1 Résolution graphique d'équations et d'inéquations

En mécanique, on étudie les trajectoires. On peut observer ici la trajectoire d'un snowboardeur. On utilise des fonctions d'une ou plusieurs variables pour décrire ces courbes.

Au fil des siècles

Concepteur de systèmes hydrauliques et de cadrans solaires, le mathématicien français Antoine Deparcieux (1703-1768) a aussi décrit de nombreuses fonctions par des tableaux de valeurs.

● *Rechercher sur Internet quelles fameuses tables ont fait sa réputation et quelles applications elles ont permises.*

Les capacités du programme

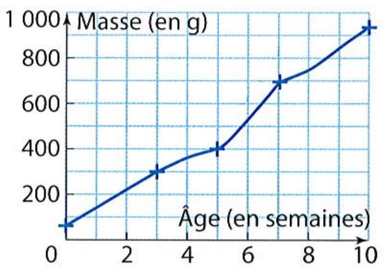
	Choix d'exercices	
• Traduire le lien entre deux quantités par une formule.	27	40
• Pour une fonction définie par une courbe, un tableau ou une formule : – identifier la variable et l'ensemble de définition ;	21 22	44
– déterminer l'image d'un nombre et rechercher des antécédents d'un nombre.	2 30	71
• Résoudre graphiquement des équations de la forme $f(x)=k$, $f(x)=g(x)$.	5	61
• Résoudre graphiquement des inéquations de la forme $f(x)>k$, $f(x)>g(x)$.	54	69

Bien démarrer

Travailler en autonomie

1 Effectuer des lectures graphiques

Laura pèse souvent son chaton ; elle a construit le graphique ci-contre.



a) Recopier et compléter la phrase suivante :
« Le graphique représente l'évolution de la masse du chat de Laura en fonction de … ».

b) Lire la masse de ce chaton à l'âge de trois semaines.

c) Lire l'âge de ce chaton lorsqu'il pesait :
• 400 g ; • 700 g.

2 Comprendre le vocabulaire des fonctions

f est la fonction qui à chaque nombre associe le triple de ce nombre.

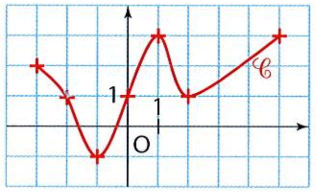
a) Donner l'image de – 5 par cette fonction.

b) Donner l'antécédent de 48 par cette fonction.

c) Recopier et compléter :
• $f(0)=\cdots$ • $f\left(\frac{7}{3}\right)=\cdots$ • $f(\cdots)=-\frac{10}{3}$

3 Utiliser une fonction définie par un graphique

f est la fonction définie par la courbe $\mathscr{C}$ dans le repère ci-contre.



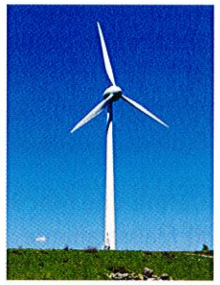
a) Expliquer pourquoi $f(1)=3$.

b) Traduire l'égalité précédente par une phrase comportant le mot « image ».

c) Lire graphiquement :
• l'image de 5 par f ; • les antécédents de 1 par f.

4 Utiliser une fonction définie par un tableau

Le tableau suivant définit une fonction E qui à chaque vitesse indiquée v (en m/s) du vent associe l'énergie $E(v)$ (en kWh) produite par une petite éolienne en un an.



v (en m/s)	3	4	5	6	7	8	9	10	12	14
$E(v)$ (en kWh)	130	310	570	780	900	890	780	580	240	50

a) Déterminer : • l'image de 7 ; • les antécédents de 780.

b) L'énergie produite est-elle proportionnelle à la vitesse du vent ?

5 Utiliser une fonction définie par une formule

g est la fonction définie par $g(x)=x(2x-3)$.

a) Calculer l'image par la fonction g de : • $x=-5$ • $x=0{,}1$

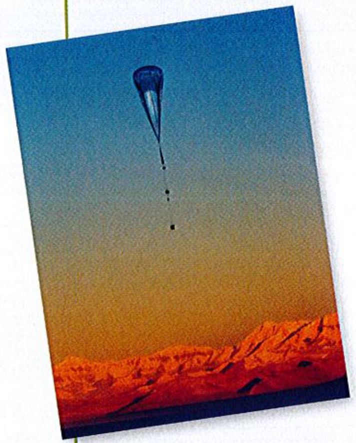
b) Thomas affirme : « L'antécédent de 0 par la fonction g est $\frac{3}{2}$ ».
Qu'en pensez-vous ?

Aide et corrigés sur le site **hyperbole.nathan.fr/2de-2017**

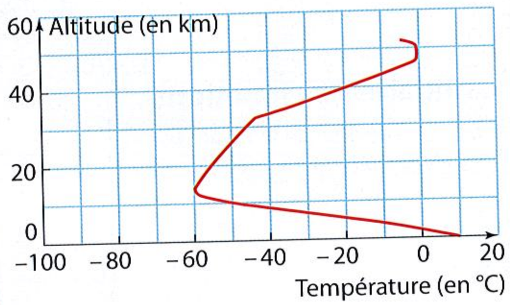
1 Une fonction définie par une courbe

Un ballon-sonde lâché depuis la Terre monte en haute altitude. Durant l'ascension :

- un capteur de température extérieure couplé à un GPS permet de tracer en continu le graphique ① ;
- des relevés réguliers sont transmis au sol par ondes radio. Certains sont consignés dans le tableau ②.



①



②

Altitude (en km)	Température (en °C)
0	
5	
10	− 48
13	− 60
	− 50
34	− 39
	− 20
45	
52	− 5

Problème

Déterminer une fonction qui lie la température et l'altitude du ballon-sonde.

1 Exploiter le graphique ①

a) Déterminer entre quelles valeurs sont comprises toutes les températures mesurées.

b) Estimer jusqu'à quelle altitude le ballon-sonde parvient à fournir des mesures.

c) Recopier le tableau ② et compléter les valeurs manquantes à l'aide de lectures graphiques.

d) Si la température extérieure est inférieure ou égale à −40 °C, un petit système de chauffage se déclenche dans la nacelle.
Estimer à quelle altitude se déclenche ce système, puis à quelle altitude il s'éteint.

2 Définir une fonction

a) Maïssa affirme : « À chaque altitude comprise entre 0 et 52 km correspond une unique température extérieure ».
Simon affirme : « À chaque température extérieure comprise entre −60 et 10 °C correspond une unique altitude ».
Que penser de ces deux affirmations ? Justifier la réponse.

b) On note T la fonction qui à chaque altitude comprise entre 0 et 52 km associe la température extérieure mesurée en °C. À partir du graphique donné, tracer la courbe représentative de la fonction T.

3 Pour aller plus loin

a) Avec le tableur, ouvrir une feuille de calcul et saisir le tableau ② tel qu'il a été complété à la question 1 c).

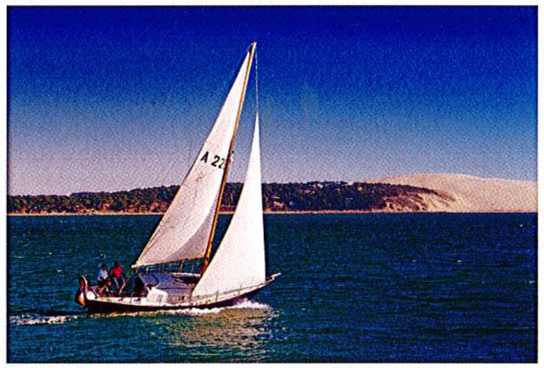
b) Avec l'assistant graphique, représenter ce tableau par un nuage de points reliés par une courbe.

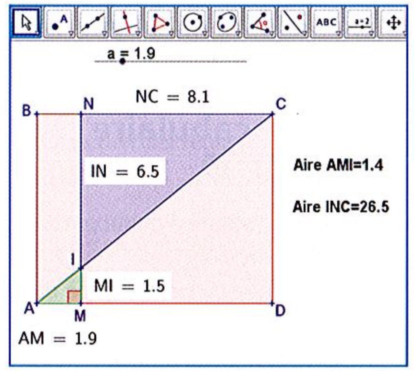
c) Comparer ce graphique avec la courbe représentative de la fonction T. Commenter.

2 Modélisation avec des fonctions

Une entreprise découpe des voiles dans des rectangles de tissus de 8 m sur 10 m de côtés pour des petits bateaux de plaisance.
Sur la figure ci-dessous, les voiles découpées sont représentées par les triangles AMI et INC.
L'entreprise vient de recevoir deux commandes :

- l'une pour un mât de 3,2 m de haut ;
- l'autre pour une voile de 12,10 m².





Problème

Déterminer les dimensions des voiles commandées.

1 Conjecturer avec un logiciel de géométrie dynamique

a) Créer un rectangle ABCD tel que $AB = 8$ et $AD = 10$, puis créer le segment [AC].

b) Créer un curseur a allant de 0 à 10 avec un incrément de 0,1 (utiliser Curseur).

c) Créer le point M du segment [AD] tel que $AM = a$ (utiliser Cercle (centre-rayon)).

d) Créer la perpendiculaire à (AD) passant par M ; noter I et N les points d'intersection respectifs avec [AC] et [BC].

e) Créer les triangles AMI et INC. Afficher les longueurs des côtés de l'angle droit de chacun de ces triangles (utiliser Distance ou Longueur) et afficher les aires de ces triangles (utiliser Aire).

f) Déplacer le point M et conjecturer sa position pour que $MI = 3,2$, puis pour que l'aire de AMI soit 12,1.

