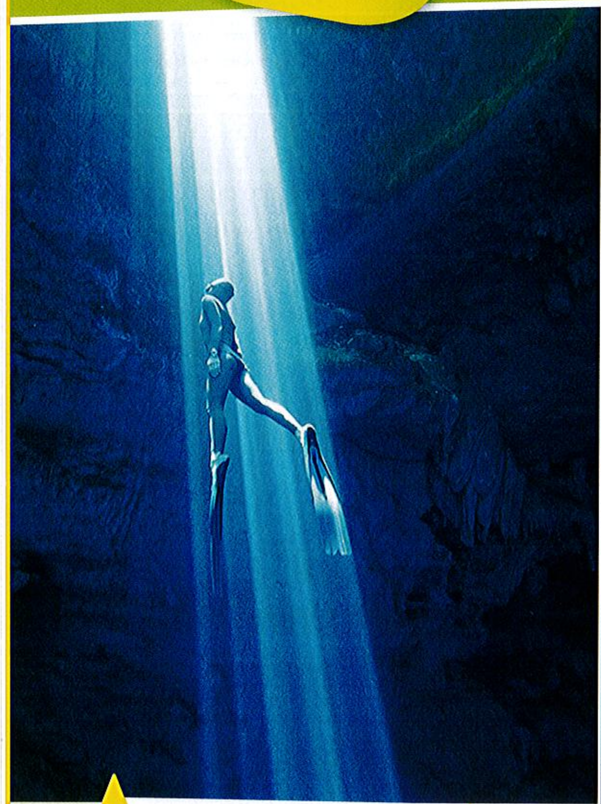
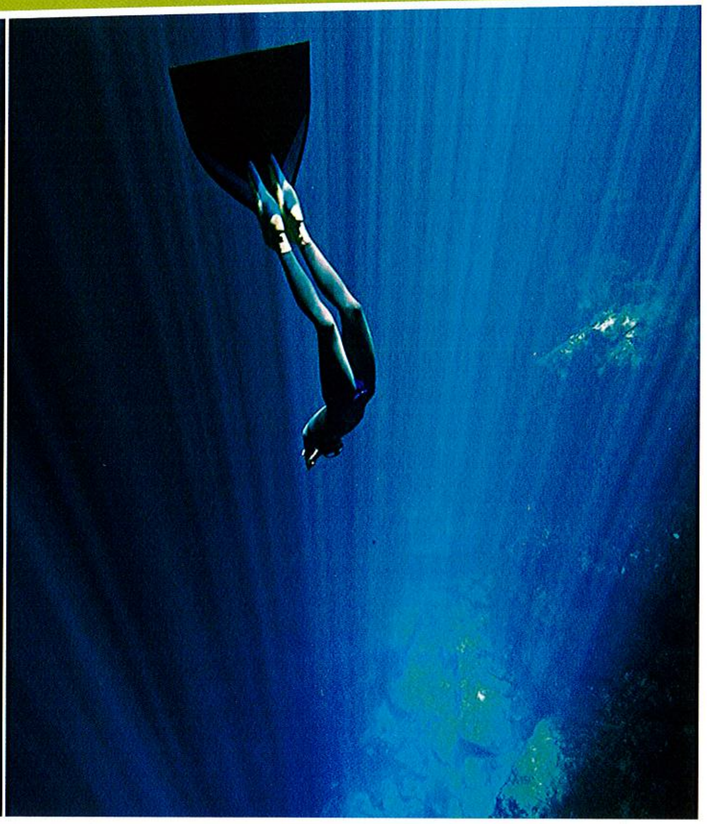
2 Étude qualitative de fonctions





Pendant la plongée, l'apnéiste est soumis à une pression qui est fonction de la profondeur. Elle augmente d'environ 1 bar tous les 10 m en eau de mer.

Au fil des siècles

La notation $f(x)$ qui désigne l'image d'un nombre par une fonction est due au mathématicien et physicien suisse Leonhard Euler.

● ***Rechercher sur Internet à quelle célèbre formule d'Euler sur les polyèdres, ce timbre rend-il hommage ?***

Les capacités du programme

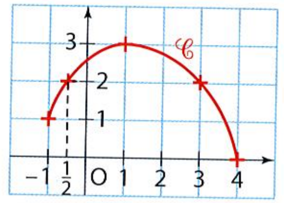
	Choix d'exercices	
• Décrire avec un vocabulaire adapté ou un tableau de variation le comportement d'une fonction définie par une courbe.	28 34	38
• Dessiner une représentation graphique compatible avec un tableau de variation.	2 36	51
• Comparer les images de deux nombres d'un intervalle lorsque le sens de variation est donné.	30 39	79
• Déterminer le maximum, le minimum d'une fonction sur un intervalle.	5 43	49
• Étudier le sens de variation d'une fonction affine.	10 68	69

Bien démarrer

Travailler en autonomie

1 Lire des images, des antécédents

f est la fonction définie sur l'intervalle $[-1;4]$ par la courbe $\mathscr{C}$ dans le repère ci-contre.



1. Lire l'image par f de :

a) -1 **b)** 3 **c)** 4

2. Lire le (ou les) antécédent(s) par f de :

a) 2 **b)** 3

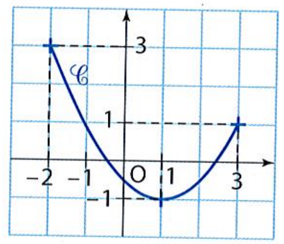
3. Lire les antécédents de 1 par f ; donner une valeur approchée de l'un d'eux.

2 Comparer des nombres

f est la fonction définie sur l'intervalle $[-2;3]$ par la courbe $\mathscr{C}$ dans le repère ci-contre.

Pour chaque affirmation, dire si elle est vraie ou fausse.

a) $f(-1{,}5) < f(-1)$ **b)** $f(0) > f(1)$ **c)** $f(2) > f(3)$



3 Utiliser le tableur

Voici un tableau de valeurs d'une fonction f obtenu avec le tableur. Donner l'expression de $f(x)$.

C2 =C1^2+7*C1-5

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	x	-3	-2	-1	0	1	2	3
2	$f(x)$	-17	-15	-11	-5	3	13	25

4 Utiliser la calculatrice

f est la fonction définie sur l'intervalle $[-2;3]$ par $f(x) = x^2 - x - 2$.

a) Afficher à l'écran de la calculatrice la courbe représentative de la fonction f (*fenêtre* : $-2 \leqslant X \leqslant 3$, pas 1 et $-3 \leqslant Y \leqslant 5$, pas 1).

b) Tabuler la fonction f sur l'intervalle $[-2;3]$ avec le pas 0,5.

c) Conjecturer le plus petit des nombres $f(x)$ et la valeur de x pour laquelle il est obtenu.

5 Connaître les fonctions affines

f, g, h sont les fonctions affines définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = -2x \qquad g(x) = 4x^2 - 1 \qquad h(x) = 5x - 1$$

a) Parmi ces fonctions, laquelle est une fonction linéaire ? une fonction affine non linéaire ?

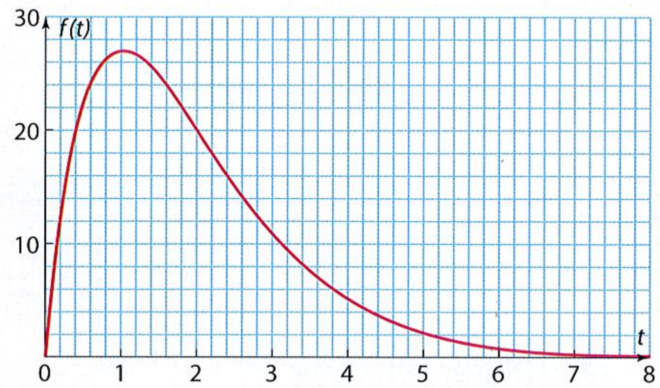
b) Dans un repère, tracer la courbe représentative de chacune des fonctions citées à la question **a)**.

Aide et corrigés sur le site **hyperbole.nathan.fr/2de-2017**

Voir Indice

1 Décrire les variations d'une fonction

Lorsque l'on absorbe un médicament, la quantité de principe actif de ce médicament dans le sang évolue en fonction du temps.
On note f la fonction qui au temps écoulé t (en h) depuis la prise d'un médicament associe la quantité de principe actif (en mg.L^{-1}) dans le sang.
Voici la courbe représentative de la fonction f dans un repère.



Problème

Décrire l'évolution de la quantité de principe actif dans le sang au cours du temps.

1 Décrire avec un texte

a) Recopier et compléter les phrases suivantes avec le mot « augmente » ou « diminue ».
Lorsque le temps écoulé augmente :
- entre 0 h et 1 h, la quantité de principe actif … ;
- entre 1 h et 8 h, la quantité de principe actif ….

b) Estimer la quantité maximale de principe actif dans le sang.
Au bout de combien de temps, après la prise du médicament, est-elle atteinte ?

2 Décrire avec l'algèbre

a) Comparer : • $f(0,2)$ et $f(0,4)$; • $f(2,5)$ et $f(5,2)$; • $f(6,8)$ et $f(6,85)$.

b) t_1 et t_2 désignent deux valeurs du temps entre 0 h et 8 h avec $t_1 \leqslant t_2$.
Comparer $f(t_1)$ et $f(t_2)$ dans chacun des cas :
- t_1 et t_2 appartiennent à l'intervalle $[0\,;1]$;
- t_1 et t_2 appartiennent à l'intervalle $[1\,;8]$.

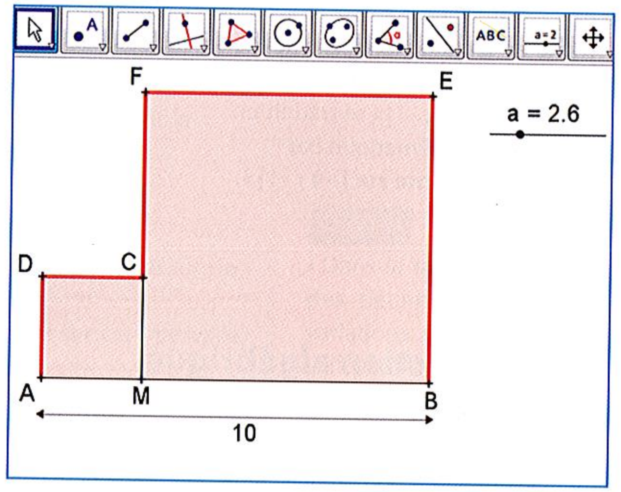
3 Décrire avec un tableau

On dit que la fonction f est croissante sur l'intervalle $[0\,;1]$ et décroissante sur l'intervalle $[1\,;8]$.
Recopier et compléter le tableau de variation de f.

t	0	1	8
$f(t)$	0 ↗	…	

2 Un problème d'optimisation

Un jardinier souhaite créer deux parterres de forme carrée, AMCD et MBEF, situés d'un même côté de la droite (AB), avec $AB = 10$ m.



Problème

Aider le jardinier à placer le point M sur le segment [AB] de façon que la longueur de la bordure ADCFEB soit minimale.

