Exercice n°4 : (50 minutes)

EXERCICE 3

Soit n un entier naturel non nul.
Dans une fête foraine, un stand propose le jeu suivant : le joueur lance n fois une pièce et compte le nombre de Pile obtenus. Si ce nombre est pair, le joueur est déclaré vainqueur, et s'il est impair, il est déclaré perdant.
Si le joueur est déclaré vainqueur, il gagne 10 euros pour chaque Pile obtenu, mais s'il a perdu, il doit payer 10 euros pour chaque Pile obtenu.
En particulier, s'il n'obtient aucun Pile, il est déclaré vainqueur, mais ne remporte rien. La pièce est truquée, et à chaque lancer, la probabilité d'obtenir Pile est égale à p ($p \in]0,1[$), et celle d'obtenir Face est de $1-p$.
On notera X la variable aléatoire égale au nombre de Pile obtenus, et G la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur.
Enfin, on notera A l'événement : « le joueur est déclaré vainqueur » et on dira que le jeu est favorable au joueur si l'espérance mathématique de la variable aléatoire G est positive.

Partie I : Dans cette partie on pose $n = 3$ et $p = \frac{2}{3}$

1. Reconnaitre la loi de X et calculer $P(A)$
2. Montrer que $G(\Omega) = \{-30; -10; 0; 20\}$ puis expliciter la loi de G
3. Calculer l'espérance de G. Le jeu est-il favorable au joueur ?

Partie II :

Dans cette partie, on revient au cas général, où n est un entier naturel non nul et $p \in]0,1[$.
Celui qui tient le stand souhaite rendre le jeu plus attractif en affichant le slogan « À ce jeu, il y a plus de gagnants que de perdants ! », et cherche donc les conditions nécessaires sur p et n pour que son affichage ne soit pas mensonger.
Soit Y la variable aléatoire définie par :

$$Y = (-1)^X.$$

Autrement dit, Y prend la valeur 1 lorsque X prend une valeur paire, et Y prend la valeur -1 lorsque X prend une valeur impaire.

1. On note $Z = \frac{Y+1}{2}$, déterminer $Y(\Omega)$ puis montrer que Z qui une loi de Bernoulli
2. $Montrer\ que\ E(Y) = 2P(A) - 1$
3. Donner la loi de X et en déduire que :

$$E(Y) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \; puis\ que\ E(Y) = (1-2p)^n$$

4. Exprimer $P(A)$ en fonction de n et p

5. Démontrer que $P(A) \geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow \left[p \leq \frac{1}{2} \;\; OU \text{ "}n\ est\ pair\text{"}\right]$

Partie III :

Le concepteur du jeu souhaite cependant vérifier que, tout en laissant son jeu attractif (c'est-à-dire en faisant en sorte que $P(A) \geqslant \frac{1}{2}$), son activité soit rentable pour lui, autrement dit que le jeu soit défavorable au joueur (c'est-à-dire que $E(G) \leqslant 0$).

1. Exprimer G en fonction de X et Y puis montrer que :

$$E(G) = 10 \sum_{k=0}^{n} (-1)^k k * P([X = k])$$

2 . $Démontrer\ que\ \forall k \in [\![1; n]\!], k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$

3. $Montrer\ que\ E(G) = -10np(1-2p)^{n-1}$