2 Satisfaire la première commande

a) On note a la longueur AM en mètres. Appliquer le théorème de Thalès dans les triangles AMI et ADC pour établir que la longueur IM est donnée par la formule $f(a) = 0,8a$.

b) Déterminer la ou les valeurs de a pour que le triangle AMI ait un côté de l'angle droit de longueur 3,2 m.

c) Dans chaque cas, préciser les dimensions de la seconde voile représentée par le triangle INC.

3 Satisfaire la deuxième commande

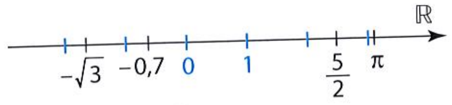
a) Démontrer que l'aire, en m², du triangle AMI est donnée par la formule $g(a) = 0,4a^2$.

b) En déduire la valeur de a pour laquelle l'aire du triangle AMI est 12,10 m².

c) Déterminer alors l'aire de la seconde voile représentée par le triangle INC.

1 Définir une fonction

a. Ensemble ℝ des nombres réels



L'ensemble des abscisses des points d'une droite graduée est appelé l'ensemble des **nombres réels** ; il est noté ℝ.
Cet ensemble est constitué des nombres rationnels (ils s'écrivent $\frac{a}{b}$ avec a et b nombres relatifs, $b \neq 0$) et des nombres irrationnels.

- $1 ; \frac{5}{2} ; -0,7 = -\frac{7}{10}$ sont des nombres rationnels.
- $-\sqrt{3}$; π sont des nombres irrationnels.

b. Vocabulaire des fonctions

DÉFINITION

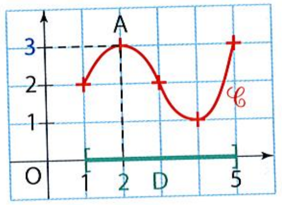
À tout nombre x d'une partie D de ℝ, une fonction f associe **un nombre et un seul** que l'on note $f(x)$ (lire « f de x »).
On dit que $f(x)$ est **l'image** de x par la fonction f et que D, est **l'ensemble de définition** de f.

Notion d'antécédent

- Lorsque a et b sont des nombres réels tels que $f(a) = b$, on dit que a est **un antécédent** de b par f.

EXEMPLE 1 : fonction définie par une courbe

La courbe $\mathscr{C}$, dans le repère ci-contre, définit une fonction f sur l'ensemble des nombres compris entre 1 et 5, que l'on appelle **un intervalle** et que l'on note $D = [1 ; 5]$.
L'image de 2 par f est 3 car le point A(2 ; 3) appartient à $\mathscr{C}$. On note $f(2) = 3$.



EXEMPLE 2 : fonction définie par un tableau

Au décathlon, l'une des épreuves est le saut en longueur.
Le tableau ci-contre définit une fonction g qui à une longueur (en mètres) associe un score. Son ensemble de définition est un ensemble fini que l'on note {7,96 ; 7,97 ; 7,98 ; 7,99}.
L'image de 7,97 par g est 1 053. On note $g(7,97) = 1053$.

Longueur en m	Score
7,99	1 058
7,98	1 055
7,97	1 053
7,96	1 050

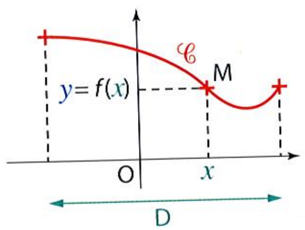
EXEMPLE 3 : fonction définie par une formule

h est la fonction qui, à chaque nombre réel x, associe le nombre $h(x) = x^2 - 3$. Elle est définie sur ℝ.
Pour calculer l'image de − 5, on remplace x par − 5 dans l'expression : $h(-5) = (-5)^2 - 3 = 22$.

c. Courbe représentative

DÉFINITION

Dans un repère, la courbe représentative $\mathscr{C}$ (ou représentation graphique) d'une fonction f est l'ensemble des points de coordonnées $(x ; f(x))$, où x appartient à son ensemble de définition D.



Ainsi :
- **si** M$(x ; y)$ appartient à $\mathscr{C}$, **alors** $x \in D$ et $y = f(x)$;
- réciproquement, **si** $x \in D$ et $y = f(x)$, **alors** M$(x ; y)$ appartient à $\mathscr{C}$.

Exercice résolu — Utiliser une calculatrice graphique

1 Énoncé

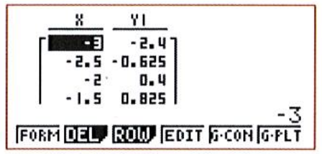
f est la fonction définie sur l'intervalle $[-3 ; 4]$ par $f(x) = 0,2x^3 - x$.
a) Avec la calculatrice, tabuler la fonction f avec le pas 0,5, puis tracer la courbe représentative de f.
b) Le point A(2,2 ; 0) appartient-il à la courbe représentative de f dans un repère ?

Solution

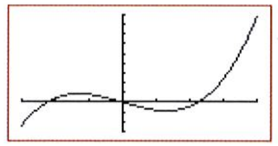
a)

CASIO

① Dans MENU 5 (TABL), saisir l'expression de la fonction, puis F5 (SET) et renseigner comme indiqué ci-dessous à gauche.
EXIT F6 (TABL) et on obtient la table ci-dessous à droite.

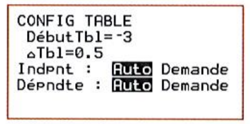


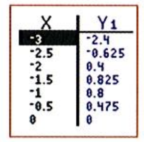
② Dans MENU 3 (GRAPH) SHIFT F3 (V-Window) et régler la fenêtre comme ci-dessous à gauche.
EXIT F6 (DRAW) et on obtient la courbe ci-dessous à droite.



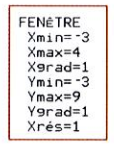
TI

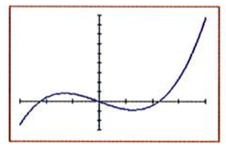
① Dans f(x) saisir l'expression de la fonction.
Dans 2nde fenêtre (déf table), effectuer les réglages indiqués ci-dessous à gauche.
Dans 2nde graphe (table) on obtient la table ci-dessous à droite.





② Dans fenêtre, régler la fenêtre comme ci-dessous à gauche.
Dans graphe, on obtient la courbe ci-dessous à droite.



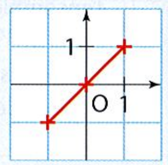


b) $f(2,2) = 0,2 \times 2,2^3 - 2,2 = -0,0704$
Or $-0,0704 \neq 0$ donc le point A n'appartient pas à la courbe représentative de f.

À votre tour

2 g est la fonction définie sur l'intervalle $[-2 ; 5]$ par $g(x) = x^2 - 4x$.
a) Avec la calculatrice, tabuler la fonction g avec le pas 0,2, puis tracer la courbe représentative de g.
b) Dans chaque cas, dire si le point appartient à la courbe représentative de g dans un repère.
- A(2,1 ; −4)
- B(1,6 ; −3,84)
- C(10 ; 60)
- D(−50,5 ; 2 752,25)

3 h est la fonction définie sur l'intervalle $[-1 ; 1]$ par $h(x) = x^3$.
a) Avec la calculatrice, tabuler la fonction h avec le pas 0,5.
b) Anaïs a tenté de tracer ci-contre la courbe représentative de h.
Comment la convaincre qu'elle se trompe ?



2 Intervalles et résolutions graphiques

a. Les intervalles

Ensemble des nombres réels x	Représentation	Intervalle
$a \leqslant x \leqslant b$	a [ ] b	$[a\,;b]$
$a \leqslant x < b$	a [[b	$[a\,;b[$
$x < b$	[b	$]-\infty\,;b[$
$x \geqslant a$	a [	$[a\,;+\infty[$

En b le crochet est ouvert (dirigé vers l'extérieur). Cela signifie que b n'appartient pas à l'intervalle.

On définit de la même façon les intervalles $]a\,;b[$, $]a\,;b]$, $]a\,;+\infty[$ et $]-\infty\,;b]$.

Attention ! $-\infty$ et $+\infty$ ne désignent pas des nombres réels ; du côté de $-\infty$ et de $+\infty$, le crochet est toujours ouvert. Par exemple, on note : $\mathbb{R} =]-\infty\,;+\infty[$.

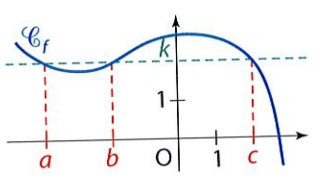
b. Résolutions graphiques de $f(x)=k$ et $f(x)=g(x)$

PROPRIÉTÉS

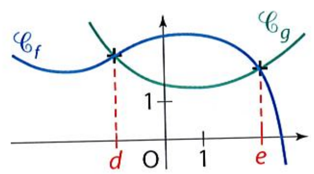
- Dans un repère, les solutions de l'équation $f(x)=k$ sont **les abscisses** des points d'ordonnée k de la courbe $\mathscr{C}_f$ représentant f.
- Dans un repère, les solutions de l'équation $f(x)=g(x)$ sont **les abscisses** des points d'intersection des courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ représentant f et g.

EXEMPLES

Sur cette figure, l'équation $f(x)=k$ a pour solutions les nombres a, b, c.



Sur cette figure, l'équation $f(x)=g(x)$ a pour solutions les nombres d et e.