1 Conjecturer avec un logiciel de géométrie

a) Créer un curseur a allant de 0 à 10 avec un incrément de 0,1.

b) Créer un segment [AB] de longueur 10 (utiliser **Segment de longueur donnée**).

c) Créer le point M du segment [AB] tel que $AM = a$.

d) Créer les carrés AMCD et MBEF (utiliser **Polygone régulier**).

e) Créer la ligne brisée ADCFEB (utiliser **Ligne brisée**), sa longueur L s'affiche dans la fenêtre Algèbre.

f) Déplacer le curseur a. Dire comment semble varier L en fonction de a.

g) Quelle semble être la valeur minimale de L ?
Pour quelle valeur de a est-elle obtenue ?

2 Justifier

On note a la longueur AM, en mètres, et f la fonction qui à chaque nombre réel a de l'intervalle $[0\,;10]$ associe la longueur L, en mètres, de la ligne brisée ADCFEB.

a) Exprimer $f(a)$ en fonction de a lorsque :
- $a \in [0\,;5]$
- $a \in [5\,;10]$

b) Indiquer le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;5]$ et sur l'intervalle $[5\,;10]$.

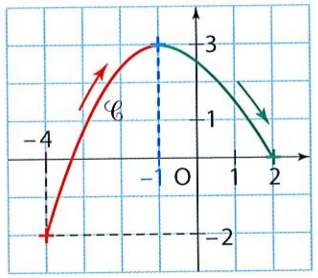
c) Répondre alors au problème du jardinier. Expliquer.

1 Sens de variation et tableau de variation

a. Idée intuitive

f est la fonction définie sur l'intervalle $[-4\,;2]$ par la courbe $\mathscr{C}$ dans le repère ci-dessous.

Dire en langage familier que « la courbe $\mathscr{C}$ monte de gauche à droite sur $[-4\,;-1]$ » se traduit en langage mathématique par :
« **f est croissante sur $[-4\,;-1]$** ».



Dire en langage familier que « la courbe $\mathscr{C}$ descend de gauche à droite sur $[-1;2]$ » se traduit en langage mathématique par :
« **f est décroissante sur $[-1;2]$** ».

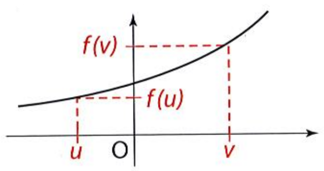
b. Traduction algébrique

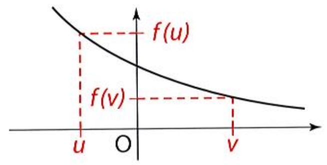
DÉFINITIONS

f est une fonction définie sur un intervalle I.

Dire que la fonction f est **croissante sur I** signifie que, pour tous nombres réels u et v de I,
si $u \leqslant v$, alors $f(u) \leqslant f(v)$.

Dire que la fonction f est **décroissante sur I** signifie que, pour tous nombres réels u et v de I,
si $u \leqslant v$, alors $f(u) \geqslant f(v)$.





CONSÉQUENCES

Une fonction croissante sur I conserve l'ordre : deux nombres réels quelconques de I et leurs images sont rangés dans **le même ordre**.

Une fonction décroissante sur I change l'ordre : deux nombres réels quelconques de I et leurs images sont rangés dans des **ordres contraires**.

c. Tableau de variation : exemple

On reprend la fonction f dont la courbe représentative est tracée au paragraphe **a**.
Le sens de variation de la fonction f est résumé dans **un tableau de variation**.

Ces valeurs sont lues sur l'axe des abscisses.

Ces valeurs sont lues sur l'axe des ordonnées.

x	-4		-1		2
$f(x)$	-2	↗	3	↘	0

On indique les plus grands intervalles sur lesquels f est croissante ou décroissante.

Exercice résolu — Lire un tableau de variation

1 Énoncé

Voici ci-contre le tableau de variation d'une fonction g définie sur l'intervalle $[-2\,;5]$.

x	-2		1		4		5
$g(x)$	-1	↗	2	↘	0	↗	3

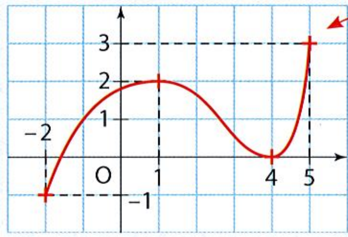
a) Décrire les variations de la fonction g.
b) Comparer :
• $g(-1)$ et $g(0)$; • $g(2)$ et $g(4)$.
c) Tracer une courbe susceptible de représenter graphiquement la fonction g dans un repère.

Solution

a) La fonction g est croissante sur l'intervalle $[-2\,;1]$, décroissante sur l'intervalle $[1\,;4]$ et croissante sur l'intervalle $[4\,;5]$.

b) • -1 et 0 appartiennent à $[-2\,;1]$, or g est croissante sur cet intervalle, donc leurs images sont rangées dans le même ordre :
$-1 \leqslant 0$ donc $g(-1) \leqslant g(0)$.
• 2 et 4 appartiennent à $[1\,;4]$, or g est décroissante sur cet intervalle, donc leurs images sont rangées dans l'ordre contraire :
$2 \leqslant 4$ donc $g(2) \geqslant g(4)$.

c) La courbe ci-dessous est une représentation graphique possible de la fonction g.



Conseils

• Dans le tableau, le sens des flèches indique les variations. On lit les intervalles sur la ligne « x ».

• On ne connaît pas les valeurs de $g(-1)$ et $g(0)$, mais comme -1 et 0 appartiennent à un même intervalle sur lequel g est croissante, on peut malgré tout comparer $g(-1)$ et $g(0)$.

• On place d'abord les points de coordonnées données dans le tableau de variation.

À votre tour

2 **a)** Décrire le sens de variation de la fonction h dont le tableau de variation est donné ci-dessous.

x	-4		-1		1		3
$h(x)$	4	↘	-1	↗	3	↘	0

b) Comparer : • $h(0)$ et $h(1)$; • $h(2)$ et $h(2,5)$.
c) Tracer une courbe susceptible de représenter la fonction h dans un repère.

3 **1.** Décrire le sens de variation de la fonction k dont le tableau de variation est donné ci-dessous.

x	-10		0		10
$k(x)$	1	↘	0	↗	2

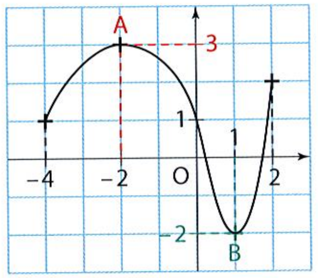
2. Ranger du plus petit au plus grand :
a) $k(-0,5)$, $k(-0,6)$, $k(-\sqrt{2})$.
b) $k(\pi)$, $k(\sqrt{3})$, $k(3)$.

2 Maximum, minimum

a. Idée intuitive

f est la fonction définie sur l'intervalle $[-4\,;2]$ par la courbe $\mathscr{C}$ dans le repère ci-dessous.

Dire que « $A(-2\,;3)$ est le point le plus haut de la courbe sur $[-4\,;2]$ » se traduit en langage mathématique par : « **3 est le maximum de f sur $[-4\,;2]$** et il est atteint en -2 ».



Dire que « $B(1\,;-2)$ est le point le plus bas de la courbe sur $[-4\,;2]$ » se traduit en langage mathématique par : « **-2 est le minimum de f sur $[-4\,;2]$** et il est atteint en 1 ».

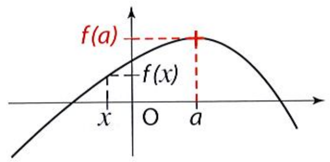
b. Traduction algébrique

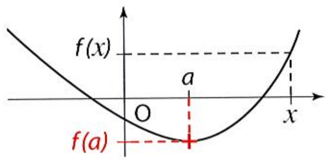
DÉFINITIONS

f est une fonction définie sur un intervalle I et a désigne un nombre réel de I.

Dire que **$f(a)$ est le maximum** de f sur I signifie que, pour tout nombre réel x de I,
$$f(x) \leqslant f(a)$$

Dire que **$f(a)$ est le minimum** de f sur I signifie que, pour tout nombre réel x de I,
$$f(a) \leqslant f(x)$$





Vocabulaire

On dit que $f(a)$ est **un extremum** de f sur l'intervalle I pour exprimer que $f(a)$ est un maximum ou un minimum de f sur I.

c. Avec un tableau de variation : exemple

On reprend la fonction f dont la courbe représentative est tracée au paragraphe **a.**

x	-4	-2	1	2
$f(x)$	1 ↗	3 ↘	-2 ↗	2

Le maximum de f sur $[-4\,;2]$ est 3, il est atteint pour $x=-2$.

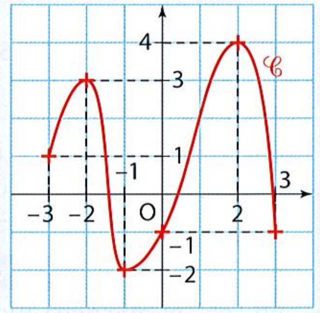
Le minimum de f sur $[-4\,;2]$ est -2, il est atteint pour $x=1$.

Exercice résolu — Lire un maximum, un minimum sur un intervalle

4 Énoncé

f est une fonction définie sur l'intervalle $[-3\,;3]$.
Sa courbe représentative $\mathscr{C}$ est tracée dans le repère ci-contre.
Lire graphiquement le maximum et le minimum de f sur chacun des intervalles indiqués et préciser la valeur de x pour laquelle il est atteint.

a) $[-3\,;3]$ **b)** $[-3\,;0]$ **c)** $[0\,;3]$



Solution

a) Sur l'intervalle $[-3\,;3]$:
- le maximum de f est 4 ; il est atteint en 2 ;
- le minimum de f est -2 ; il est atteint en -1.

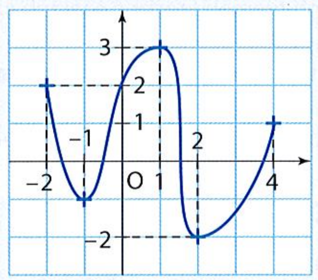
b) Sur l'intervalle $[-3\,;0]$:
- le maximum de f est 3 ; il est atteint en -2 ;
- le minimum de f est -2 ; il est atteint en -1.

c) Sur l'intervalle $[0\,;3]$:
- le maximum de f est 4 ; il est atteint en 2 ;
- le minimum de f est -1 ; il est atteint en 0 et en 3.

Conseil
Sur l'intervalle indiqué, on lit l'ordonnée du point le plus haut et du point le plus bas sur la partie correspondante de la courbe.

À votre tour

5 g est une fonction définie sur l'intervalle $[-2\,;4]$. Sa courbe représentative est tracée dans le repère ci-dessous.
Lire le maximum et le minimum de f sur chaque intervalle indiqué et préciser la valeur de x pour laquelle il est atteint.
a) $[-2\,;0]$ **b)** $[0\,;4]$
c) $[-2\,;4]$ **d)** $[2\,;4]$



6 h est une fonction définie sur l'intervalle $[-4\,;7]$. Voici son tableau de variation.

x	-4	-1	0	3	7
$h(x)$	1 ↘	-2 ↗	5 ↘	-3 ↗	4

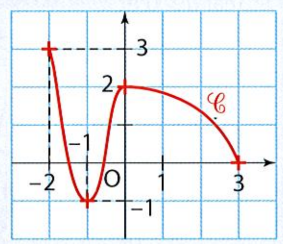
Sur chaque intervalle indiqué, donner le maximum et le minimum de h et préciser en quel nombre il est atteint.
a) $[-4\,;0]$ **b)** $[0\,;7]$ **c)** $[-1\,;3]$ **d)** $[-4\,;7]$

7 Voici le tableau de variation d'une fonction f définie sur l'intervalle $[-7\,;5]$.

x	-7	-3	3	5
$f(x)$	-4 ↗	2 ↘	0 ↗	3

Dans chaque cas, justifier la proposition.
a) Pour tout nombre réel x de $[-7\,;3]$, $-4 \leqslant f(x) \leqslant 2$.
b) Pour tout nombre réel x de $[-3\,;5]$, $0 \leqslant f(x) \leqslant 3$.

