dans un repère orthonormé $(O\,;I,J)$, $\mathcal{P}$ est la parabole d'équation $y = x^2$, et pour tout nombre m, d_m est la droite d'équation $y = 2x + m$.

On considère le cas où la droite d_m coupe la parabole $\mathcal{P}$ en deux points A et B. Le but de l'exercice est de savoir sur quelle ligne se déplace le point C, milieu du segment [AB], lorsque m varie dans $\mathbb{R}$.

1. Expérimenter

a) Avec GeoGebra, créez un curseur m.
Réglages : mini –5, maxi 10, incrément 0,1.

b) Saisissez $y = x^2$ et $y = 2x + m$. Lorsque d_m coupe $\mathcal{P}$ en A et B, créez le point C, milieu de [AB].

c) Affichez la trace de C et déplacez m à l'aide du curseur. Que conjecturez-vous :

- sur la trace du point C ?
- sur le nombre de points d'intersection ?

2. Démontrer

a) Démontrez que la droite d_m coupe $\mathcal{P}$ en deux points A et B, distincts ou non, si et seulement si $m \geqslant -1$.

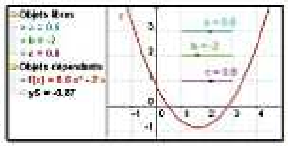
b) Calculez, en fonction de m, les abscisses de A et B.

c) Déduisez-en l'abscisse du point C et concluez.

86 **Nombre de racines d'un trinôme**

On souhaite déterminer le nombre de racines du trinôme $f(x) = ax^2 + bx + c$ en fonction du signe de $a \times y_S$ où y_S est l'ordonnée du sommet de la parabole $(a \neq 0)$.

1. Utiliser GeoGebra pour conjecturer la réponse.



2. Exprimez $a \times y_S$ en fonction de a, b et c pour démontrer (ou infirmer) la conjecture.

ROC Restitution organisée de connaissances

87 **Prérequis.** Le trinôme $ax^2 + bx + c = 0$, $(a \neq 0)$, lorsque le discriminant Δ est strictement positif, admet deux racines distinctes :
$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

1. Démonstration

Démontrez que $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ et $x_1 x_2 = \frac{c}{a}$.

2. Application

a) Vérifiez que $x = \frac{1}{2}$ est solution de l'équation :
$$4x^2 + 4x - 3 = 0.$$

Calculez l'autre racine sans calculer Δ.

b) Sans aucun calcul, trouvez les solutions de l'équation $x^2 + 5x - 6 = 0$.

POUR ALLER PLUS LOIN

Utilisez le résultat démontré à l'exercice **87** pour résoudre **les exercices 88 à 91**.

88 **1.** a) Vérifiez que 4 est solution de l'équation :
$$-7x^2 + 9x + 76 = 0.$$

b) Quelle est l'autre solution ?

89 Chacune des équations suivantes admet une solution évidente. Trouvez cette solution, puis l'autre, sans calculer le discriminant Δ.

a) $3x^2 - 5x + 2 = 0$. b) $7x^2 + 6x - 1 = 0$.

c) $x^2 + x - 6 = 0$. d) $8x^2 + 7x - 15 = 0$.

90 Trouvez deux nombres (s'ils existent) dont la somme est 12 et le produit –85.

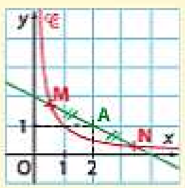
Prendre toutes les initiatives

91 Déterminez trois entiers consécutifs dont la somme est égale au produit.

92 $\mathscr{C}$ est la courbe d'équation $y = \frac{1}{x}$ avec $x > 0$.

M et N sont deux points de $\mathscr{C}$ d'abscisses respectives m et n.

Calculez les valeurs exactes de m et n lorsque A est le milieu du segment [MN].



93 Déterminez le nombre m pour que le trinôme $f(x) = -x^2 + 3x - m$ soit négatif pour tout nombre x.

94 On donne le trinôme $f(x) = x^2 - (m+1)x + 4$.

1. Pour quelles valeurs de m l'équation $f(x) = 0$ a-t-elle une seule solution ? Calculez alors cette solution.

2. Pour quelles valeurs de m l'équation $f(x) = 0$ n'a-t-elle aucune solution ?

95 On donne le trinôme $f(x) = mx^2 + 4x + 2(m-1)$.

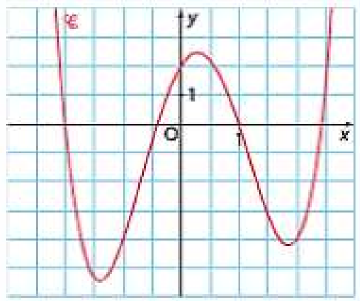
1. Pour quelles valeurs de m l'équation $f(x) = 0$ a-t-elle une seule solution ? Calculez alors cette solution.