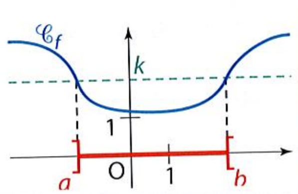
c. Résolutions graphiques de $f(x)<k$ et $f(x)<g(x)$

PROPRIÉTÉS

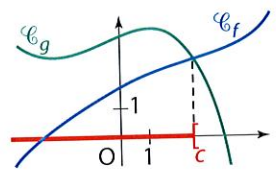
- Dans un repère, les solutions de l'inéquation $f(x)<k$ sont **les abscisses** des points de la courbe $\mathscr{C}_f$ d'ordonnée strictement inférieure à k.
- Dans un repère, les solutions de l'inéquation $f(x)<g(x)$ sont **les abscisses** des points de la courbe $\mathscr{C}_f$, situés au-dessous de la courbe $\mathscr{C}_g$.

EXEMPLES

Sur cette figure, l'ensemble des solutions de l'inéquation $f(x)<k$ est l'intervalle $]a\,;b[$.



Sur cette figure, l'ensemble des solutions de l'inéquation $f(x)<g(x)$ est l'intervalle $]-\infty\,;c[$.



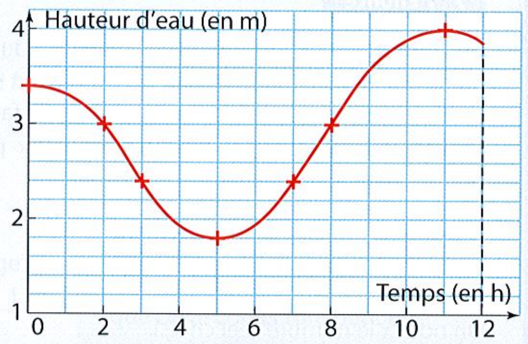
Exercice résolu — Résoudre graphiquement

4 Énoncé

On note H la fonction qui, à chaque instant entre 0 h et 12 h, associe la hauteur d'eau (en mètres) dans un port de plaisance.
La courbe représentative de la fonction H est donnée dans le repère ci-contre.

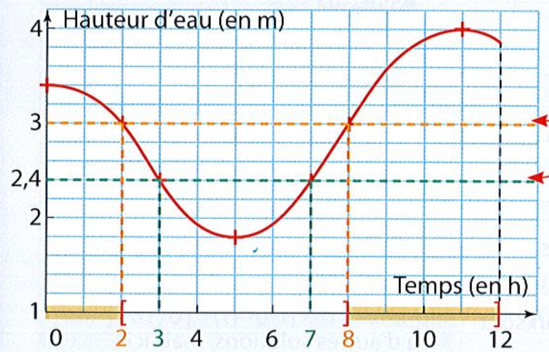
a) Résoudre graphiquement l'équation $H(x)=2{,}4$.
Interpréter les résultats.

b) Le voilier de Soizic ne peut sortir du port que si la hauteur d'eau dépasse 3 m.
Quand Soizic peut-elle sortir son voilier ?



Solution

a) Les tracés en vert ci-dessous indiquent que les solutions de l'équation $H(x)=2{,}4$ sont les nombres 3 et 7. Cela signifie qu'à 3 h et à 7 h, la hauteur d'eau dans le port est 2,4 m.



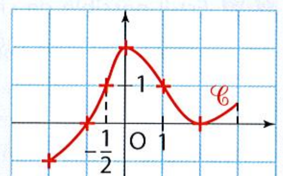
Conseils

- On repère 2,4 sur l'axe des ordonnées et on trace la parallèle à l'axe des abscisses passant par ce point.
On lit les abscisses de ses points d'intersection avec la courbe représentative de H.
- On procède de même à partir de 3 sur l'axe des ordonnées. On lit les abscisses des points de la courbe représentative de H situés au-dessus de la droite jaune.

b) Répondre à cette question revient à résoudre l'inéquation $H(x)>3$.
Les tracés jaunes ci-dessus indiquent que son ensemble des solutions est constitué des intervalles $[0\,;2[$ et $]8\,;12]$. On l'écrit $[0\,;2[\,\cup\,]8\,;12]$ ($\cup$ se lit « union »).
Donc Soizic peut sortir son voilier avant 2 h ou après 8 h.

À votre tour

5 f est la fonction définie par la courbe $\mathscr{C}$ dans le repère ci-contre.

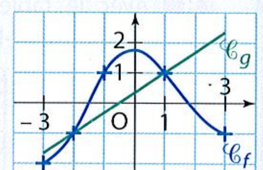


1. Quel est l'ensemble de définition de f ?

2. Résoudre graphiquement les équations :

a) $f(x)=0$ **b)** $f(x)=1$ **c)** $f(x)=2$

6 $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ sont les courbes représentatives des fonctions respectives f et g sur l'intervalle $[-3\,;3]$ dans le repère ci-contre.



Résoudre graphiquement :

a) $f(x)=g(x)$ **b)** $f(x)>g(x)$ **c)** $f(x)\geqslant g(x)$

Résoudre des problèmes

Problème résolu — Résoudre une équation du type $f(x) = g(x)$

7 **Énoncé**

Un professeur a donné en classe deux programmes de calculs différents.
Est-il possible de choisir un nombre réel de façon à obtenir le même résultat avec les deux programmes ?

Programme A
- Choisir un nombre.
- Élever au carré.

Programme B
- Choisir un nombre.
- Multiplier par 1,5.
- Ajouter 10.

Solution

• Mathématisation

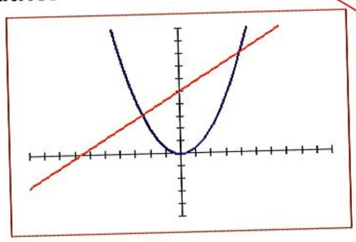
On note x le nombre réel choisi.
Le programme A fournit un résultat égal à x^2.
Le programme B fournit un résultat égal à $1{,}5x+10$.
Résoudre le problème revient donc à résoudre l'équation $x^2=1{,}5x+10$.

Programme B

• Choisir un nombre.	x
• Multiplier par 1,5.	$1{,}5x$
• Ajouter 10.	$1{,}5x+10$

• Conjecture avec la calculatrice

À l'écran d'une calculatrice graphique, on affiche les courbes des fonctions $x \mapsto x^2$ et $x \mapsto 1{,}5x+10$ avec la fenêtre graphique : $-10 \leqslant X \leqslant 10$, pas 1 et $-10 \leqslant Y \leqslant 20$, pas 2.



Graphiquement, il semble que $-2{,}5$ et 4 sont solutions.

• Résolution du problème

On vérifie que les nombres lus précédemment à l'écran sont bien solutions :
$(-2{,}5)^2=6{,}25$ et $1{,}5\times(-2{,}5)+10=6{,}25$, donc $-2{,}5$ est bien solution ;
$4^2=16$ et $1{,}5\times4+10=16$, donc 4 est aussi solution.
Donc ces deux programmes de calcul donnent le même résultat lorsqu'on choisit au départ $-2{,}5$ ou 4.

Conseils

- En classe de Seconde, on ne sait pas résoudre algébriquement une équation de ce type.
On peut alors penser à rechercher des solutions :
– graphiquement (comme ici) ;
– avec un tableur (voir exercice **8**).
- On ne sait pas si cette équation a d'autres solutions, mais ici l'énoncé ne demande pas de les trouver toutes.

À votre tour

8 Avec le tableur, réaliser une feuille de calcul telle que celle commencée ci-dessous pour résoudre l'exercice **7**.

	A	B	C
1	x	x^2	$1{,}5x+10$
2	-10	100	-5
3	-9,5		

9 Est-il possible de choisir un nombre réel de façon à obtenir le même résultat avec les programmes ci-dessous ?

A : $\square \xrightarrow{\times(-4{,}8)} \square$

B : $\square \xrightarrow{\text{carré}} \square \xrightarrow{-7{,}2} \square$

Problème résolu — Étudier la position relative de deux courbes

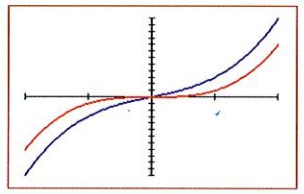
10 **Énoncé**

f et g sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^3+2x$ et $g(x)=x^3$.
$\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ sont les courbes représentatives respectives de f et g dans un repère.
Étudier la position relative des courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.

Solution

• Conjecture avec la calculatrice

On affiche les courbes de f (en bleu) et de g (en rouge) à l'écran de la calculatrice avec la fenêtre $-2 \leqslant X \leqslant 2$, pas 1 et $-12 \leqslant Y \leqslant 12$, pas 1.
Il semble que $\mathscr{C}_f$ est au-dessus de $\mathscr{C}_g$ sur $[0\,;+\infty[$ et au-dessous de $\mathscr{C}_g$ sur $]-\infty\,;0]$.



• Résolution du problème

Pour étudier la position relative de $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$, on étudie le signe de $f(x)-g(x)$.
Pour tout nombre réel x,

$$f(x)-g(x)=x^3+2x-x^3=2x$$

Or, $2x \geqslant 0$ si, et seulement si, $x \geqslant 0$. Donc :
- **sur $[0\,;+\infty[$**, $f(x)-g(x) \geqslant 0$ c'est-à-dire $f(x) \geqslant g(x)$ et **$\mathscr{C}_f$ est au-dessus de $\mathscr{C}_g$** ;
- **sur $]-\infty\,;0]$**, $f(x)-g(x) \leqslant 0$ c'est-à-dire $f(x) \leqslant g(x)$ et **$\mathscr{C}_f$ est au-dessous de $\mathscr{C}_g$**.