8 $\mathscr{C}$ est la courbe représentative d'une fonction m définie sur l'intervalle $[-2\,;3]$.
Recopier et compléter le plus précisément possible les inégalités.
a) Pour tout nombre réel x de $[-2\,;3]$,
$\ldots \leqslant m(x) \leqslant \ldots$
b) Pour tout nombre réel x de $[0\,;3]$,
$\ldots \leqslant m(x) \leqslant \ldots$



3 Fonctions affines et sens de variation

a. Des fonctions de référence

DÉFINITION

Une **fonction affine** est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ qui à chaque nombre réel x associe le nombre $ax+b$ où a et b sont deux nombres réels donnés.

EXEMPLES

$f: x \mapsto -5x+2$ (ici, $a=-5$, $b=2$) et $g: x \mapsto \frac{x}{2}-4$ (ici, $a=\frac{1}{2}$, $b=-4$) sont des fonctions affines.

Cas particuliers : • $x \mapsto ax$ (ici, $b=0$) est une fonction affine particulière : c'est une fonction **linéaire**.
• $x \mapsto b$ (ici, $a=0$) est une fonction affine particulière : c'est une fonction **constante**.

PROPRIÉTÉ

Si f est une fonction affine $x \mapsto ax+b$, alors pour tous nombres réels u et v, $\boldsymbol{f(v)-f(u)=a(v-u)}$.

En effet, $f(v)-f(u)=av+b-(au+b)=av+b-au-b=av-au=a(v-u)$.

b. Courbe représentative

PROPRIÉTÉS ADMISES

Le plan est muni d'un repère.
(1) La courbe représentative d'une fonction affine est une droite non parallèle à l'axe des ordonnées.
(2) Réciproquement, toute droite non parallèle à l'axe des ordonnées est la courbe représentative d'une fonction affine.

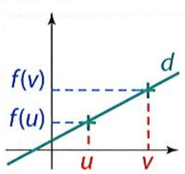
Vocabulaire : dans un repère, d est la droite représentant la fonction affine $f: x \mapsto ax+b$. On dit que :
- a est le **coefficient directeur** de d ;
- b est l'**ordonnée à l'origine** de d : c'est l'ordonnée du point d'intersection de d avec l'axe des ordonnées.

c. Sens de variation d'une fonction affine

Dans un repère, d est la droite représentant la fonction affine $x \mapsto ax+b$.

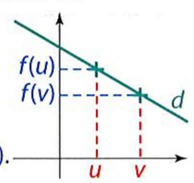
Cas où $a>0$

Si $v \geqslant u$, alors $a(v-u) \geqslant 0$ (car $a>0$ et $v-u \geqslant 0$).
D'où : $f(v) \geqslant f(u)$.



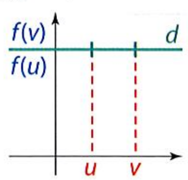
Cas où $a<0$

Si $v \geqslant u$, alors $a(v-u) \leqslant 0$ (car $a<0$ et $v-u \geqslant 0$).
D'où : $f(v) \leqslant f(u)$.



Cas où $a=0$

Si $v \geqslant u$, alors $a(v-u)=0$.
D'où : $f(u)=f(v)$.



PROPRIÉTÉS

f est une fonction affine $x \mapsto ax+b$ (avec a et b nombres réels).
- Si $\boldsymbol{a>0}$, alors f est **croissante** sur $\mathbb{R}$.
- Si $\boldsymbol{a<0}$, alors f est **décroissante** sur $\mathbb{R}$.
- Si $\boldsymbol{a=0}$, alors f est **constante** sur $\mathbb{R}$.

Exercice résolu Étudier les variations d'une fonction affine

9 Énoncé

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\frac{1}{4}x-1$.
a) Dresser le tableau de variation de la fonction f.
b) Dans un repère, tracer la courbe représentative de la fonction f.

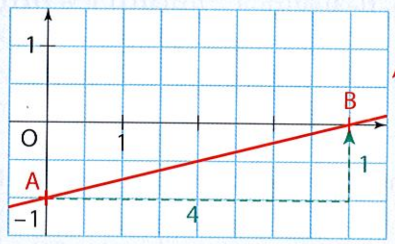
Solution

a) f est une fonction affine $x \mapsto ax+b$ avec $a=\frac{1}{4}$ et $b=-1$.
Or, $\frac{1}{4}>0$ donc la fonction f est croissante sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x)$	↗	

b) f est une fonction affine donc sa courbe représentative est une droite.

• Première méthode
$f(0)=-1$ et $f(4)=0$.
On trace la droite qui passe par les points A$(0\,;-1)$ et B$(4\,;0)$.



• Deuxième méthode
$b=-1$, donc la droite passe par le point A$(0\,;-1)$.
$a=\frac{1}{4}$ donc, lorsque x augmente de 1, $f(x)$ augmente de $\frac{1}{4}$, et lorsque x augmente de 4, $f(x)$ augmente de $\frac{1}{4}\times 4$ c'est-à-dire de 1.
Depuis le point A, on se déplace horizontalement de 4 unités vers la droite, puis verticalement de 1 unité vers le haut. On aboutit au point B (trajet en vert ci-dessus).
On trace alors la droite (AB).

Conseils

- Pour connaître le sens de variation sur $\mathbb{R}$ d'une fonction affine $x \mapsto ax+b$, on observe le signe de a.
- Pour tracer dans un repère la droite d représentant une fonction affine $x \mapsto ax+b$:
– soit **on choisit** deux valeurs de x, pas trop proches, on calcule leurs images et on place les points correspondants ;
– soit on exploite graphiquement l'ordonnée à l'origine b et le coefficient directeur a.

À votre tour

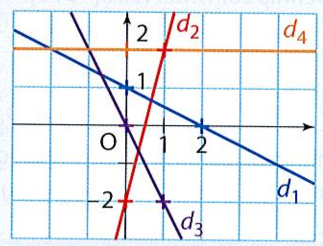
10 f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$f(x)=-2x+3{,}5$$
a) Dresser le tableau de variation de la fonction f.
b) Dans un repère, tracer la courbe représentative de la fonction f.
Vérifier la cohérence avec le tableau de variation obtenu au **a)**.

11 Dresser le tableau de variation de chacune de ces fonctions affines.

$f: x \mapsto -\frac{1}{2}x+1$ $\qquad g: x \mapsto -2x-\frac{1}{4}$

$h: x \mapsto \frac{1}{5}x-2$ $\qquad k: x \mapsto -x+1$

12 Voici quatre fonctions affines :
$j: x \mapsto 4x-2 \quad k: x \mapsto -2x \quad \ell: x \mapsto 2 \quad m: x \mapsto -0{,}5x+1$
a) Andréa affirme : « La droite d_2, tracée ci-dessous représente la fonction m ». Est-ce exact ?
b) Associer chaque fonction à celle des droites ci-dessous qui la représente.



Problème résolu — Comparer des images avec un tableau de variation

13 Énoncé

f est une fonction définie sur l'intervalle $[-5\,;5]$.
Voici ci-contre le tableau de variation de f.
Déterminer tous les nombres réels dont l'image par la fonction f est positive ou nulle.

x	-5	-3	0	1	2	5
$f(x)$	-2 ↗	0 ↗	2 ↘	0 ↘	-4 ↗	-1

Solution

• **Conséquences tirées du tableau de variation**

Intervalle I	$[-5\,;-3]$	$[-3\,;0]$	$[0\,;1]$	$[1\,;2]$	$[2\,;5]$
Sens de variation de f	f croissante	f croissante	f décroissante	f décroissante	f croissante
Conséquence	$-5\leqslant x\leqslant -3$ $f(x)\leqslant \mathbf{f(-3)}$ $f(x)\leqslant 0$	$-3\leqslant x\leqslant 0$ $\mathbf{f(-3)}\leqslant f(x)$ $0\leqslant f(x)$ c'est-à-dire : $f(x)\geqslant 0$	$0\leqslant x\leqslant 1$ $f(x)\geqslant \mathbf{f(1)}$ $f(x)\geqslant 0$	$1\leqslant x\leqslant 2$ $\mathbf{f(1)}\geqslant f(x)$ $0\geqslant f(x)$ c'est-à-dire : $f(x)\leqslant 0$	$2\leqslant x\leqslant 5$ $f(x)\leqslant \mathbf{f(5)}$ $f(x)\leqslant -1$ donc : $f(x)\leqslant 0$

• **Conclusion :** les nombres réels x qui ont une image positive ou nulle sont les nombres appartenant à l'intervalle $[-3\,;1]$.

À votre tour

14 Voici le tableau de variation d'une fonction g définie sur l'intervalle $[-1\,;6]$.

x	-1	0	1	3	4	6
$g(x)$	1 ↗	3 ↘	0 ↘	-1 ↗	0 ↗	2

a) Tracer une courbe susceptible de représenter graphiquement g.
b) Déterminer tous les nombres réels dont l'image par la fonction g est négative ou nulle.

15 Voici le tableau de variation d'une fonction h définie sur l'intervalle $[-3\,;6]$.

x	-3	-2	-1	4	$4{,}5$	6
$h(x)$	-5 ↗	0 ↗	2 ↘	0 ↗	2 ↗	3

Déterminer tous les nombres réels dont l'image par la fonction h est supérieure ou égale à 2.

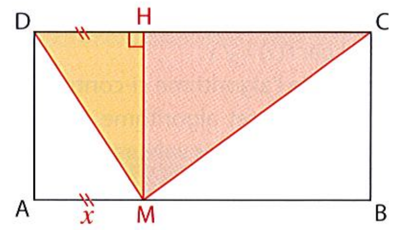
16 k est une fonction décroissante sur $]-\infty\,;0]$ et croissante sur $[0\,;+\infty[$.
De plus $k(-2)=k(2)=1$.
Pour chaque affirmation, dire si elle est vraie ou fausse. Justifier.
a) Pour tout nombre réel x de l'intervalle $[-2\,;2]$, $k(x)$ est inférieur ou égal à 1.
b) Si $k(x)\geqslant 1$, alors nécessairement $x\geqslant 2$.
c) Pour tout nombre réel x de l'intervalle $]-\infty\,;-2]$, $k(x)$ est strictement positif.
d) Si $k(u)\leqslant 1\leqslant k(v)$, alors nécessairement $u\leqslant 2\leqslant v$.