2. a) Quel est l'ensemble des nombres m pour lesquels l'équation $f(x) = 0$ a deux solutions distinctes ?

b) Quel est l'ensemble des nombres m pour lesquels $f(x) < 0$ pour tout nombre x ?

96 Si on augmente les arêtes d'un cube de 2 cm de côté, alors son volume augmente de 488 cm³.
Que vaut l'arête de ce cube ?

97 La courbe $\mathscr{C}$ ci-dessous est la représentation graphique de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$f(x) = (x^2 + x - 2)(x^2 - 2x - 1).$$



1. a) Graphiquement, conjecturez le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$.

b) Résolvez l'équation $f(x) = 0$.

2. a) Utilisez la représentation graphique de la fonction f pour conjecturer l'ensemble des solutions de l'inéquation $f(x) < 0$.

b) Résolvez l'inéquation $f(x) < 0$ à l'aide d'un tableau de signes.

98 **Trouver des erreurs**

Sur des copies d'élèves, un professeur de mathématiques a trouvé les raisonnements suivants, qui contiennent chaque fois une erreur. Trouvez cette erreur et proposez une solution correcte.

1. « Pour résoudre l'équation $x^2 - 1 \neq x + 1$, on utilise l'identité $x^2 - 1 = (x+1)(x-1)$.

L'équation s'écrit $(x+1)(x-1) = x + 1$. On simplifie par $(x+1)$ et l'équation devient $x - 1 = 1$, soit $x = 2$. »

2. « Pour résoudre l'inéquation $(x+1)^2 \geqslant x + 1$, on pose $y = x + 1$. L'inéquation devient $y^2 \geqslant y$.
Or ceci est toujours vrai donc l'ensemble des solutions est $\mathbb{R}$. »

3. « L'inéquation $\frac{x^2 - 1}{x + 2} \leqslant x$ s'écrit $x^2 - 1 \leqslant x^2 + 2x$, soit $-1 \leqslant 2x$ et $x \geqslant -\frac{1}{2}$. »

99 **La vitesse du vent et l'ULM**

La vitesse vraie d'un ULM s'obtient :

– en additionnant sa vitesse propre à celle du vent lorsque le vent est favorable ;

– en retranchant de sa vitesse propre la vitesse du vent lorsque le vent est contraire.

Un ULM dont la vitesse propre est 90 km·h⁻¹ s'est rendu d'une ville A à une ville B, et est revenu aussitôt de la ville B à la ville A.
La distance AB est 108 km. On admet que, pendant toute la durée du vol, le vent a soufflé à vitesse constante dans la direction (AB) et dans le sens de A vers B.

1. a) Vérifiez que le temps mis à l'aller s'exprime en fonction de la vitesse v du vent par $t_{aller} = \frac{108}{90 + v}$.

b) Exprimez de même le temps t_{retour} mis au retour.

2. Sachant que le temps mis pour faire l'aller-retour est de 2 h 30, déterminez la vitesse v du vent.

100 **Implication réciproque** LOGIQUE

A. g est la fonction trinôme définie par :
$$g(x) = mx^2 + 4x + 4 \ (m \neq 0).$$

1. Parmi ces implications, lesquelles sont vraies ?

a) « $m = 2$ » $\Rightarrow$ « Pour tout x, $g(x) > 0$. »

b) « $m < 0$ » $\Rightarrow$ « L'équation $g(x) = 0$ a deux solutions distinctes. »

c) « Le trinôme $g(x)$ a deux racines distinctes. » $\Rightarrow$ « $m < 0$ »

2. L'implication c) est la réciproque de b). Ces propositions sont-elles équivalentes ?

B. On donne l'implication : « $ax^2 + bx + c = 0$ a deux solutions distinctes » $\Rightarrow$ « a et c sont de signes contraires ».
Cette implication est-elle vraie ? Sa réciproque est-elle vraie ?

101 **Signe d'un trinôme** ALGORITHMIQUE

Cet algorithme permet de déterminer le signe d'un trinôme $ax^2 + bx + c$, $(a \neq 0)$.

a, b, c, d, x_1 et x_2 sont des variables de type nombre.