Conseils

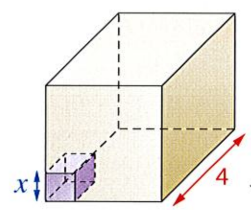
- Deux facteurs au moins font que cette conjecture peut être entachée d'une erreur :
– il n'est pas possible de visualiser la totalité des deux courbes ;
– on ne voit pas très bien la courbe $\mathscr{C}_g$ autour de l'origine.
- Pour savoir si cette conjecture est vraie, on étudie **le signe de la différence $f(x)-g(x)$**.

À votre tour

11 f et g sont les fonctions définies sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ par :
- $f(x)=\sqrt{x}$
- $g(x)=\sqrt{x}+x-3$

$\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ sont les courbes représentatives respectives de f et g dans un repère.
a) Afficher les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ à l'écran de la calculatrice en précisant la fenêtre graphique.
b) Conjecturer la position relative de $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.
c) Démontrer cette conjecture.

12 Un cube de côté x est inclus dans un cube de côté 4.
Dans un repère, $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ sont les courbes représentatives des fonctions définies sur l'intervalle $[0\,;4]$ par $f(x)=x^3$ et $g(x)=64-x^3$.



a) Étudier la position relative de $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.
b) Interpréter les résultats pour les deux cubes.

Problème résolu — Comprendre une boucle bornée

13 **Énoncé**

f est la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;2]$ par :

$$f(x)=\sqrt{x}$$

a) Exécuter l'algorithme ci-contre et construire dans un repère les points obtenus.

b) Expliquer le rôle de l'algorithme.

```
Variables :          x, y sont des nombres réels
                     k est un nombre entier naturel
Traitement
et sortie :          Affecter à x la valeur 0
                     Pour k allant de 0 à10
                       | Affecter à y la valeur f(x)
                       | Tracer le point de coordonnées (x ; y)
                       | Affecter à x la valeur x + 0,2
                     Fin Pour
```

Solution

a) Pour $k=0$, $\sqrt{0}=0$, on trace le point de coordonnées $(0\,;0)$, puis x prend la valeur 0,2.

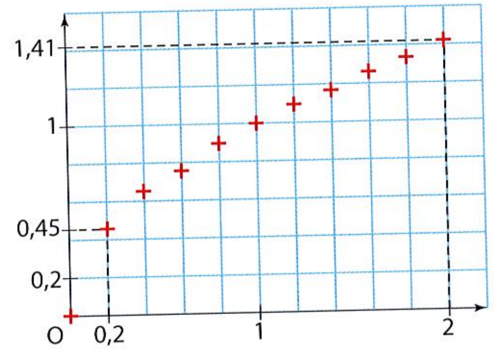
On poursuit ainsi la construction jusqu'à $k=10$.

Voici les valeurs obtenues ; pour y il s'agit le plus souvent d'une valeur approchée au centième près.

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1	1,2	1,4	1,6	1,8	2
y	0	0,45	0,63	0,77	0,89	1	1,10	1,18	1,26	1,34	1,41

On obtient le nuage de points $M(x\,;y)$ dans le repère ci-contre.

b) Cet algorithme permet de construire onze points de la courbe représentative de la fonction f.



À votre tour

14 On reprend l'algorithme de l'exercice **13**.

Après avoir déclaré une nouvelle variable réelle z, on remplace la boucle par :

```
Pour k allant de 0 à 9
  | Affecter à y la valeur f(x)
  | Affecter à z la valeur f(x + 0,2)
  | Tracer le segment qui relie les points de
  |     coordonnées (x ; y) et (x + 0,2 ; z)
  | Affecter à x la valeur x + 0,2
Fin Pour
```

a) Exécuter cet algorithme.

b) Expliquer son rôle.

15 g est la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;2]$ par :

$$g(x)=\begin{cases}1 & \text{si } 0\leqslant x<1\\ x+1 & \text{si } 1\leqslant x\leqslant 2\end{cases}$$

a) Exécuter l'algorithme de l'exercice **13** pour cette nouvelle fonction g et placer dans un repère les points obtenus.

b) Exécuter également l'algorithme de l'exercice **14** pour la fonction g et construire dans un repère les segments obtenus.

c) Que pensez-vous des graphiques ainsi construits ?

16 Le grille-pain

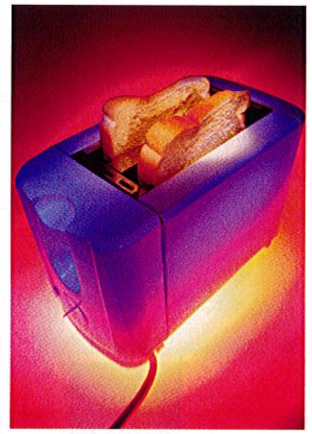
Objectif

Comprendre et analyser un algorithme dans une situation liée à la physique.

En électricité, l'intensité I (en ampères) du courant qui traverse un dipôle et la tension U (en volts) aux bornes de ce dipôle sont liées par la loi d'Ohm qui s'écrit :

$$U=R\times I$$

On s'intéresse à un grille-pain de résistance $R=57,5\ \Omega$ et de puissance maximale 900 W. Afin de traduire cette loi, Océane a écrit l'algorithme suivant :



```
Variables :      I, R, U sont des nombres réels
Entrée :         Saisir I
Traitement :     Affecter à R la valeur 57,5
                 Affecter à U la valeur R × I
Sortie :         Afficher U
```

1 Quelques calculs

a) Quelle tension U obtient-on en sortie de l'algorithme si la valeur saisie en entrée pour I est 3,6 ?

b) Si on inverse les deux lignes du traitement de l'algorithme, le calcul de la tension est-il encore possible ? Justifier.

c) La tension affichée par l'algorithme est 230. Déterminer la valeur de I saisie en entrée.

Dans ce cas, la puissance $P=U\times I$ dépasse-t-elle la puissance maximale autorisée du grille-pain ?

2 Modification de l'algorithme pour gérer la puissance maximale

Afin de prévenir l'utilisateur d'une éventuelle puissance trop élevée, on modifie l'algorithme.

Voici le programme associé écrit dans différents langages.

CASIO

```
======PUISSANC======
"I=":?→I↵
57.5→R↵
R×I→U↵
U×I→P↵
If P>900↵
Then "PMAX DEPASSEE"◢
Else ↵
U◢
P◢
IfEnd↵
```

TI

```
PROGRAM:PUISSANC
:Prompt I
:57.5→R
:R*I→U
:U*I→P
:If P>900
:Then
:Disp "PMAX DEPA
SSEE"
:Else
:Disp U,P
:End
```

Python

```python
print("Entrer I :")
I=float(input())
R=57.5
U=R*I
P=U*I
if P>900:
    print("Puissance Max dépassée")
else:
    print("P=",P)
    print("U=",U)
```

AlgoBox

```
▼ VARIABLES
  ├R EST_DU_TYPE NOMBRE
  ├U EST_DU_TYPE NOMBRE
  ├I EST_DU_TYPE NOMBRE
  └P EST_DU_TYPE NOMBRE
▼ DEBUT_ALGORITHME
  ├LIRE I
  ├R PREND_LA_VALEUR 57.5
  ├U PREND_LA_VALEUR R*I
  ├P PREND_LA_VALEUR U*I
  ▼ SI (P>900) ALORS
    ├DEBUT_SI
    ├AFFICHER "Puissance Max dépassée"
    ├FIN_SI
    ▼ SINON
      ├DEBUT_SINON
      ├AFFICHER P
      ├AFFICHER U
      └FIN_SINON
└FIN_ALGORITHME
```

Saisir l'un de ces programmes et conjecturer la plus grande valeur, au centième près, de l'intensité que peut supporter ce grille-pain sans être endommagé.

3 Travailler en autonomie — **Compte-rendu**

a) Indiquer ce que représente en physique chacune des variables employées et préciser leur unité.

b) Démontrer que $P=R\times I^2$ et déterminer l'intensité maximale qui peut traverser le grille-pain.

Préciser si cette valeur est cohérente avec la valeur conjecturée à la question 2.

17 Le drapeau suédois

Objectif

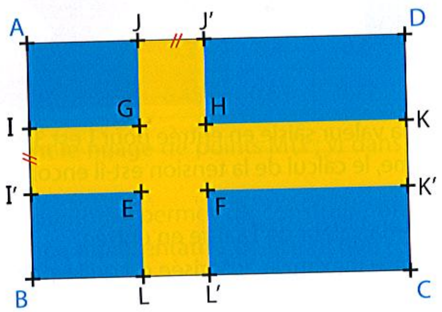
Modéliser une situation concrète et développer une démarche expérimentale.

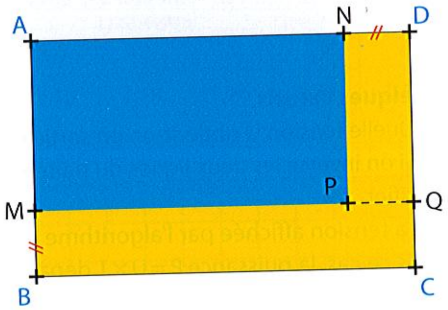
Le drapeau de la Suède est un rectangle de tissu bleu de 2,4 m par 1,5 m sur lequel est apposée une croix jaune.

On se propose de déterminer la largeur de la croix sachant que son aire occupe 30 % de l'aire totale du drapeau.