17 ℓ est une fonction décroissante sur $[0\,;+\infty[$ telle que $\ell(1)=1$.
m est une fonction croissante sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ telle que $m(1)=1$.
Pour tout nombre réel x de l'intervalle $[0\,;+\infty[$, comparer $\ell(x)$ et $m(x)$.

Problème résolu — Conjecturer, puis démontrer

18 Énoncé

ABCD est un rectangle tel que $AB=6$ cm et $AD=3$ cm.
M est un point variable du segment $[AB]$.
H est le pied de la hauteur issue de M du triangle CMD.
On note x la longueur AM, en cm, $f(x)$ l'aire du triangle MHD, en cm², et $g(x)$ l'aire du triangle MHC, en cm².
a) Conjecturer le sens de variation de chacune des fonctions f et g.
b) Démontrer ces conjectures.



Solution

a) M décrit le segment $[AB]$ donc x décrit l'intervalle $[0\,;6]$.
Lorsque M se déplace de A à B, il semble que l'aire du triangle MHD augmente et que celle du triangle MHC diminue.
On conjecture que f est croissante sur $[0\,;6]$ et que g est décroissante sur $[0\,;6]$.

Conseil
• On peut réaliser cette figure avec un logiciel de géométrie pour faciliter les conjectures.

b) • **Modélisation**

Aire du triangle MHD : $\frac{1}{2}\times DH\times MH=\frac{1}{2}\times x\times 3$ soit $f(x)=\frac{3}{2}x$.

Aire du triangle MHC : $\frac{1}{2}\times HC\times MH=\frac{1}{2}\times(6-x)\times 3$ soit $g(x)=9-\frac{3}{2}x$.

• **Preuve**

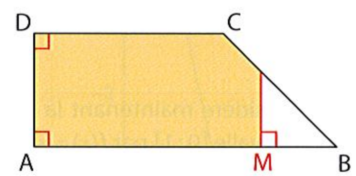
$x\mapsto\frac{3}{2}x$ et $x\mapsto 9-\frac{3}{2}x$ sont des fonctions affines.
Sur l'intervalle $[0\,;6]$: la fonction f est croissante car $\frac{3}{2}>0$ et la fonction g est décroissante car $-\frac{3}{2}<0$.

À votre tour

19 On reprend la figure de l'exercice **18**.
On note $h(x)$ l'aire, en cm², du triangle DMC.
a) Réaliser la figure avec un logiciel et conjecturer le sens de variation de la fonction h.
b) Démontrer cette conjecture.

20 ABC est un triangle équilatéral de côté 4 cm.
H est le pied de la hauteur issue de A et M est un point variable du côté $[BC]$.
On note x la longueur BM, en cm, et $f(x)$ l'aire, en cm², du triangle AMH.
Étudier les variations de f :
a) sur l'intervalle $[0\,;2]$;
b) sur l'intervalle $[2\,;4]$.

21 ABCD est un trapèze rectangle en A et en D tel que $AB=8$, $AD=3$, $CD=5$.
M est un point variable du côté $[AB]$.
On note x la distance AM et $f(x)$ l'aire du domaine coloré.



a) Observer la figure et conjecturer le sens de variation de f.
b) Exprimer $f(x)$ en fonction de x dans chacun des cas : • $x\in[0\,;5]$ • $x\in[5\,;8]$

Algo p. 326 et 330

Problème résolu — Comprendre les boucles non bornées et l'instruction conditionnelle

22 Énoncé

f est la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;1]$ par $f(x)=\sqrt{x}$.
On étudie l'algorithme ci-contre.

a) Exécuter cet algorithme et compléter le tableau avec des valeurs approchées au centième près.

x	0	0,1	…
$f(x)$	0		…
$f(x+0,1)$	0,32		…
d	1		…

Quel est le message affiché en sortie ?

b) Expliquer le rôle de cet algorithme.

Variables : x, d sont des nombres réels
Traitement : Affecter à x la valeur 0
Affecter à d la valeur 1
Tant que $x \leqslant 0,9$
  Si $f(x+0,1) < f(x)$ alors
    Affecter à d la valeur 0
  Fin Si
  Affecter à x la valeur $x+0,1$
Fin Tant que
Sortie : Si $d=0$ alors
  Afficher "f n'est pas croissante sur $[0\,;1]$"
sinon
  Afficher "f semble croissante sur $[0\,;1]$"
Fin Si

Solution

a) Le tableau permet de suivre l'évolution des variables x et d lorsque l'algorithme s'exécute.

x	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
$f(x)$	0	0,32	0,45	0,55	0,63	0,71	0,77	0,84	0,89	0,95	
$f(x+0,1)$	0,32	0,45	0,55	0,63	0,71	0,77	0,84	0,89	0,95	1	
d	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

À la fin de l'algorithme, la variable d a conservé la valeur 1, le message affiché en sortie est donc : "f semble croissante sur $[0\,;1]$".

b) L'algorithme teste si la fonction f semble croissante sur l'intervalle $[0\,;1]$.

Remarque : lorsque $f(0) \leqslant f(0,1) \leqslant f(0,2) \leqslant \ldots \leqslant f(0,2) \leqslant f(1)$ (comme c'est le cas ci-dessus pour la fonction racine carrée), on ne peut pas conclure que f est croissante sur $[0\,;1]$, mais seulement que f **semble croissante** sur $[0\,;1]$. En effet, on n'a pas étudié l'ordre des images par f de deux nombres quelconques de l'intervalle $[0\,;1]$.

À votre tour

23 **a)** On considère maintenant la fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;1]$ par $f(x)=x-x^2$.
Pour cette fonction, répondre à la question **a)** de l'exercice **22**.
b) Expliquer le rôle de la variable d dans le fonctionnement de l'algorithme.

24 Modifier l'algorithme de l'exercice **22** afin de l'appliquer aux situations suivantes.
a) f est la fonction définie sur $[0\,;2]$ par $f(x)=x^2$.
On teste si f semble croissante sur $[0\,;2]$.
b) g est la fonction définie sur $[0\,;1]$ par $g(x)=1-x^3$.
On teste si g semble décroissante sur $[0\,;1]$.

Algo p. 328 et 330

25 Recherche des extremums

Objectif

Rechercher les extremums d'une fonction à l'aide d'un algorithme.

1 Étude d'un algorithme

f est la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;1]$ par :
$$f(x)=-5x^2+8x-2$$

a) On exécute l'algorithme ci-contre.
Afin de suivre l'évolution des contenus des différentes variables, recopier et compléter ce tableau.

k		1	2	…	10
x	0	0,1	0,2	…	
y		− 1,25	− 0,6	…	
max	− 2	− 1,25	− 0,6	…	

Quelle valeur l'algorithme affiche-t-il en sortie ?

b) Expliquer le rôle de cet algorithme. Que représente la valeur de la variable max affichée en sortie ?

Variables : x, y, max sont des nombres réels
k est un nombre entier naturel
Traitement : Affecter à x la valeur 0
Affecter à max la valeur $f(0)$
Pour k allant de 1 à 10
  Affecter à x la valeur $x+0,1$
  Affecter à y la valeur $f(x)$
  Si $y > max$ alors
    Affecter à max la valeur y
  Fin Si
Fin Pour
Sortie : Afficher max

2 Test de cet algorithme

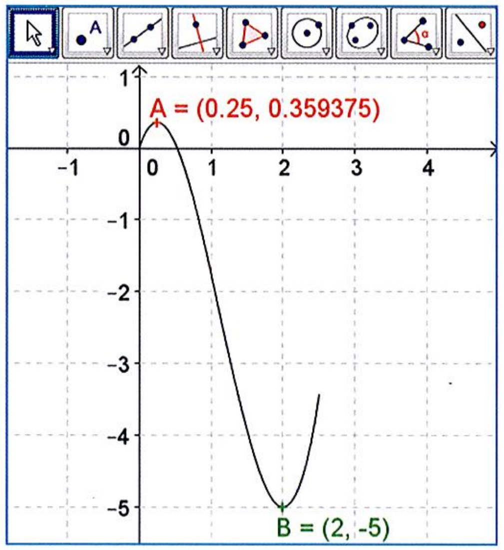
g est la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;2,5]$ par $g(x)=2x^3-6,75x^2+3x$.

a) Adapter l'algorithme afin qu'il puisse s'appliquer à la fonction g.

b) Traduire l'algorithme obtenu dans un langage de programmation et le saisir (calculatrice, Python, AlgoBox ou autre).

c) Exécuter ce programme. Quel résultat affiche-t-il ?

d) Voici la courbe représentative de la fonction g obtenue avec un logiciel de géométrie.
Les extremums sur $[0\,;2,5]$ sont affichés.
Comparer la valeur lue du maximum et celle obtenue avec le programme.
Expliquer la différence observée.



3 Travailler en autonomie — Compte-rendu

a) Compléter l'algorithme et le programme de la question **2** afin qu'il recherche également le minimum de g sur l'intervalle $[0\,;2,5]$.

b) Comparer les valeurs obtenues avec le programme et avec le logiciel pour le minimum. Expliquer.

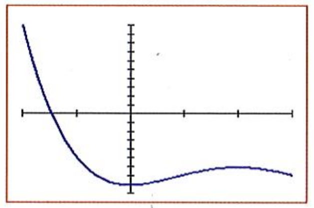
26 Lecture d'informations sur un écran graphique

Objectif

Envisager les inconvénients de la lecture des variations et des extremums d'une fonction sur un écran.

1 Une information partielle

f est la fonction définie sur $[-2\,;+\infty[$ par $f(x)=\frac{1}{8}x^4-x^3+2x^2-8$.



a) Louis a affiché la courbe de la fonction f à l'écran de sa calculatrice (*fenêtre :* $-2\leqslant X\leqslant 3$, pas 1 et $-9\leqslant Y\leqslant 10$, pas 1).

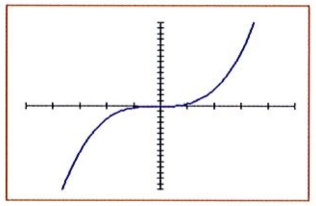
- Pourquoi ne peut-on pas décrire complètement le sens de variation de f sur $[-2\,;+\infty[$?
- Quelles informations peut-on toutefois donner ?

b) Afficher à l'écran de la calculatrice, la courbe représentative de f avec la fenêtre : $-2\leqslant X\leqslant 6$, pas 1 et $-9\leqslant Y\leqslant 10$, pas 1.

c) Peut-on décrire complètement le sens de variation de f sur $[-2\,;+\infty[$ par lecture d'un écran graphique ?

2 De plus près

g est la fonction définie sur $[-5\,;5]$ par $g(x)=\frac{1}{3}x^3+0{,}1x^2$.

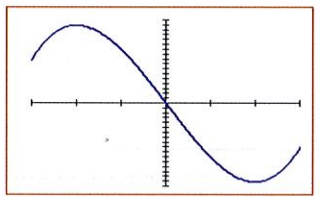


a) Anita a affiché la courbe de la fonction g à l'écran de sa calculatrice (*fenêtre :* $-5\leqslant X\leqslant 5$, pas 1 et $-15\leqslant Y\leqslant 15$, pas 1).
Conjecturer le sens de variation de la fonction g sur $[-5\,;5]$.

b) Afficher la courbe représentative de la fonction g avec la fenêtre : $-0{,}5\leqslant X\leqslant 0{,}5$, pas 0,1 et $-0{,}01\leqslant Y\leqslant 0{,}01$, pas 0,001.
Que remarque-t-on ?