1. Quel est le rôle des lignes 2 à 6 (de **LIRE** a jusqu'à FIN_TANT_QUE) ?

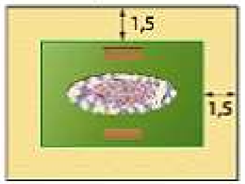
2. Complétez cet algorithme.

3. Dans cet algorithme, on a commencé par étudier le signe du discriminant. Écrivez un algorithme ayant le même objectif, mais dans lequel on commence par étudier le signe du coefficient a.

```
DEBUT_ALGORITHME
  LIRE a
  TANT_QUE (a==0) FAIRE
    DEBUT_TANT_QUE
    AFFICHER "a doit etre non nul"
    FIN_TANT_QUE
  LIRE b
  LIRE c
  d PREND_LA_VALEUR pow(b,2)-4*a*c
  SI (d<0) ALORS
    DEBUT_SI
    SI (a>0) ALORS
      DEBUT_SI
      AFFICHER "Le trinôme est positif"
      FIN_SI
      SINON
        DEBUT_SINON
        AFFICHER "Le trinôme est négatif"
        FIN_SINON
    FIN_SI
  SI (d>0) ALORS
    DEBUT_SI
    x1 PREND_LA_VALEUR (-b-sqrt(d))/(2*a)
    x2 PREND_LA_VALEUR ......
    SI (a>0) ALORS
      DEBUT_SI
      AFFICHER "Le trinôme est positif pour x < "
      AFFICHER x1
      AFFICHER "et pour x > "
      AFFICHER x2
      FIN_SI
      SINON
      ......
    FIN_SI
  SI (d==0) ALORS
      ......
    FIN_SI
FIN_ALGORITHME
```

102 Un jardin de forme rectangulaire a une superficie totale de 805 m², allée comprise.

Cette allée de 1,5 mètre de large permet d'en faire le tour. Cette allée a une superficie de 165 m².



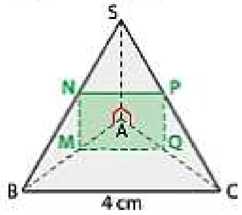
Quelles sont les dimensions du jardin ?

103 Dans un repère, $\mathscr{C}$ est la courbe d'équation $y = \frac{3}{x}$ et d la droite d'équation $y = 2x + 1$.

La droite d coupe $\mathscr{C}$ en A et B, et les axes en C et D. Démontrez que les segments [AB] et [CD] ont le même milieu.

104 **Une pyramide**

SABC est une pyramide dont la base ABC est un triangle équilatéral et dont l'arête (SA) est perpendiculaire aux droites (AB) et (AC). On sait que AB = 4 cm et SA = 2 cm. M est un point de [AB]. À partir de ce point on construit le rectangle MNPQ comme indiqué sur la figure : (MN) est parallèle à (AS) et (MQ) est parallèle à (BC).



L'objectif est de choisir le point M tel que l'aire du rectangle MNPQ soit égale à $\frac{4}{3}$ cm².

1. On pose AM = x.

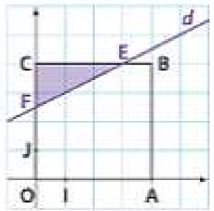
Démontrez que :

$$\text{aire (MNPQ)} = -\frac{x^2}{2} + 2x.$$

2. Déduisez-en la ou les solutions du problème.

105 On se place dans un repère orthonormé (O; I, J). OABC est un carré de côté 4.

d a pour équation $y = \frac{1}{2}x + m$ avec m appartenant à l'intervalle [2; 4[.



1. Justifiez que pour tout nombre m de [2; 4[, d coupe le segment [OC] en F et le segment [BC] en E.

2. a) Démontrez que aire(ECF) = $(4 - m)^2$.

b) Déduisez-en l'ensemble des nombres m de l'intervalle [2; 4[pour lesquels :

$$8 \times \text{aire (ECF)} \leqslant \text{aire (OABC)}.$$

106 **Le poids de l'astronaute**

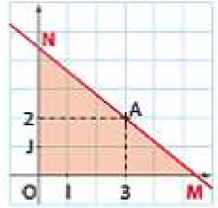
Le poids diminue avec l'altitude. Ainsi, si la masse d'un astronaute est 60 kg, son poids (en N) à l'altitude x (en km) au-dessus du niveau de la mer est donné par :

$$P = 60 \times 9{,}8 \times \left(\frac{6400}{6400 + x}\right)^2.$$

À quelle altitude le poids de l'astronaute sera-t-il inférieur à 25 N ?

