Exercice n°7 : Un pas vers les concours ! (EDHEC 2018)

Partie I : Fonction définie par une intégrale

$$On\ pose\ \forall x \in \mathbb{R}\ f(x) = \int_0^x \ln(1+t^2)\ dt$$

1. Déterminer le signe de $f(x)$ selon les valeurs de $x$
2. Montrer que $f$ est de classe $C^1$ et calculer $f'(x)$ en déduire les variations de $f$
3. Montrer que f est impaire
4. Etudier la convexité et éventuelles point d'inflexion

Partie 2 : Suite définie par une intégrale

On pose $u_0 = 1$, et pour tout entier naturel $n$ non nul : $u_n = \int_0^1 \left(\ln\left(1+t^2\right)\right)^n dt$.

7) a) La valeur donnée à $u_0$ est-elle cohérente avec l'expression générale de $u_n$ ?
   b) Exprimer $u_1$ à l'aide de la fonction *f*.

8) a) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
   b) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par 0. En déduire qu'elle converge.

9) a) Établir l'encadrement suivant :

$$0 \le u_n \le (\ln 2)^n$$

   b) Que peut-on en déduire sur la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ? Sur la série de terme général $u_n$ ?

10) a) Montrer que :

$$0 \le \int_0^1 \frac{\left(\ln\left(1+t^2\right)\right)^n}{1-\ln\left(1+t^2\right)} dt \le \frac{u_n}{1-\ln 2}$$

   b) En déduire la valeur de $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^1 \frac{\left(\ln\left(1+t^2\right)\right)^n}{1-\ln\left(1+t^2\right)} dt$.

   c) Justifier que, pour tout entier naturel $n$ non nul, on a :

$$\sum_{k=0}^{n-1} u_k = \int_0^1 \frac{1-\left(\ln\left(1+t^2\right)\right)^n}{1-\ln\left(1+t^2\right)} dt$$

   d) En déduire que l'on a :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} u_k = \int_0^1 \frac{1}{1-\ln\left(1+t^2\right)} dt$$