3 Choix de l'intervalle

h est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x)=x^3-12x$.



a) Dimitri a affiché la courbe de la fonction h à l'écran de sa calculatrice (*fenêtre :* $-3\leqslant X\leqslant 3$, pas 1 et $-17\leqslant Y\leqslant 17$, pas 1).
Quelles conjectures concernant les extremums de h Dimitri peut-il proposer à partir de son écran graphique ?

b) Afficher la courbe représentative de la fonction h avec la fenêtre : $-5\leqslant X\leqslant 5$, pas 1 et $-65\leqslant Y\leqslant 65$, pas 10.

Émettre alors des conjectures relatives à des extremums de h à partir de cette étude.

4 Travailler en autonomie — Compte-rendu

a) Expliquer en quelques lignes les inconvénients que peut présenter la lecture des variations d'une fonction sur un écran graphique.

b) Quelles précautions doit-on prendre lorsqu'on indique des extremums d'une fonction à partir d'un écran graphique ?

27 Des fonctions en Économie

Objectif

Modéliser une situation économique.

Un grossiste, qui se fournit directement auprès d'un producteur asiatique, conditionne et commercialise du thé aromatisé.

Chaque semaine, sa production est limitée à 13 tonnes.

1 La recette

L'entreprise vend son produit 6 000 € la tonne.

Pour x tonnes vendues, on note $R(x)$ sa recette en milliers d'euros.

a) Exprimer $R(x)$ en fonction de x.

b) Quel est le sens de variation de la fonction R sur l'intervalle $[0\,;13]$?

2 Le coût de production

Pour x tonnes de thé aromatisé conditionné en une semaine, on note $C(x)$ le coût de production en milliers d'euros.

a) Intuitivement, quel est le sens de variation de la fonction C sur l'intervalle $[0\,;13]$?

b) On estime que $C(x)=\frac{1}{6}x^3-\frac{5}{2}x^2+13x$.

Afficher la courbe représentative de la fonction C à l'écran de la calculatrice (*fenêtre :* $0\leqslant X\leqslant 13$, pas 1 et $0\leqslant Y\leqslant 100$, pas 10).

Cela conforte-t-il la conjecture émise au **a)** ?

3 Le bénéfice

Pour x tonnes conditionnées et vendues en une semaine, le bénéfice, en milliers d'euros est donné par $B(x)=R(x)-C(x)$.

a) Avec le tableur, réaliser la feuille de calcul ci-contre. Dans la colonne A, saisir les nombres de 0 à 13 avec le pas 0,5.

b) Saisir les formules qui conviennent dans les cellules B2, C2, D2 et les recopier vers le bas.
Afficher 3 chiffres après la virgule.

	A	B	C	D
1	x	$R(x)$	$C(x)$	$B(x)$
2	0			
3	0,5			
4	1			
5	1,5			
6	2			

c) Estimer alors les quantités de thé pour lesquelles l'entreprise est bénéficiaire, puis la quantité pour laquelle le bénéfice est maximal.

4 Travailler en autonomie — Compte-rendu

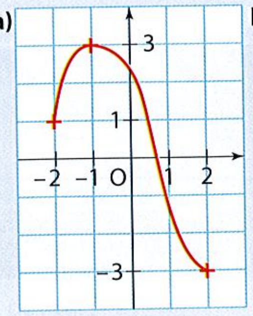
a) Rédiger en quelques lignes les conseils à donner au chef d'entreprise.

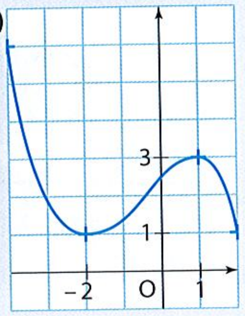
b) Ajouter à ce compte-rendu une représentation graphique de la fonction B.

Sens de variation et tableau de variation

À l'oral

28 Décrire le sens de variation de la fonction définie par la courbe donnée.

a) 

b) 

29 Décrire le sens de variation de la fonction dont voici le tableau de variation.

x	-4	-2	0	1
$g(x)$	-1	↗ 2	↘ 0	↗ 3

30 Voici le tableau de variation d'une fonction f définie sur l'intervalle $[-4\,;3]$.

x	-4	-1	3
$f(x)$	0	↘ -2	↗ 5

Comparer lorsque cela est possible :
a) $f(-3)$ et $f(-2)$; **b)** $f(-2)$ et $f(0)$; **c)** $f(2)$ et $f(3)$.

31 f est une fonction croissante sur l'intervalle $]-\infty\,;0]$ et décroissante sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$.
Ranger du plus petit au plus grand les nombres :
a) $f(-3{,}7)$, $f(-7{,}3)$, $f(-1)$.
b) $f(5)$, $f(5^2)$, $f\left(\frac{1}{5}\right)$.

32 g est une fonction décroissante sur $\mathbb{R}$ telle que $g(0)=1$ et $g(1)=0$.
Quel est l'ensemble des nombres réels tels que :
a) $g(x)\geqslant 0$? **b)** $g(x)<1$?

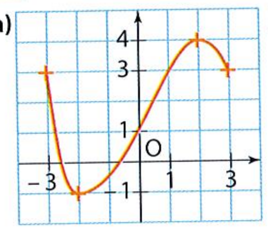
33 f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

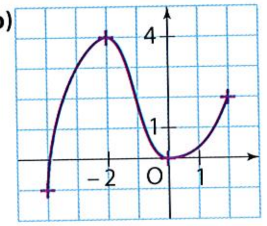
$$f(x)=x^2-2x+2$$

Léa dit : « J'ai trouvé $f(0)=2$ et $f(3)=5$, donc f est croissante sur $[0\,;3]$ ». Qu'en pensez-vous ?

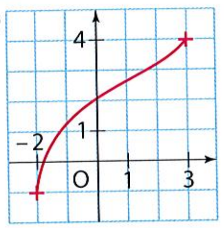
Pour les exercices 34 et 35, dresser le tableau de variation de la fonction f définie par la courbe donnée.

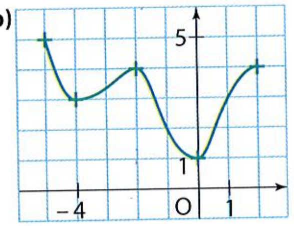
34

a) 

b) 

35

a) 

b) 

Pour les exercices 36 et 37, le tableau de variation d'une fonction f est donné.
Tracer une courbe susceptible de représenter graphiquement la fonction f.

36

x	-3	-2	0	2
$f(x)$	-1	↗ 3	↘ 1	↗ 3

37

x	-1	0	2	4
$f(x)$	3	↘ 0	↗ 1	↘ -1

38 f est la fonction définie sur $[0\,;2]$ par :

$$f(x)=x^3-x$$

a) Afficher à l'écran de la calculatrice la courbe représentative de f.
b) f est-elle croissante sur $[0\,;2]$? Justifier.
c) f est-elle décroissante sur $[0\,;2]$? Justifier.

Conseil

f est une fonction définie sur un intervalle I.
Pour démontrer, par exemple, que **f n'est pas croissante sur I**, on peut présenter deux nombres a et b de I tels que $a\leqslant b$ et $f(a)>f(b)$.

39 Voici le tableau de variation d'une fonction h définie sur l'intervalle $[-5\,;5]$.

x	-5	0	3	5
$h(x)$	4	↘ -2	↗ 0	↘ -1

a) Comparer :
- $h(-4)$ et $h(-1)$; • $h(1)$ et $h(2)$; • $h(3)$ et $h(4)$.

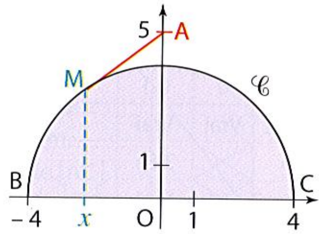
b) Peut-on comparer $h(-4)$ et $h(4)$? $h(-4)$ et $h(6)$?

40 **Vrai ou faux ?**
Le tableau ci-dessous donne les variations d'une fonction f définie sur l'intervalle $[-3\,;4]$.

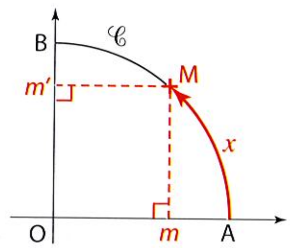
x	-3	1	2	4
$f(x)$	5	↘ 0	↗ 2	↘ -2

Pour chaque affirmation, dire si elle est vraie ou fausse. Justifier la réponse.
a) f est croissante sur $[0\,;2]$.
b) f est décroissante sur $[-1\,;1]$.
c) $f(3)>f(2)$.
d) $f(0)\leqslant 5$.
e) Pour tout nombre réel x de $[-3\,;2]$, $f(x)\geqslant 0$.

41 Dans un repère d'origine O, $\mathscr{C}$ est le demi-cercle ci-dessous de centre O et de rayon 4.
A est le point de coordonnées $(0\,;5)$.
Pour tout nombre réel x de $[-4\,;4]$, on pose $f(x)=\text{AM}$ où M est le point d'abscisse x de $\mathscr{C}$.
En observant la figure, donner le tableau de variation de f.



42 Dans un repère d'origine O, $\mathscr{C}$ est le quart de cercle $\overset{\frown}{\text{AB}}$ de centre O et de rayon 2 construit ci-dessous. Un point M décrit $\mathscr{C}$ en allant de A vers B.
On note x la longueur de l'arc $\overset{\frown}{\text{AM}}$ et on pose $f(x)=\text{M}m$, $g(x)=\text{M}m'$.
Dresser intuitivement le tableau de variation de chacune des fonctions f et g.

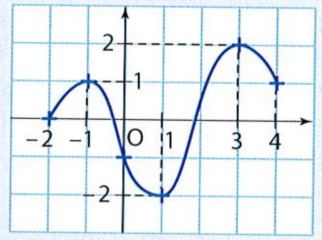


Pour s'entraîner

Maximum, minimum

À l'oral

43 f est la fonction définie sur l'intervalle $[-2\,;4]$ par la courbe dans le repère ci-dessous.



Lire graphiquement le maximum et le minimum de la fonction f sur chacun des intervalles :
a) $[-2\,;4]$ **b)** $[-2\,;0]$ **c)** $[0\,;4]$

44 Le tableau de variation ci-dessous est celui d'une fonction h définie sur l'intervalle $[-4\,;5]$.

x	-4	-2	0	5
$h(x)$	3	↘ -2	↗ 4	↘ 0

Dire pour chaque affirmation si elle est vraie ou fausse.
a) Le maximum de h sur $[-4\,;5]$ est 4.
b) Le minimum de h sur $[0\,;5]$ est -2.
c) Le maximum de h sur $[-4\,;-2]$ est 3.
d) Le minimum de h sur $[-4\,;5]$ est -4.

45 f est une fonction croissante et g une fonction décroissante sur $[-5\,;5]$ telles que :

$$f(-5)=g(-5)=1,\ f(5)=3,\ g(5)=-2.$$

Déterminer le maximum et le minimum de chacune des fonctions f et g sur $[-5\,;5]$.