107 Dans un repère orthonormé (O; I, J), le point A a pour coordonnées (3; 2).

M est un point de l'axe des abscisses de coordonnées $(m; 0)$ avec $m > 3$. La droite (AM) coupe l'axe des ordonnées en N.



1. a) Démontrez que $\text{ON} = \frac{2m}{m-3}$.

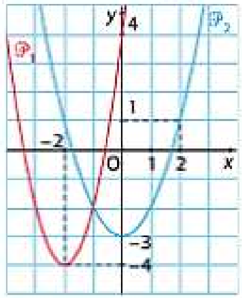
b) Déduisez-en que l'aire du triangle OMN est égale à :

$$\frac{m^2}{m-3}.$$

2. Quel est l'ensemble des nombres m pour lesquels aire(OMN) $\leqslant 16$?

108 f et g sont deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 2x^2 + 8x + 4 \quad \text{et} \quad g(x) = x^2 - 3.$$



1. Attribuez à chaque fonction sa courbe.

2. Calculez les coordonnées des points d'intersection de ces deux paraboles.

3. Quel est l'ensemble des nombres x pour lesquels $\mathscr{P}_1$ est en dessous de $\mathscr{P}_2$?

109 **Coût de fabrication et bénéfices**

Dans une usine, on fabrique des appareils ménagers.

Le coût total de fabrication de n appareils est donné par :

$C(n) = 0{,}02n^2 + 8n + 500$, pour $n \in [0; 600]$.

Le coût $C(n)$ est exprimé en euros.

1. Déterminez la quantité à partir de laquelle le coût total est supérieur à 4 700 €.

2. On appelle p le prix de vente (en euros) d'un appareil. Dans cette question, $p = 17{,}5$.

a) Exprimer le bénéfice $B(n)$ en fonction de n et vérifiez que :

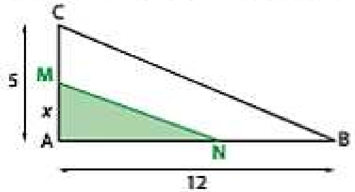
$$B(n) = -0{,}02n^2 + 9{,}5n - 500.$$

b) Déterminez algébriquement le nombre d'appareils à fabriquer pour que l'entreprise réalise un bénéfice positif ou nul.

3. Dans cette question, on ne connaît pas la valeur de p, mais on sait que l'entreprise réalise un bénéfice maximal lorsqu'elle fabrique 300 appareils. Calculez p.

110 ABC est un triangle rectangle tel que AB = 12 et AC = 5. M est un point de [AC] tel que AM = x, avec x appartenant à l'intervalle I = [0; 5].

À chaque point M, on associe le point N du segment [AB] tel que BN = 2x. On note $\mathscr{A}(x)$ l'aire du triangle AMN.



1. Démontrez que $\mathscr{A}(x) = 6x - x^2$.

2. On note f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 6x - x^2$ et $\mathscr{P}$ la parabole représentative de f.

a) Quelle est la forme canonique de f ? Quelles sont les coordonnées du sommet S de $\mathscr{P}$?

b) Tracez $\mathscr{P}$ dans un repère orthonormé et déduisez-en la courbe représentative de $\mathscr{A}$ définie sur I par :

$$\mathscr{A}(x) = 6x - x^2.$$

3. On cherche l'ensemble des nombres x de I tels que $6 \leqslant \mathscr{A}(x) \leqslant 8$.

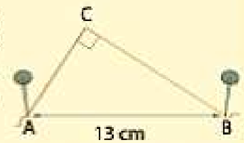
a) Graphiquement, quelle conjecture faites-vous ?

b) Trouvez cet ensemble par le calcul.

Aide Résoudre $\mathscr{A}(x) \leqslant 8$ puis $\mathscr{A}(x) \geqslant 6$ et conclure.

Prendre toutes les initiatives

111 Une ficelle longue de 20 cm est fixée à ses extrémités par deux clous A et B distants de 13 cm.



Est-il possible de tendre la ficelle de manière à ce que le triangle ABC soit rectangle en C ?

112 Dans un cercle de rayon 4 cm, peut-on inscrire un triangle AMB isocèle, de sommet principal M, tel que MA soit le double de AB ?