1 Réflexion sur deux figures

Sur ces figures, les deux rectangles ABCD sont identiques et les bandes jaunes rectangulaires ont la même largeur. Sven affirme : « Sur ces figures, les aires des surfaces jaunes sont les mêmes ».
Cette affirmation est-elle vraie ou fausse ? Justifier.





2 Conjecture avec un logiciel de géométrie dynamique

a) Créer un rectangle ABCD tel que AB = 1,5 et AD = 2,4.
b) Créer un curseur L allant de 0 à 1,5 avec un incrément de 0,1 (utiliser Curseur).
c) Placer les points M de [AB] et N de [AD] tels que BM = DN = L (utiliser Cercle (centre-rayon)).
d) Créer les rectangles MBCQ et DNPQ (leurs aires sont notées poly2 et poly3 dans la fenêtre Algèbre).
e) Dans la ligne de saisie, entrer Acroix=poly2+poly3.
f) Déplacer le curseur et conjecturer la valeur de L répondant au problème.

3 Modélisation avec une fonction

On note f la fonction qui à chaque largeur L, en m, de $[0\,;1{,}5]$ associe l'aire en m² de la croix jaune.
a) Démontrer que $f(\text{L}) = 3{,}9\text{L} - \text{L}^2$.
b) Expliquer pourquoi résoudre l'équation $3{,}9\text{L} - \text{L}^2 = 1{,}08$ permet de résoudre le problème.
c) Vérifier que la valeur conjecturée à la question 2 f) est bien une solution de cette équation.

4 Travailler en autonomie — Compte-rendu

En réalité, le centre de la croix jaune se situe à 90 cm du bord gauche du drapeau et à 75 cm du bord supérieur. Construire ce drapeau suédois à l'échelle 1/25.

18 Le pluviomètre

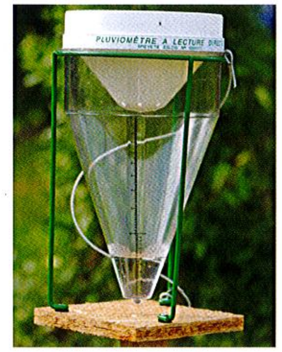
Objectif

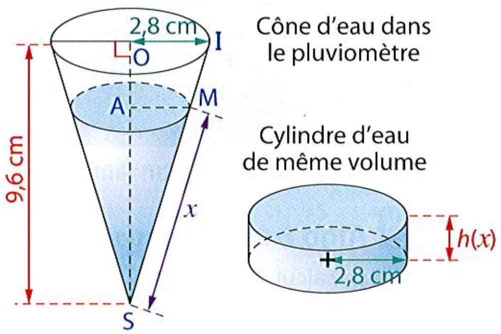
Analyser et modéliser un système de mesure.

Florent possède un pluviomètre conique de hauteur 9,6 cm et de rayon 2,8 cm. Il remarque que les graduations situées sur le bord ne sont pas régulières et il se demande pourquoi.

La notice indique que la hauteur d'eau de pluie est la hauteur d'un cylindre de même rayon que le pluviomètre et de même volume que le **cône d'eau**.

On note x la longueur en cm de la génératrice [SM] du cône d'eau et on note $h(x)$ la hauteur d'eau correspondante en cm (comme l'indiquent les schémas).





Formulaire
- Volume d'un cylindre : $V = \pi R^2 h$
- Volume d'un cône : $V = \frac{1}{3}\pi R^2 h$

1 Modélisation par une fonction

a) Calculer la longueur, en cm, de la génératrice [SI] du pluviomètre.
Préciser l'intervalle auquel appartient x.
b) Utiliser le théorème de Thalès pour établir que la hauteur, en cm, du cône d'eau est $0{,}96\,x$.
c) En déduire que le rayon, en cm, du cône d'eau est $0{,}28\,x$.
d) En déduire que le volume du cône d'eau, en cm³, est égal à $\pi \times 0{,}025\,088x^3$ et finalement que la hauteur d'eau du cylindre, en cm, est $h(x) = 0{,}003\,2x^3$.

2 Analyse de la graduation du pluviomètre avec un logiciel de géométrie dynamique

a) Dans la zone de saisie, entrer $h(x)$=Fonction[0.0032x∧3, 0, 10] pour obtenir à l'écran la courbe représentative de la fonction h sur l'intervalle $[0\,;10]$.
b) Recopier ce tableau et le compléter à l'aide du logiciel et du graphique.

x en cm (au dixième près)									
$h(x)$ en cm	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	1	1,5	2	2,5

3 Travailler en autonomie — Compte-rendu

a) À l'aide du tableau réalisé à la question 2 b), dessiner les graduations inscrites sur le pluviomètre.
b) Si l'eau arrive à la graduation indiquant 2,4 cm, déterminer alors le volume d'eau présent dans le pluviomètre.

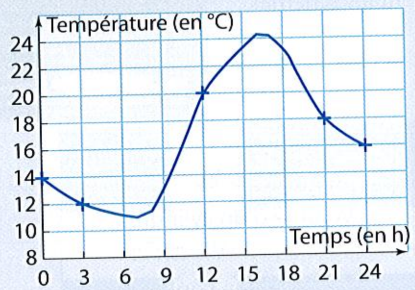
Définir une fonction

À l'oral

19 f est la fonction qui à chaque nombre associe son double.
a) Calculer mentalement $f(20)$ et $f\left(\frac{5}{4}\right)$.
b) Déterminer l'antécédent de 0,18 par f.

20 Lucien a relevé toutes les notes de sa classe et tente d'associer à l'âge de chaque élève sa note sur 20. Lucien définit-il une fonction ? Justifier.

21 La fonction T est définie par la courbe dans le repère ci-dessous.



a) Déterminer l'ensemble de définition de T.
b) Lire graphiquement la valeur exacte ou une valeur approchée de :
- l'image de 21 par T ;
- T(9).

Interpréter ces résultats pour la situation.
c) Lire graphiquement les valeurs exactes ou approchées des antécédents de 20 par T.

22 V est la fonction définie par le tableau suivant :

x	−1	0	2	3	7
V(x)	7	3	7	−3	1

a) Déterminer l'ensemble de définition de V.
b) Lire l'image de 3 par V.
c) Lire V(7).
d) Lire les antécédents de 7 par V.

23 L est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $L(x) = 7x$.
a) Calculer mentalement l'image de $\frac{2}{35}$, puis de 1,2 par la fonction L.
b) Calculer mentalement l'antécédent de 56, puis l'antécédent de 6,3 par la fonction L.

24 f est la fonction qui à chaque nombre associe son opposé.
a) Déterminer l'image par f de : • −3 • $\sqrt{2}$
b) Déterminer l'antécédent de 0,6 par f.
c) Existe-t-il un nombre égal à son image par f ?

25 G est la fonction qui associe à chaque nombre le carré de son triple.
a) Exprimer G(x) en fonction de x.
b) Olivia affirme : « −1 a pour image 9 par la fonction G ». A-t-elle raison ? Justifier.

26 Lors d'une plongée, Benoît relève toutes les cinq minutes l'heure et la pression de l'eau (en bars). Définit-il une fonction :
- en associant à chaque heure relevée la pression correspondante ?
- en associant à chaque pression relevée la ou les heures correspondante(s) ?

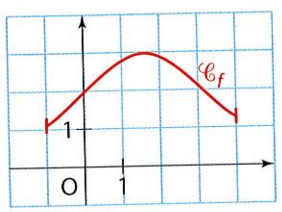
27 Algo E est la fonction définie par le programme de calcul ci-dessous.

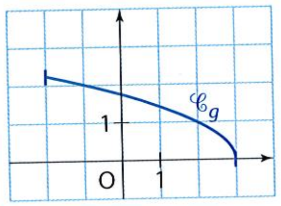
- Choisir un nombre réel.
- Multiplier par 4.
- Soustraire 2.
- Multiplier par 3.

a) Calculer E(5,5).
b) Exprimer E(x) en fonction du nombre x choisi au départ.
c) Julie annonce : « J'ai obtenu −6 ». Quel nombre a-t-elle choisi au départ ?

28 F est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$F(x) = 1 - 8(x-2)$$
Écrire un programme de calcul pour déterminer l'image par F d'un nombre choisi au départ.
+ Python

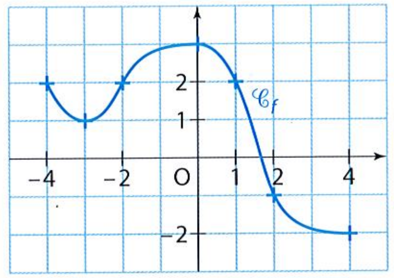
29 f et g sont des fonctions définies par les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ ci-dessous.
a) Lire les ensembles de définition de f et g.





b) Linda affirme : « $g(1) > f(1)$ ».
A-t-elle raison ? Expliquer.

30 La courbe ci-dessous définit une fonction f.



a) Lire graphiquement l'image de 2 par f.
b) Lire graphiquement $f(4)$.
c) Lire graphiquement les antécédents de 2 par f.
d) Reformuler les consignes **b)** et **c)** avec une phrase comportant le mot « image ».

