Jour n°6 : Matrice et suites

Exercice n°6 : 45 minutes

$$On\ pose\ \forall n \in \mathbb{N}, u_0 = 1\ et\ u_2 = 2\ et\ u_{n+2} = u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n$$

$$Ainsi\ que\ les\ matrice\ A = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{4} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\ la\ mtrice\ identité\ I\ et\ U_n = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$$

1. Montrer que pour tout entier naturel, $U_{n+1} = AU_n$

2. En déduire par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_n = A^n U_0$

$$on\ pose\ les\ matrices\ P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\ et\ T = \begin{pmatrix} 1/2 & 1 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

3. Vérifier que $AP = PT$ pour montrer que $\forall n \in \mathbb{N}\ A^n P = PT^n$

4. On pose $B = T - \frac{1}{2}I\ puis\ calculer\ B^2, en\ déduire\ \forall k \geq 0\ B^k$

5. Montrer par la formule du binôme que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, T^n = \frac{1}{2^n}I + \frac{n}{2^{n-1}}B$$

6. En déduire explicitement la matrice T^n

7. Montrer que P est inversible puis calculer P^{-1}

8. Donner une expression explicite de u_n

9. Bonus : Calculer u_n grâce à la méthode sur les suites récurrente linéaire d'ordre 2