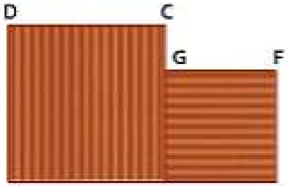
EXERCICES

Travail en autonomie

→ Les exercices suivants permettent de revoir les principales méthodes de résolution abordées dans le chapitre. Faites ces exercices à votre rythme, en utilisant si besoin les *coups de pouce* page 381.

A Les deux carrés

Deux terrains ayant la forme d'un carré sont disposés comme l'indique la figure ci-dessous.



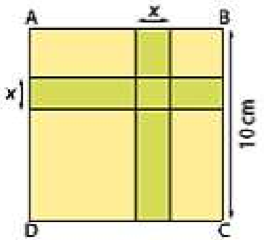
G est un point du segment [BC]. L'aire totale est de 21 800 m² et le périmètre de l'ensemble est de 660 m.

a) Exprimez l'aire totale et le périmètre de l'ensemble en fonction des mesures x et y des côtés des carrés.

b) Déduisez-en la mesure du côté de chacun des carrés. 1

B Du tissage

ABCD est un carré.

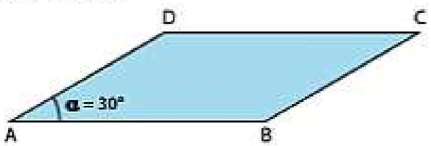


a) Exprimez l'aire de la partie colorée en vert en fonction de la variable x. 2

b) Déterminez la mesure x en cm pour laquelle les aires des parties coloriées en jaune et en vert sont égales. 3

C Pas vraiment un losange…

ABCD est un parallélogramme d'aire 52 cm² et de périmètre 42 cm.

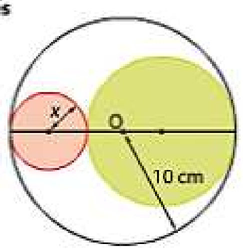


Calculez AB et AD. 4

D Les disques emboîtés

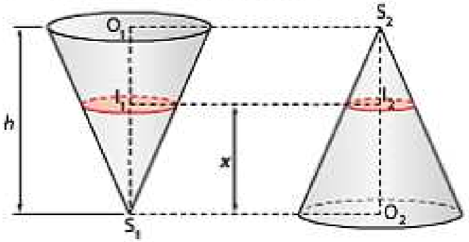
On note $\mathscr{A}$ l'aire du grand disque ci-contre.

Pour quelles valeurs de x (rayon du disque rouge) la somme des aires des deux disques intérieurs est-elle supérieure ou égale à $\frac{5}{8}\mathscr{A}$? 5



E Deux cônes

Deux cônes de révolution identiques (même rayon de base R = 3 cm et même hauteur h = 12 cm) sont disposés comme l'indique la figure ci-dessous.



On a indiqué en rouge la section de ces cônes par un plan parallèle aux bases de manière que $S_1I_1 = O_2I_2 = x$.

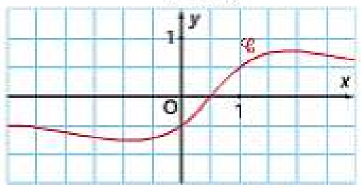
a) Déterminez les rayons r_1 et r_2 des disques colorés en fonction de x. 6

b) Déterminez x pour que la somme des aires de ces deux sections soit inférieure à $\frac{27\pi}{4}$. 7

F Dans le « couloir »

On a tracé ci-dessous la courbe $\mathscr{C}$ représentative de la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{2x-1}{x^2-x+2}.$$



a) Pourquoi f est-elle définie sur $\mathbb{R}$? 8

b) Pourquoi la courbe $\mathscr{C}$ est-elle entièrement dans la bande de plan délimitée par les droites d'équation $y = -1$ et $y = 1$? 9

CHAPITRE 2

Variations des fonctions associées

D'un siècle à un autre

Lors de la Coupe du monde de football de 2010 en Afrique du Sud, les vuvuzelas sont venues perturber les retransmissions télévisées. Pour pouvoir se débarrasser de ce bruit, il faut réussir à séparer un signal indésirable d'un signal utile.

Pour cela, les ingénieurs réalisent une opération de « démixage » qui revient à faire une soustraction de signaux, c'est-à-dire une soustraction de fonctions. Cela n'aurait pas été possible sans les travaux de Leonhard Euler, qui a introduit le concept de « fonction ».

En savoir plus sur Leonhard Euler

→ Chercheurs d'hier p. 59