31 On réchauffe un glaçon et on mesure l'évolution de sa température en fonction du temps.
À l'instant t en secondes, on associe la température $f(t)$ de la matière observée (glace ou eau) en degrés Celsius.
On a relevé les températures suivantes :

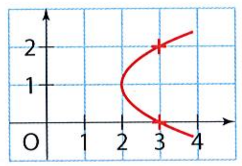
t	0	9	22	35	45	58
$f(t)$	−5,5	−4	−2	−1	−0,5	0

t	100	120	160	180	200	220
$f(t)$	0	0	0	0,1	0,5	1

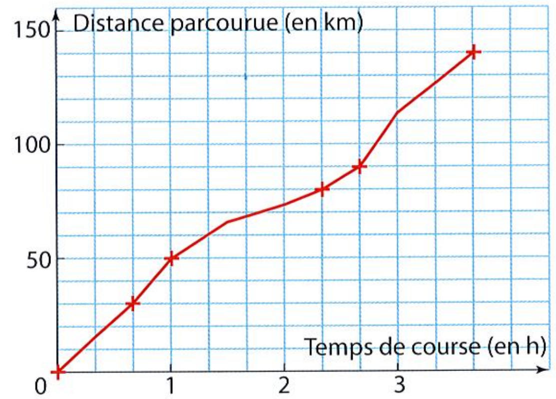
a) Tracer une courbe pouvant représenter f (*unités : 1 cm pour 20 s et 1 cm pour 1 °C*).
b) Pendant combien de secondes la température reste-t-elle comprise entre −0,5 et 0,5 °C ?

32 Une fonction f est définie par une courbe $\mathscr{C}$. Valériane dispose de cette courbe et renseigne Hélène au téléphone qui était absente en classe :
« f est définie sur $[-2\,;2]$. L'image de 0 par f est 3.
f s'annule en −2 et 2. On sait que $f(1) = 2$.
−1 est un antécédent de 2 par f ».
Comme le ferait Hélène, tracer une courbe susceptible de représenter f.

33 Justifier que cette courbe n'est pas la représentation graphique d'une fonction.

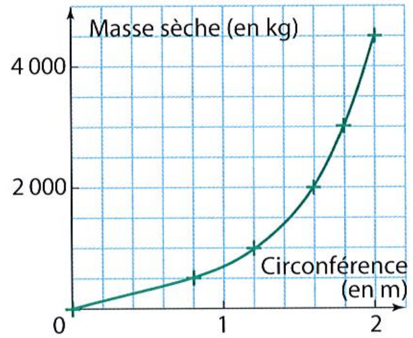


34 Le compteur de vitesse d'un coureur du tour de France a produit le graphique ci-dessous.



g est la fonction définie par cette courbe.
a) Que désignent la variable t et son image $g(t)$ par la fonction g ?
b) Lire graphiquement la distance totale parcourue et la durée de la course.
Interpréter ces réponses en termes d'image.
c) Lire graphiquement $g(0)$ et $g(1)$; en déduire la vitesse moyenne du cycliste durant la première heure.
d) Le col le plus pentu est situé entre les kilomètres 50 et 80.
Déterminer la durée de la montée en h et min.

35 Cette courbe modélise la masse sèche (en kg) des arbres d'une exploitation en fonction de leur circonférence, en m, à 1 m du sol.



a) Sur une parcelle forestière sont plantés 100 arbres de 0,8 m de circonférence et 60 arbres de 1,8 m de circonférence.
Déterminer la masse sèche totale de cette parcelle.
b) Un arbre de 1,2 m de circonférence et un arbre de 2 m de circonférence pèsent-ils autant que deux arbres de 1,6 m de circonférence ? Justifier.

36 **Vrai ou faux ?**

f est la fonction définie par le tableau suivant :

x	1	4	6	8
$f(x)$	4	2	8	4

Pour chaque phrase, dire si elle est vraie ou fausse.

a) L'image de 4 par f est 1.
b) Un antécédent de 4 par f est 1.
c) Il existe un nombre réel qui a plusieurs antécédents par f.
d) Un antécédent de l'image de 1 par f est 8.

37 Une fonction h est définie par un tableau de valeurs, mais Alice a renversé du correcteur dessus. Son professeur lui laisse quelques phrases pour retrouver tous les éléments effacés.

« • h n'est définie que pour cinq entiers pairs ;
• de plus, par la fonction h, l'image de 4 est 15 ;
• 20 a pour antécédent 6 ;
• -2 et 2 ont des images opposées ;
• l'image de 4 est le triple de l'image de 2 ;
• le produit des images de 0 et de 6 est -30 ».

Retrouver le tableau de valeurs de h.

38 g est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=2x^2-6$.

a) Calculer : • $g(4)$ • $g(-0,1)$ • $g\left(\frac{10}{3}\right)$
b) Vérifier que -4 est un antécédent de 26 par g.

39 A est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $A(x)=\frac{x}{2}+3$.

a) Déterminer l'antécédent de 12 par A.
b) Morgane écrit une conjecture sur son cahier : « Pour n'importe quel choix de nombre entier x, son image $A(x)$ est aussi un nombre entier ».
Morgane a-t-elle raison ? Justifier.

40 Lors de la fête du cinéma (qui dure trois jours), Mathis paie son premier ticket 8 € et tous les tickets suivants 3,50 €.
On note $f(n)$ le prix en euros associé au nombre n de tickets achetés par Mathis (avec $n \geqslant 1$).

a) Exprimer $f(n)$ en fonction de n.
b) Si Mathis voit 5 films, quelle somme va-t-il dépenser ?
c) Plusieurs jours après la fête du cinéma, Mathis annonce : « J'ai dépensé 127 € en places de cinéma ». Que pensez-vous de cette affirmation ?

41 **Algo** Cécile affirme : « La fonction qui au nombre x choisi associe le résultat obtenu par ce programme de calcul peut être définie par $f(x)=4-10(x-1)$ ». Cécile a-t-elle raison ? Justifier.

• Choisir un nombre réel.
• Multiplier par -10.
• Ajouter 14.

42 **Algo** p. 326

1. g est la fonction $x \mapsto x^2-4x$.
Calculer $g(-7)$, $g(0,5)$ et $g(-6)$.
2. Voici un algorithme.

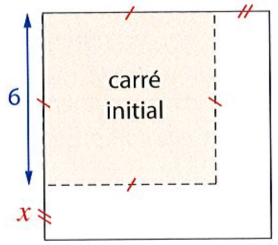
Variables : x, a, b, c sont des nombres réels
Entrée : Saisir x
Traitement : Affecter à a la valeur x^2
Affecter à b la valeur $4x$
Affecter à c la valeur $a-b$
Sortie : Afficher c

a) Quel est le nombre affiché en sortie lorsque :
• $x=-7$? • $x=0,5$? • $x=-6$?
b) L'algorithme affiche-t-il l'image de x par g en sortie pour tout nombre x saisi en entrée ?

43 g est la fonction $x \mapsto \frac{1}{2x+5}$.

a) Calculer l'image par g de : • 0 • 1 • $-0,5$
b) Expliquer pourquoi $-2,5$ n'a pas d'image par g.

44 On considère un carré de côté 6 cm. On augmente de x cm la longueur de ses côtés.
On note $A(x)$ l'aire, en cm², et $P(x)$ le périmètre, en cm, du carré obtenu.



a) Donner l'ensemble de définition des fonctions A et P.
b) Exprimer $A(x)$ et $P(x)$ en fonction de x.
c) Calculer $P(x)$ lorsque $A(x)=51,84$.
d) Calculer $A(x)$ lorsque $P(x)=32,8$.

45 Voici un tableau de valeurs d'une fonction f obtenu avec le tableur.

	A	B
1	x	$f(x)$
2	0	-1
3	1	0
4	2	1

a) Parmi les expressions ci-dessous, lesquelles peuvent convenir pour $f(x)$?
• $x-1$ • $(x-1)^2$ • $(x-1)^3$
b) On sait de plus que $f(-1)=-8$.
Des expressions précédentes, quelle est celle de $f(x)$?
c) Quelle formule a été saisie dans la cellule B2 ?

Appartenance à une courbe

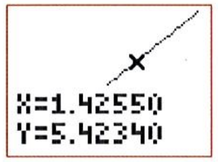
À l'oral

46 f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$f(x)=2x-3$$
A, B, C sont des points de la courbe représentative de f dans un repère.
Déterminer mentalement le nombre manquant.
• $A(1,2\,;\cdots)$ • $B(\cdots\,;23)$ • $C\left(-\frac{1}{4}\,;\cdots\right)$

47 f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$f(x)=4x^2$$
$\mathscr{C}$ est la courbe représentative de f dans un repère.
a) Un point A d'ordonnée 16 appartient à $\mathscr{C}$. Quelle peut être son abscisse ?
b) Le point $B(-10\,;400)$ appartient-il à $\mathscr{C}$?
c) Le point $C(-3\,;-36)$ appartient-il à $\mathscr{C}$?

48 f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$f(x)=x(2x+5)$$
Déterminer les coordonnées de cinq points de sa courbe représentative dans le repère.

49 Stéphanie annonce : « J'ai tracé la courbe représentant la fonction $x \mapsto 1,7x+3$ à l'écran de la calculatrice ».
Que pensez-vous de son affirmation ?



50 La courbe $\mathscr{C}$ ci-dessous représente une fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;5]$.

a) Parmi les points suivants, quels sont ceux dont on peut affirmer qu'ils appartiennent à la courbe $\mathscr{C}$?
$O(0\,;0)$ $A(1\,;1)$ $B(2\,;1,4)$
$C(3\,;1,7)$ $D(4\,;2)$ $E(2,25\,;1,5)$
b) Sachant que f est définie par $f(x)=\sqrt{x}$, reprendre la question précédente par le calcul.