46 Voici le tableau de variation d'une fonction g définie sur l'intervalle $[0\,;6]$.

x	0	2	3	6
$g(x)$	-1	↗ 1	↘ -3	↗ 2

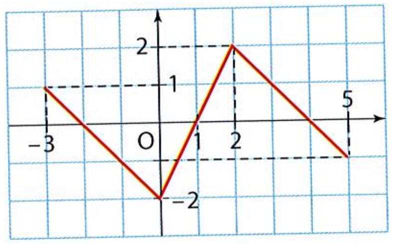
Compléter le plus précisément possible les inégalités :
a) pour tout x de $[0\,;3]$, $\dots\leqslant g(x)\leqslant\dots$;
b) pour tout x de $[2\,;6]$, $\dots\leqslant g(x)\leqslant\dots$;
c) pour tout x de $[0\,;6]$, $\dots\leqslant g(x)\leqslant\dots$.

47 Voici le tableau de variation d'une fonction f définie sur l'intervalle $[-1;3]$.

x	-1		0		1		3
$f(x)$	0	↗	4	↘	-6	↗	1

a) Quel est le maximum de la fonction f sur $[-1;3]$? Pour quelle valeur de x ce maximum est-il atteint ?
b) Quel est le minimum de la fonction f sur $[-1;3]$? Pour quelle valeur de x ce minimum est-il atteint ?
c) Recopier et compléter :
pour tout x de $[-1;3]$, $f(\cdots) \leqslant f(x) \leqslant f(\cdots)$.

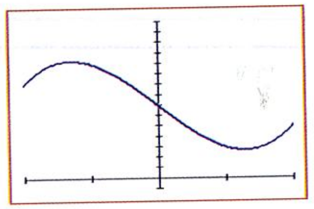
48 La fonction g est définie sur l'intervalle $[-3;5]$ par la courbe ci-dessous.



Donner un encadrement de $g(x)$ le plus précis possible sur chacun des intervalles suivants :
a) $[-3;5]$ **b)** $[-3;1]$ **c)** $[1;5]$ **d)** $[-1;3]$

49 f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$f(x) = x^4 + x^2 + 1$$
a) Démontrer que pour tout nombre réel x, $f(x) \geqslant 1$.
b) Déterminer le minimum de f sur $\mathbb{R}$.
Pour quelle valeur de x est-il atteint ?

50 f est la fonction définie sur $[-2;2]$ par :
$$f(x) = x^3 - 5x + 7$$
Voici la courbe représentative de la fonction f affichée à l'écran de la calculatrice (*fenêtre* : $-2 \leqslant X \leqslant 2$, pas 1 et $-1 \leqslant Y \leqslant 15$, pas 1).



On conjecture que f admet un maximum en x_0 et un minimum en x_1 sur $[-2;2]$.
a) Afficher à l'écran de la calculatrice une table de valeurs de la fonction f (*pas* 0,1).
b) Donner à l'aide de cette table, un encadrement de x_0 et de x_1.

51 f est une fonction définie sur l'intervalle $[-3;6]$ telle que :
- le maximum de f sur $[-3;6]$ est égal à 5, il est atteint pour $x = 0$;
- le minimum de f sur $[-3;6]$ est égal à -2, il est atteint pour $x = 3$;
- les antécédents de 0 par f sont -3 ; 2 et 6 ;
- le maximum de f sur $[-3;-1]$ est égal à 3 et il est atteint pour $x = -2$;
- $f(-1) = 2$ et f est croissante sur $[-1;0]$.

Tracer une courbe susceptible de représenter la fonction f dans ce repère.

52 Algo p. 328 et 332

Voici un algorithme.

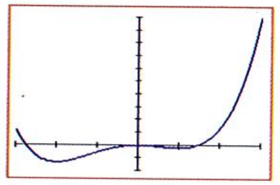
```
Variables :   x, y, m sont des nombres réels
Traitement :  Affecter à x la valeur 0
              Affecter à m la valeur 3
              Tant que x < 2
                 | Affecter à x la valeur x + 0,1
                 | Affecter à y la valeur x² − 2x + 3
                 | Si y ⩽ m alors
                 |    | Affecter à m la valeur y
                 | Fin Si
              Fin Tant que
Sortie :      Afficher m
```

1. On exécute cet algorithme pas à pas et on suit l'évolution du contenu des variables de l'algorithme. Pour cela, reproduire et compléter le tableau suivant :

x	0	0,1	…
$x < 2$	Vrai	Vrai	…
y		2,81	…
$y \leqslant m$		Vrai	…
m	3	2,81	…

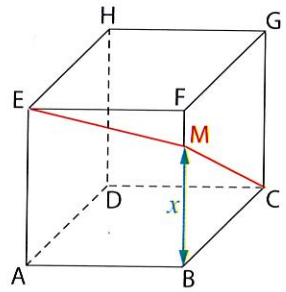
2. a) Que représente chacune des variables de cet algorithme ?
b) Expliquer le rôle de cet algorithme.
3. a) Quelles modifications apporter à l'algorithme pour l'appliquer à la fonction f définie sur $[0;4]$ par :
$$f(x) = x^2 - 3x + 7$$
b) Dans ce cas, quelle est la valeur affichée en sortie ?
4. a) Modifier maintenant l'algorithme afin de l'appliquer à la fonction g définie sur l'intervalle $[0;1]$ par :
$$g(x) = 3x^2 - 2x$$
b) La valeur affichée en sortie est-elle le minimum de la fonction g sur $[0;1]$? Expliquer.

53 f est la fonction définie sur $[-3;3]$ par :
$$f(x) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - x^2$$
Voici la courbe représentative de f obtenue par Aya à l'écran de la calculatrice.



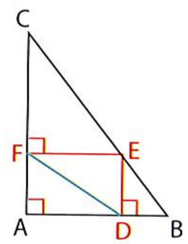
Elle affirme : « Le minimum de f sur $[0;3]$ est 0 et il est atteint en 0 ». Qu'en pensez-vous ?

54 Le cube ci-contre a pour côté 4 cm. M est un point de l'arête $[BF]$ et on note x la longueur BM, en cm.
f est la fonction qui à x associe la somme des longueurs EM + MC.



1. a) Quel est l'ensemble des valeurs possibles de la variable x ?
b) Justifier que $EM = \sqrt{16 + (4-x)^2}$ et $MC = \sqrt{16 + x^2}$.
En déduire l'expression de $f(x)$ en fonction de x.
2. Avec la calculatrice, estimer le minimum de f, puis par un raisonnement géométrique, à l'aide d'un patron du cube, trouver sa valeur exacte.

55 Tice ABC est un triangle rectangle en A tel que :
AB = 3 cm et AC = 4 cm.
F est un point variable de $[AC]$, D et E sont les points respectifs de $[AB]$ et $[BC]$ tels que ADEF soit un rectangle.



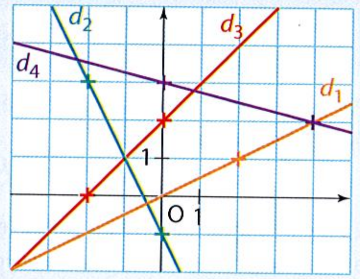
1. Réaliser la figure avec un logiciel de géométrie et conjecturer la position de F pour laquelle l'aire, en cm², du rectangle ADEF est maximale.
2. On note x la longueur FC, en cm.
a) Montrer que $EF = 0{,}75x$ puis que l'aire de ADEF est $0{,}75x(4-x)$.
b) Afficher à l'écran de la calculatrice la courbe représentative de la fonction $f : x \mapsto 0{,}75x(4-x)$.
Confirmer la conjecture émise à la question **1.**
c) Vérifier que pour tout x de l'intervalle $[0;4]$:
$$f(x) = 3 - 0{,}75(x-2)^2$$
Prouver alors la conjecture précédente.

Fonctions affines et sens de variation

À l'oral

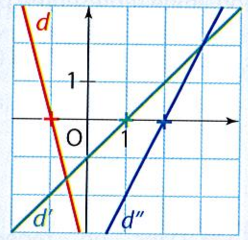
56 f est la fonction affine $x \mapsto 1{,}5 - 4x$.
Calculer mentalement :
a) $f(5,3) - f(4,3)$ **b)** $f(8) - f(10)$
c) $f(0,75) - f(-1)$ **d)** $f(6\sqrt{3}) - f(3\sqrt{3})$

57 Associer chacune des droites ci-dessous à celle des fonctions affines suivantes qu'elle représente :
- $f : x \mapsto -\frac{1}{4}x + 3$
- $g : x \mapsto x + 2$
- $h : x \mapsto 0{,}5x$
- $k : x \mapsto -2x - 1$

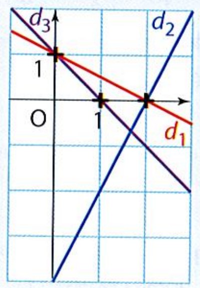


58 Dans chaque cas, indiquer le sens de variation de la fonction affine.
a) $x \mapsto 2x - 3$ **b)** $x \mapsto -6x - 4$ **c)** $x \mapsto \frac{x-1}{2}$

59 Dans le repère ci-contre, les droites d, d', d'' représentent respectivement les fonctions affines f, g, h.
Décrire le sens de variation de f, g et h.



60 Associer chaque droite d_1, d_2, d_3 du graphique de gauche au tableau de variation de la fonction affine f, g, h qu'elle représente.



x	$-\infty$	1	$+\infty$
$h(x)$	↘	0	↘

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$g(x)$	↗	0	↗

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f(x)$	↘	0	↘

61 Dresser le tableau de variation de la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$f(x) = (3-\pi)x + 1 - \sqrt{2}$$

Pour s'entraîner

62 Parmi les expressions suivantes, lesquelles définissent une fonction affine ? Justifier.

a) $f(x)=-4x$ **b)** $g(x)=\frac{x-2}{4}$ **c)** $h(x)=\sqrt{2}\,x-1$
d) $i(x)=\frac{x-3}{x}$ **e)** $j(x)=2$ **f)** $k(x)=\frac{1}{x}$

63 **Algo p. 326**

1. Voici un algorithme qui affiche le prix d'un article après la réduction de 12 %.

> *Variables :* x, p sont des nombres réels
> *Entrée :* Saisir x
> *Traitement :* Affecter à p la valeur $\boxed{}$
> *Sortie :* Afficher p

Parmi les expressions suivantes, lesquelles peut-on écrire dans le cadre rouge ?

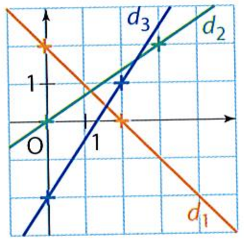
- $x-\frac{12}{100}$ • $x-\frac{12}{100}\times x$ • $0{,}88x$ • $\frac{12}{100}\times x$

2. R est la fonction qui au prix x (en €) d'un article associe le prix (en €) après réduction.

a) Exprimer $R(x)$ en fonction de x.

b) Quelle est la nature de la fonction R ?

64 Déterminer la fonction affine représentée par chacune des droites ci-contre.



65 Dans un repère, une fonction affine $f: x\mapsto ax+b$ est représentée par la droite (AB) avec A(–1 ; 6) et B(2 ; –6).