Intervalles et résolutions graphiques

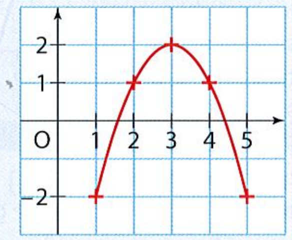
À l'oral

51 Reformuler chaque phrase en employant le mot « intervalle ».
a) x est un nombre réel supérieur ou égal à 2.
b) y est un nombre réel supérieur ou égal à -1 et strictement inférieur à 5.

52 Reformuler chaque phrase en employant une expression : supérieur ou égal, strictement supérieur, inférieur ou égal, strictement inférieur.
a) $x \in [-3\,;1]$ **b)** $x \in]-\infty\,;5]$
c) $x \in]1\,;10[$ **d)** $x \in]-1\,;+\infty[$

53 Dans chaque cas, dire si le nombre $-4,5$ appartient à l'intervalle.
a) $]-4,5\,;0]$ **b)** $[-5\,;1]$
c) $]-4\,;3[$ **d)** $]-\infty\,;-5]$

54 f est la fonction représentée dans le repère ci-contre.
Résoudre graphiquement :



a) $f(x)=2$
b) $f(x)=3$
c) $f(x) \leqslant 1$
d) $f(x) > -2$

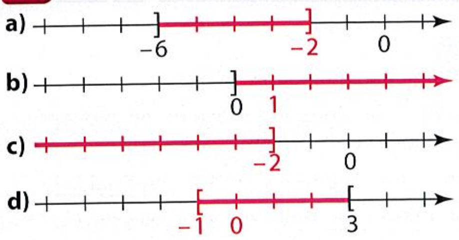
55 Traduire chaque information par l'appartenance de x à un intervalle.
Représenter cet intervalle sur une droite graduée.
a) $3 \leqslant x \leqslant 7$ **b)** $-3 \leqslant x < 5$ **c)** $x < 5$
d) $x \geqslant 0$ **e)** $-2 < x \leqslant 1$ **f)** $x \leqslant -4$

56 Traduire chacune des informations par des inégalités.
a) $x \in [-3\,;4]$ **b)** $x \in]0\,;4[$ **c)** $x \in [1\,;100[$
d) $x \in]-\infty\,;10[$ **e)** $x \in [5\,;+\infty[$ **f)** $x \in]-\infty\,;0]$

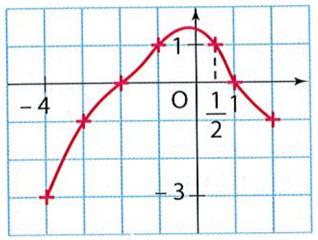
57 Recopier et compléter le tableau avec les inégalités et les intervalles qui conviennent.

$2 \leqslant x \leqslant 3$	$x \in \cdots$
$x > 2$	$x \in \cdots$
$x \ldots$	$x \in]-\infty\,;3]$

58 Écrire l'intervalle coloré en rouge.

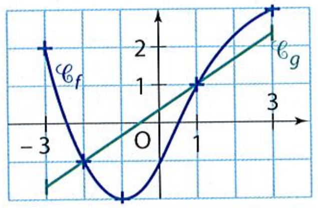


59 f est la fonction définie sur $[-4\,;2]$ par la courbe ci-contre.
Résoudre graphiquement les inéquations :



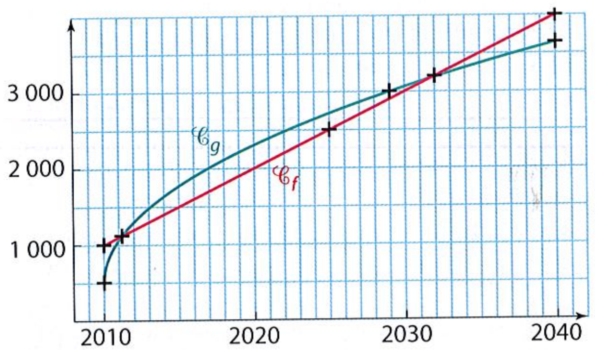
a) $f(x) \geqslant 1$ **b)** $f(x) > 0$ **c)** $f(x) \leqslant -1$

60 Dans un repère, $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ sont les courbes représentatives de fonctions f et g définies sur $[-3\,;3]$.
Résoudre graphiquement les inéquations :



a) $f(x) \geqslant g(x)$ **b)** $f(x) > g(x)$ **c)** $f(x) \leqslant g(x)$

61 Les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ ci-dessous indiquent l'évolution des salaires mensuels en euros de Fabien (f) et de Guillaume (g) d'année en année. Elles représentent les deux fonctions « salaires » f et g.



a) Indiquer la légende à écrire sur chaque axe.
b) Lire l'ensemble de définition des fonctions f et g.
c) Résoudre graphiquement les équations :
- $f(t) = 2\,500$
- $g(t) = 3\,000$
- $f(t) = g(t)$.

Interpréter les réponses.

62 f et g sont les fonctions définies sur l'intervalle $[-4\,;4]$ par :
$$f(x) = (2-x)(x^2+x-7) \quad \text{et} \quad g(x) = 4-x^2.$$
a) Tracer les courbes représentatives des fonctions f et g à l'écran de la calculatrice.
b) L'équation $f(x) = g(x)$ admet trois solutions. Lire graphiquement ces solutions et vérifier leur validité par le calcul.
c) Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) \leqslant g(x)$.

S'entraîner à la logique

63 Réunion d'intervalles ▶ p. 338

1. Sur le menu d'un restaurant scolaire, il est écrit « fromage ou yaourt ». Est-il permis de prendre une portion de fromage et un yaourt ?

2. a) $D_1 =]-\infty\,;3[$ et $D_2 = [2\,;4]$.
x désigne un nombre réel qui appartient à D_1 ou D_2.
Lucie écrit : « C'est-à-dire $x \leqslant 4$ ».
Qu'en pensez-vous ?
b) Comparer les significations du mot « ou » dans le langage courant et le langage mathématique.

3. L'ensemble des nombres réels qui appartiennent à un intervalle I **ou** un intervalle J est la **réunion** des intervalles I et J ; on la note **I ∪ J**.
Déterminer la réunion des deux intervalles.
a) $I =]-\infty\,;3]$ et $J = [0\,;5]$.
b) $I = [-1\,;4]$ et $J = [0\,;2]$.
c) $I =]-10\,;5[$ et $J =]1\,;+\infty[$.

64 Intersection d'intervalles ▶ p. 338

1. a) Représenter sur la même droite graduée les deux intervalles $I =]-\infty\,;3[$ et $J = [2\,;6]$.
b) Quel est l'ensemble K des nombres réels qui appartiennent à la fois à I **et** à J ?
On dit que K est l'**intersection** de I et J ; on la note $K = \mathbf{I \cap J}$.

2. Déterminer l'intersection des deux intervalles.
a) $I = [-4\,;3]$ et $J = [3\,;5]$.
b) $I = [0\,;10]$ et $J =]10\,;+\infty[$.
c) $I = [-1\,;1]$ et $J =]0\,;+\infty[$.

3. f et g sont les fonctions définies :
- sur $D_1 =]-3\,;5]$ par $f(x) = x^2+1$;
- sur $D_2 = [-1\,;7]$ par $g(x) = 2x+1$.

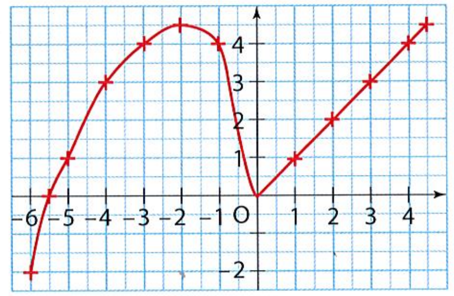
Quel est l'ensemble de définition de la fonction $x \mapsto f(x)+g(x)$?

Pour se tester

65 Dans chaque cas, donner **la** réponse exacte **sans justifier.**

		A	B	C	D
1	L'image de $\frac{2}{3}$ par $x \mapsto -9x+1{,}2$ est …	$-7{,}2$	$-1{,}8$	$-4{,}8$	$\frac{1{,}6}{3}$
2	La courbe représentant une fonction f dans un repère passe par le point A$(-2\,;6)$. Alors $f(x)$ peut être égal à …	$-2x+3$	x^2+2	$-x^2+2$	$\frac{6}{x}$
3	Un antécédent de $\frac{2}{3}$ par $x \mapsto \frac{1}{x}$ est …	$\frac{3}{2}$	$\frac{2}{3}$	6	$\frac{1}{6}$
4	L'ensemble coloré en rouge est …  3 ℝ	$]-\infty\,;3]$	$[3\,;+\infty[$	$]-\infty\,;3[$	$]3\,;+\infty[$

66 Dans chaque cas, donner **la** ou **les** réponses exactes **sans justifier.**
On se réfère à la courbe représentant la fonction f dans le repère ci-contre.