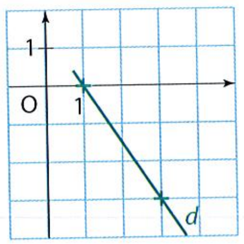
a) Expliquer pourquoi $f(2)-f(-1)=3a$.
En déduire la valeur de a.

b) Déterminer une expression algébrique de $f(x)$.

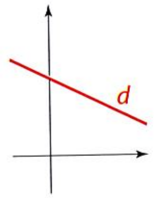
c) Le point $C\left(\frac{1}{3};\frac{2}{3}\right)$ est-il aligné avec A et B ?

66 Déterminer la fonction affine m telle que $m(0)=4$ et $m(-2)=10$.

67 Déterminer l'ordonnée à l'origine de la droite d ci-contre.



68 **Vrai ou faux ?**
Une droite d représentant une fonction affine f dans un repère est donnée ci-contre. Bérénice affirme : « $50>10$ donc $f(50)>f(10)$ ».
Cette affirmation est-elle vraie ou fausse ? Expliquer.



69 f est une fonction affine décroissante sur $\mathbb{R}$ telle que $f(8)=0$.
Déterminer tous les nombres réels qui ont une image positive par la fonction f.

70 f est la fonction définie sur $[-2;5]$ par :

$$\begin{cases} f(x)=2x+1 & \text{si} \quad -2\leqslant x\leqslant 1 \\ f(x)=-x+4 & \text{si} \quad 1\leqslant x\leqslant 5 \end{cases}$$

a) Dans un repère, tracer la courbe représentative de la fonction f.

b) Dresser le tableau de variation de la fonction f.

S'entraîner à la logique

71 **Quantificateurs** ▶ p. 340

f est une fonction définie sur l'intervalle $[-2;3]$ dont voici le tableau de variation.

x	-2		1		3
$f(x)$	-1	↗	2	↘	0

Dans chaque cas, dire si la proposition est vraie ou fausse. Justifier la réponse.

a) Pour tout nombre réel x de $[-2;3]$, $f(x)\geqslant 0$.

b) Pour tout nombre réel x de $[-2;3]$, $f(x)\leqslant 3$.

c) Il existe un nombre réel x de $[-2;3]$ tel que $f(x)<0$.

d) Il existe un nombre réel x de $[-2;3]$ tel que $f(x)=-2$.

72 **Implication** ▶ p. 339

f est une fonction définie sur $\mathbb{R}$.
Pour chaque implication, dire si elle est vraie ou fausse. Justifier la réponse.

a) Si f est croissante sur $[0;2]$, alors f est croissante sur $[0;1]$.

b) Si $f(0)<f(1)$, alors f est croissante sur $[0;1]$.

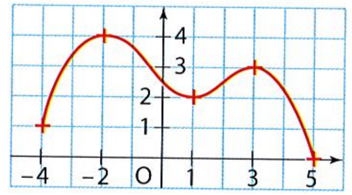
c) Si f a un maximum en 1 sur $[0;1]$, alors f est croissante sur $[0;1]$.

d) Si f n'est pas croissante sur $[0;1]$, alors f est décroissante sur $[0;1]$.

Pour se tester

73 Dans chaque cas, donner **la** réponse exacte **sans justifier.**

f est la fonction définie sur l'intervalle $[-4;5]$ par la courbe tracée dans le repère ci-contre.



		A	B	C	D
1	f est croissante sur l'intervalle …	$[-4:-0{,}9]$	$[0;3]$	$[2;3]$	$[1;4]$
2	f est décroissante sur l'intervalle …	$[-3;1]$	$[1{,}8;4]$	$[-2;2]$	$[-1;0]$
3	f a pour maximum …	4 sur $[1;5]$	3 sur $[2;5]$	5 sur $[-4;5]$	3 sur $[-4;3]$
4	f a pour minimum …	2 sur $[0;5]$	1 sur $[-4;5]$	0 sur $[-1;5]$	2 sur $[-4;3]$
5	Pour tout nombre réel x de $[-4;5]$, …	$f(x)>0$	$f(x)\leqslant 6$	$f(x)\geqslant 1$	$f(x)<3$

74 Dans chaque cas, donner **la** ou **les** réponses exactes **sans justifier.**

Voici le tableau de variation d'une fonction f définie sur l'intervalle $[-8;6]$.

x	-8		-5		2		6
$f(x)$	0	↗	2	↘	-4	↗	4

		A	B	C	D
1	Pour tout nombre réel x de $[-5;3]$, …	$f(x)\geqslant -4$	$f(x)\leqslant 0$	$f(x)\geqslant -5$	$f(x)\leqslant 4$
2	Pour tout nombre réel x de $[-8;2]$, …	$f(x)\geqslant 0$	$f(x)\leqslant 3$	$f(x)\geqslant -4$	$f(x)<2$
3	Le nombre $f(0)$ est tel que …	$f(0)<f(1)$	$f(0)\leqslant 2$	$f(-5)\geqslant f(0)$	$f(0)\geqslant -5$
4	Le nombre $f(4)$ est tel que …	$f(4)\leqslant f(5)$	$f(4)>4$	$f(3)>f(4)$	$f(4)<5$
5	Un nombre supérieur ou égal à 3 est par exemple …	$f(-7)$	$f(-1)$	$f(0)$	$f(6)$

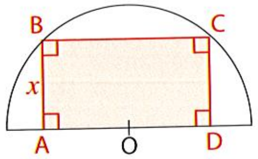
75 Dans chaque cas, donner **la** ou **les** réponses exactes **en justifiant.**

		A	B	C	D
1	f est la fonction affine $x\mapsto -2x+4$. Alors …	$f(5)-f(1)=-8$	$f\left(\frac{1}{2}\right)-f\left(\frac{1}{4}\right)$ est négatif	$f(1+\sqrt{5})-f(\sqrt{5})$ est égal à -2	$f(10)-f(5)=10$
2	Dans un repère, les points E(3 ; 3) et F(0 ; 2) sont alignés avec le point …	A(2 ; 2)	$B\left(-\frac{1}{5};3\right)$	$C\left(\frac{1}{2};\frac{13}{6}\right)$	$D(\sqrt{3};2{,}5)$
3	f est une fonction affine croissante sur $\mathbb{R}$. Alors $f(x)$ peut être égal à …	$-2x+5$	$\frac{1}{2}x-7$	$x-7$	$-3x+9$
4	f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} f(x)=-x & \text{si } x\leqslant 0 \\ f(x)=x & \text{si } x\geqslant 0 \end{cases}$ Alors …	f est croissante sur $\mathbb{R}$	f est croissante sur $[0;+\infty[$	f est décroissante sur $]-\infty;0]$	f est décroissante sur $\mathbb{R}$

Vérifiez vos réponses : p. 341

76 **Avec un guide**

ABCD est un rectangle inscrit dans un demi-cercle de centre O et de rayon 6 cm comme indiqué sur la figure ci-contre.



Ses côtés ont des longueurs variables ; on note x la longueur AB en cm.

1. a) Dans quel intervalle varie x ?

b) Justifier que $OA^2 + x^2 = 36$.

c) En déduire OA, puis AD en fonction de x.

d) Exprimer l'aire S(x), en cm², du rectangle ABCD en fonction de x.

2. À l'aide de la calculatrice, déterminer une valeur approchée du maximum de la fonction S et de la valeur x_0 pour laquelle il est atteint.

Conseil

Afficher à l'écran la courbe représentative de S (*fenêtre* : $0 \leqslant X \leqslant 6$, pas 1 et $-1 \leqslant Y \leqslant 40$, pas 10) et une table de valeurs (*pas* 0,1).

77 **Utiliser la géométrie**

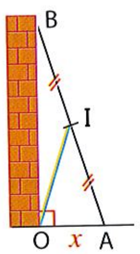
Une échelle de longueur 5 m est représentée ci-contre par le segment [AB].

I est le milieu de ce segment.

On note x la longueur OA en mètres.

a) À quel intervalle x appartient-il ?

b) Étudier les variations de la fonction $x \mapsto$ OI.



78 **Critiquer**

Voici deux tableaux de variation réalisés par des élèves. Pourquoi ne sont-ils pas corrects ?

a)

x	0		1		2		5
$f(x)$	$\sqrt{2}-\sqrt{3}$	↘	1	↗	$\frac{4}{5}$	↗	2

b)

x	-3		$\frac{7}{2}$		2		10
$g(x)$	3	↗	$1+\sqrt{2}$	↘	1	↗	10^{-1}

79 **Tirer des conséquences**

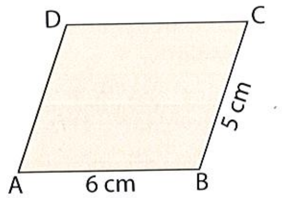
f est une fonction croissante sur $\mathbb{R}$, g est une fonction décroissante sur $\mathbb{R}$ et $f(1) = g(1)$.

Comparer $f(x)$ et $g(x)$ selon les valeurs de x. Justifier.

80 Narration de recherche **Chercher un maximum**

Rédiger les différentes étapes de la recherche, sans omettre les fausses pistes et les changements de méthode.

Problème



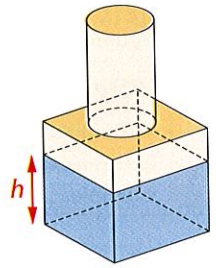
Parmi tous les parallélogrammes dont les côtés mesurent 5 cm et 6 cm respectivement, peut-on en trouver d'aire maximale ?

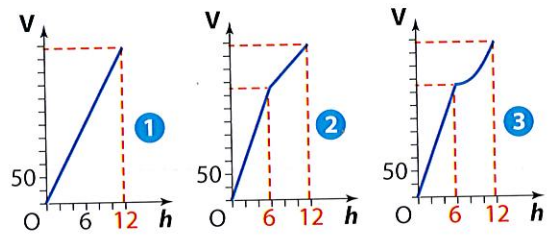
81 Travailler en groupe **Analyser un graphique**

Un récipient est formé d'un cube d'arête 6 cm, et d'un cylindre de hauteur 6 cm et de rayon 2 cm.

On note h la hauteur en cm du liquide dans ce récipient et V le volume d'eau en cm³.

Voici trois graphiques.





a) Chaque groupe fait le travail suivant.

- Parmi ces graphiques l'un d'eux représente-t-il cette situation ? Si oui, justifier la réponse.
- Si non, proposer un graphique qui convient.
- Pour les autres graphiques, proposer un récipient de forme adaptée dont le volume est ainsi représenté en fonction de la hauteur.

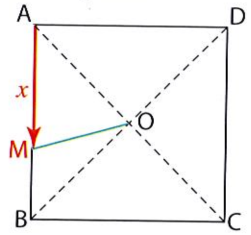
b) Un rapporteur de chaque groupe expose les arguments et propositions du groupe.

82 **Study the variations of a function**

Let ABCD be a square with side 4 and center O.

The point M moves along the perimeter of the square in alphabetical order starting from A.

Let x be the distance traveled by M from A and f the function giving the straight line distance OM, depending on x. Do not try to find a general formula for $f(x)$.



1. a) Explain why f is defined on $[0\,;1]$.

b) Compute $f(x)$ when x is equal to 0; 2; 4; 6; 8.

2. a) Describe the variations of f.

b) Give the extrema of function f on $[0\,;16]$.

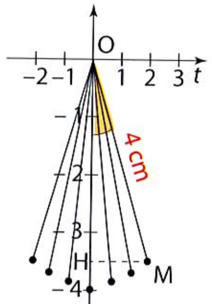
For what values of x is it reached?

83 **Étudier un signal périodique**

Un pendule est modélisé dans un repère orthonormé d'origine O et d'unité 1 cm, par un segment [OM] de longueur 4 cm.

À l'instant $t = 0$ s, l'angle d'écartement avec l'axe des ordonnées est maximal et il mesure 30°.

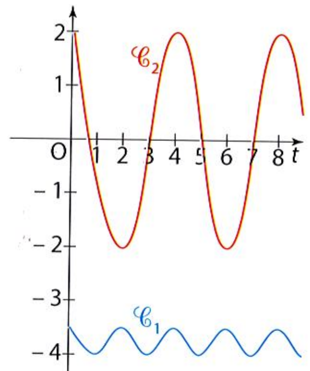
À l'instant $t = 1$ s, le pendule est pour la 1re fois dans une position verticale.



a) Indiquer la période de ce mouvement.

b) Déterminer les coordonnées de M à $t = 0$.

c) À tout instant t, on note $(x_M(t)\,;y_M(t))$ les coordonnées de M. Reconnaître ci-contre la courbe de $t \mapsto x_M(t)$ et de $t \mapsto y_M(t)$



d) Dresser le tableau de variation de chacune des fonctions x_M et y_M sur l'intervalle $[0\,;4]$.

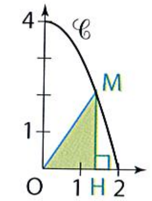
e) L'amplitude d'un signal périodique est la différence entre son maximum et son minimum.

Déduire de ce qui précède l'amplitude exacte de chacun des signaux représentés par les courbes $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$.

84 **Imaginer une stratégie**

Un logo publicitaire doit avoir la forme ci-contre. Dans ce repère, M est un point de la courbe $\mathscr{C}$ représentant la fonction f définie sur $[0\,;2]$ par $f(x) = 4 - x^2$.

Aider le dessinateur à positionner M de façon que l'aire du triangle rectangle OMH soit maximale.



85 Problème ouvert **Étudier des variations**

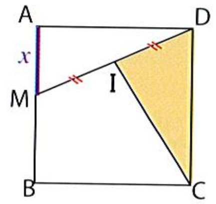
ABCD est un carré de côté 5 cm.

M est un point de [AB], on pose x = AM (en cm).

I est le milieu du segment [DM].

f est la fonction qui à x associe l'aire, en cm², du triangle DCI.

Étudier les variations de la fonction f.



86 Problème ouvert **Vrai ou faux ?**

Younès affirme : « Si une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ est croissante sur $]-\infty\,;0]$ et croissante sur $]0\,;+\infty[$, alors elle est croissante sur $\mathbb{R}$ ».

Cette affirmation est-elle vraie ou fausse ? Justifier.

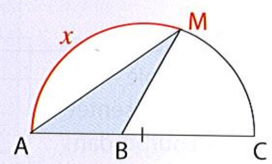
Des défis

87 **Se promener sur un demi-cercle**

[AC] est un segment de longueur 10 cm.

B est le point de [AC] tel que AB = 4 cm.

M appartient au demi-cercle ci-contre de diamètre [AC] et on note x la longueur, en cm, de l'arc $\overset{\frown}{AM}$.



Dresser le tableau de variation de la fonction f qui à x associe l'aire, en cm², du triangle ABM.

88 **Étudier une fonction affine**

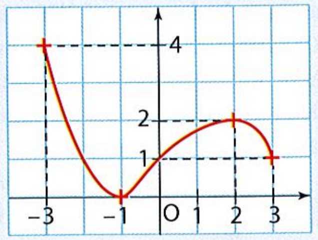
f est une fonction affine telle que pour tout nombre réel x,
$$f(f(x)) = 4x - 3$$
Peut-on donner le sens de variation de f sur $\mathbb{R}$?

Accompagnement personnalisé

Soutien — Décrire le sens de variation d'une fonction

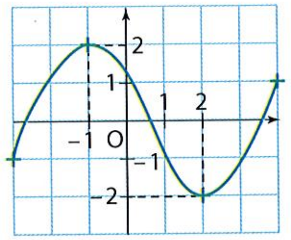
89 Exercice test

f est la fonction définie sur $[-3\,;3]$ par la courbe tracée dans le repère ci-contre. Dresser le tableau de variation de f.



Appeler le professeur pour qu'il contrôle vos réponses et qu'il vous indique la suite.

90 f est la fonction définie sur l'intervalle $[-3\,;4]$ par la courbe tracée dans le repère ci-contre.



Recopier et compléter.

a) f est croissante sur $[-3\,;\cdots]$.

b) f est décroissante sur $[-1\,;\cdots]$.

c) f est croissante sur $[\cdots\,;4]$.

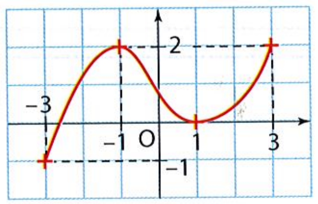
d) f est décroissante sur $[\cdots\,;1]$.

91 f est une fonction définie sur l'intervalle $[-3\,;5]$ telle que :

- f est décroissante sur $[-1\,;2]$;
- f est croissante sur $[-3\,;-1]$ et sur $[2\,;5]$;
- $f(-3)=-2$; $f(2)=1$; $f(-1)=4$; $f(5)=5$.

Dresser le tableau de variation de f.

92 f est la fonction définie sur $[-3\,;3]$ représentée par la courbe dans le repère ci-contre. Corriger les erreurs contenues dans ce tableau de variation.



x	-3	-1	2	3
$f(x)$	-1	↗ 2	↘ 0	↗ 3

Soutien — Tracer une courbe compatible avec un tableau de variation

93 Exercice test

Voici le tableau de variation d'une fonction f définie sur l'intervalle $[-3\,;5]$.

x	-3	2	3	4	5
$f(x)$	-2	↗ 1	↘ 0	↘ -1	↗ 2

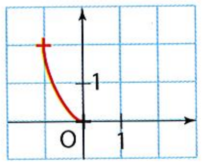
Tracer une courbe susceptible de représenter graphiquement la fonction f.

Appeler le professeur pour qu'il contrôle vos réponses et qu'il vous indique la suite.

94 Maxime a commencé à tracer une courbe représentative de la fonction f compatible avec son tableau de variation.

Recopier et terminer son graphique.

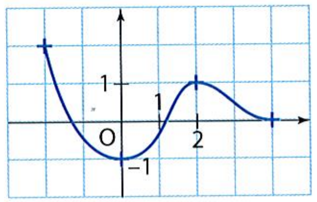
x	-1	0	1	3
$f(x)$	2	↘ 0	↗ $1{,}5$	↘ -1



95 Voici le tableau de variation d'une fonction f définie sur l'intervalle $[-2\,;3]$.

x	-2	-1	2	3
$f(x)$	2	↘ 0	↗ 1	↘ 0

Naomi a tracé la courbe ci-contre pour représenter f. Qu'en pensez-vous ?



96 f est une fonction définie sur l'intervalle $[-3\,;4]$ telle que :

- f est décroissante sur $[-3\,;2]$;
- f est croissante sur $[2\,;4]$;
- $f(-3)=2$, $f(2)=-2$, $f(0)=f(3)=0$.

Tracer une courbe susceptible de représenter graphiquement la fonction f dans un repère.

Soutien — Comparer les images de deux nombres par une fonction

97 Exercice test

Voici le tableau de variation d'une fonction f définie sur l'intervalle $[-2\,;4]$.

x	-2	1	4
$f(x)$	3	↘ 0	↗ 1

Comparer les deux nombres en justifiant.

a) $f(2)$ et $f(3)$; **b)** $f(-1)$ et $f(0)$;

c) $f(x)$ et $f(1)$ pour tout x de $[-2\,;4]$.

Appeler le professeur pour qu'il contrôle vos réponses et qu'il vous indique la suite.

98 Voici le tableau de variation d'une fonction g définie sur l'intervalle $[-3\,;3]$.

x	-3	0	1	3
$g(x)$	2	↗ 4	↘ 0	↗ 2

Dans chaque cas, comparer les deux nombres lorsque cela est possible.

a) $g(2)$ et $g(3)$; **b)** $g(0{,}3)$ et $g(0{,}5)$;

c) $g(-1)$ et $g(0{,}2)$; **d)** $g(-2)$ et $g(1)$;

e) $g(0{,}9)$ et $g(1{,}5)$; **f)** $g(-2)$ et $g(2)$.

99 Voici le tableau de variation d'une fonction h définie sur l'intervalle $[-1\,;5]$.

x	-1	0	1	3	5
$h(x)$	2	↘ 0	↘ -1	↗ 0	↗ 4

Quels sont les nombres réels dont l'image par f est positive ou nulle ?

100 f est une fonction définie sur l'intervalle $[-2\,;3]$ telle que :

- $f(0)\leqslant f(-1)$;
- $f(3)<f(2)$;
- pour tout nombre réel x de $[-2\,;3]$, $f(x)\geqslant f(1)$.

a) Dresser un tableau de variation de la fonction f compatible avec ces propriétés.

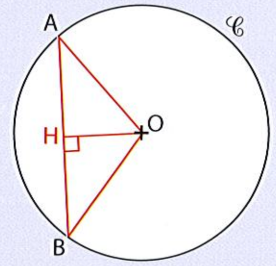
b) Tracer une courbe susceptible de représenter la fonction f dans un repère.

Approfondissement — Résoudre des problèmes d'optimisation

101 A et B sont deux points variables d'un cercle $\mathscr{C}$ de centre O et de rayon 1.

H est le pied de la hauteur issue de O du triangle OAB.

On pose $x=\text{AB}$.



1. Quel est l'intervalle décrit par x ?

2. f est la fonction définie par $f(x)=\text{OH}$.

a) Sans déterminer $f(x)$, dresser le tableau de variation de la fonction f.

b) Déterminer les valeurs de x pour lesquelles $f(x)\geqslant 0{,}5$.

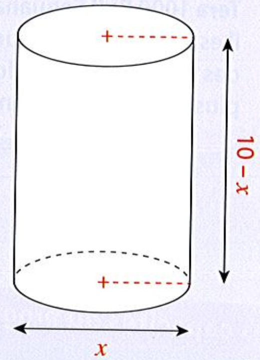
3. g est la fonction qui à x associe l'aire du triangle OAB.

a) Démontrer que $g(x)=\dfrac{x}{4}\sqrt{4-x^2}$.

b) Avec la calculatrice, déterminer des valeurs approchées du maximum de g et de la valeur de x pour laquelle il est atteint.

102 Un cylindre est dit équilibré si la somme de son diamètre et de sa hauteur est égale à 10.

On note x le diamètre d'un cylindre équilibré.



a) Quel est l'intervalle décrit par x ?

b) Justifier que le volume d'un cylindre équilibré est donné par $V(x)=\pi\left(\dfrac{x}{2}\right)^2(10-x)$.

c) Avec la calculatrice, donner une valeur approchée au dixième près du diamètre pour lequel le volume du cylindre est maximal.