		A	B	C	D
1	L'ensemble de définition de f est …	$[-2\,;4{,}5]$	$[-6\,;+\infty[$	$[-6\,;4{,}5]$	$[-2\,;+\infty[$
2	Une solution de l'équation $f(x) = 4$ est …	-4	-3	-1	4
3	Sont solutions de l'inéquation $f(x) \geqslant 4$ tous les nombres réels appartenant à …	$[-3\,;-1]$	$[-3\,;+\infty[$	$[3\,;4{,}5]$	$[-2{,}5\,;-1{,}3]$
4	Un ensemble de nombres réels qui ont exactement trois antécédents par f est …	$[1\,;4]$	$]0\,;4{,}5[$	$[-3\,;-1]$	$[-6\,;4{,}5]$

67 Dans chaque cas, donner **la** ou **les** réponses exactes **en justifiant.**

		A	B	C	D
1	Si $x \in]-\infty\,;8[$ ou $x \in [5\,;10]$, alors il est certain que …	$x < 8$	$x \leqslant 10$	$x \in [5\,;8[$	$x \neq 2$
2	Si $x \in [-2\,;5]$ et $x \in [4\,;9]$, alors il est certain que …	$x < 9$	$4 < x < 5$	$5x \in [10\,;30]$	$x = 4$ ou $x = 5$
3	Si $g(x) = 2-x^2$, alors $g(\sqrt{3})$ est égal à …	-1	-7	$2-\sqrt{3}$	$g(-\sqrt{3})$
4	Si l'ensemble des solutions de $f(x) \geqslant 5$ est $[2\,;5]$, alors il est certain que l'ensemble des solutions de $f(x) \geqslant 6$ n'est pas …	$[3\,;6]$	$[2\,;5]$	$[2\,;3]$	ℝ

Vérifiez vos réponses : p. 341

68 Avec un guide

Une entreprise fabrique des poupées. Pour n poupées fabriquées (avec n nombre entier naturel), le coût de production en euros est donné par :

$$C(n) = 0{,}002n^2 + 2n + 4\,000$$

Pour n poupées vendues, la recette, en euros, est donnée par $R(n) = 11n$.

a) Quel est le prix de vente d'une poupée ?

b) Pour n poupées fabriquées et vendues, le bénéfice, en euros, réalisé par cette entreprise est donné par $B(n) = R(n) - C(n)$.

Vérifier que $B(n) = -0{,}002n^2 + 9n - 4\,000$.

c) À l'écran de la calculatrice, tracer la courbe représentative de la fonction $x \mapsto -0{,}002x^2 + 9x - 4\,000$ (*fenêtre :* $0 \leqslant X \leqslant 5\,000$, pas $1\,000$ et $-9\,000 \leqslant Y \leqslant 7\,000$, pas $1\,000$) pour estimer l'intervalle $[n_1\,;n_2]$ sur lequel $B(n) \geqslant 0$.

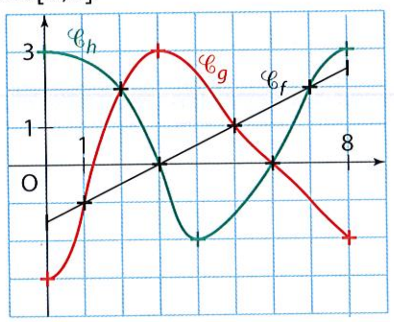
Conseil

Dans un repère, $f(x) \geqslant 0$ sur l'intervalle où la courbe représentative d'une fonction f est au-dessus de l'axe des abscisses.

d) Tabuler la fonction B sur $[0\,;5\,000]$ avec le pas 100 et déterminer les nombres entiers n_1 et n_2.

69 Résoudre un système d'inéquations

Dans ce repère, $\mathscr{C}_f$, $\mathscr{C}_g$, $\mathscr{C}_h$ sont les courbes représentatives des fonctions f, g, h définies sur l'intervalle $[0\,;8]$.



Dans chaque cas, lire graphiquement l'ensemble des solutions.

a) $f(x) \leqslant g(x)$ **b)** $g(x) \leqslant h(x)$

c) $f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$ **d)** $h(x) \leqslant f(x) \leqslant g(x)$

e) $h(x) \leqslant g(x) \leqslant f(x)$ **f)** $f(x) \leqslant h(x) \leqslant g(x)$

70 Travailler en groupe — Confronter des méthodes

On se propose de résoudre l'inéquation :

$$(\mathbf{I}) : x^3 \geqslant 10x^2.$$

On note f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^3 \text{ et } g(x) = 10x^2.$$

a) Selon les groupes :

- certains tracent les courbes représentatives de f et g à l'écran de la calculatrice et lisent graphiquement les solutions de $(\mathbf{I})$;
- d'autres, tabulent les fonctions f et g avec la calculatrice et en déduisent les solutions de $(\mathbf{I})$.

b) Un rapporteur de chaque groupe expose les réponses du groupe.

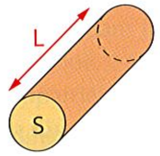
c) Utiliser un logiciel de calcul formel pour résoudre $(\mathbf{I})$. Comparer avec les réponses de **b)**.

71 Étudier une fonction à deux variables

La résistance électrique, en ohms, d'un fil de cuivre est donnée par la fonction R telle que :

$$R(L\,;S) = 0{,}017\frac{L}{S}$$

où L est la longueur du fil, en m, et S est la section du fil, en mm². Recopier et compléter le tableau suivant en calculant les résistances manquantes en ohms (au centième près).



S \ L	40	80	120	160
2,5				
4		0,34		
16				

72 Retrouver une courbe

À partir de la courbe représentative d'une fonction f définie sur $[0\,;8]$, Apolline a écrit ci-dessous l'ensemble des solutions de certaines inéquations.

- $f(x) \geqslant 1$ $S = [0\,;8]$
- $f(x) > 1$ $S =]0\,;8[$
- $f(x) \geqslant 2$ $S = [3\,;6]$
- $f(x) \geqslant 3$ $S = [3{,}5\,;5]$
- $f(x) \geqslant 4$ $S = \{4\}$

Dans un repère, tracer une courbe susceptible de représenter la fonction f.

73 Imaginer une stratégie

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 43x - 42^2$$

Sans calculatrice et sans poser de multiplication, déterminer $f(41)$.

Expliquer le procédé.

74 Narration de recherche — Calculer des images

Rédiger les différentes étapes de la recherche, sans omettre les fausses pistes et les changements de méthode.

Problème f est la fonction $x \mapsto \dfrac{-1}{1+x}$.

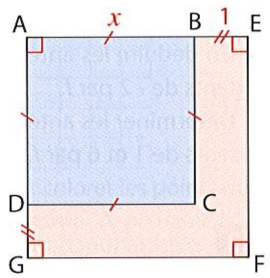
- On part du nombre 4 et on calcule son image par f.
- On part du résultat obtenu et on calcule à son tour son image par f.
- On part du nouveau résultat obtenu et on calcule à son tour son image par f…

On procède ainsi en calculant exactement 2017 images de suite. Quel résultat obtient-on ?

75 Résoudre une inéquation

ABCD est un carré de côté x (avec $x \geqslant 0$). AEFG est le carré obtenu en augmentant de 1 chaque côté de ABCD.

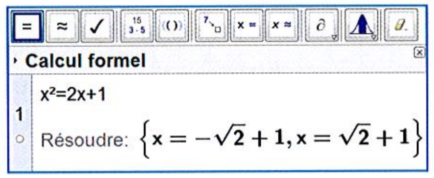
On note $\mathscr{A}(x)$ et $\mathscr{B}(x)$ les aires respectives du carré ABCD et du polygone BCDGFE.



a) Montrer que pour tout $x \geqslant 0$, $\mathscr{B}(x) = 2x + 1$.

b) À l'écran de la calculatrice, afficher les courbes représentatives des fonctions $\mathscr{A}$ et $\mathscr{B}$.

c) Vérifier l'affichage obtenu avec un logiciel de calcul formel.



d) Déduire des question **b)** et **c)** les solutions de l'inéquation $\mathscr{A}(x) \geqslant \mathscr{B}(x)$.

76 What time is it in New York?

The time difference between Paris and New York is six hours: when it's 9 AM in Paris, it is 3 AM in New York. The function f associates to any time t of $[0\,;24]$ in Paris the time $f(t)$ in New York.

Give the formula $f(t)$ for t in : • $[6\,;24]$ • $[0\,;6]$

77 Problème ouvert — Modéliser (1)

Ethan achète une clôture de 20 m de long. Avec la totalité de la clôture il construit dans son jardin un potager rectangulaire d'aire 20,16 m². Quelles sont les dimensions de ce potager ?

78 Problème ouvert — Modéliser (2)

ABC est un triangle isocèle en A et de périmètre 16 cm. De plus, son aire est égale au quart de l'aire d'un carré construit sur sa base [BC].

Quelles sont les longueurs des côtés de ce triangle ?

Des défis

79 Le produit infernal

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{1}{3}\right)\ldots\left(x - \frac{1}{2017}\right)$$

Quelle est l'image de 1 par f ?

80 La fonction infernale

F est une fonction définie sur l'ensemble $\mathbb{N}$ des nombres entiers naturels.

On sait que pour tout nombre entier naturel n,

$$F(n) \in \mathbb{N},\quad F(n) \geqslant n \quad\text{et}\quad F(F(n)) = 3n.$$

Que vaut F(6) ?

Soutien Déterminer l'image d'un nombre par une fonction

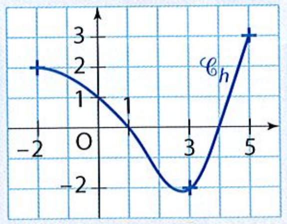
81 Exercice test

Les trois fonctions f, g et h sont définies par :

•

x	−1	3	4
$f(x)$	3	2	−5

•



• $g(x) = 3(7 - x)^2$

Déterminer l'image de 3 par chaque fonction.

Appeler le professeur pour qu'il contrôle vos réponses et qu'il vous indique la suite.

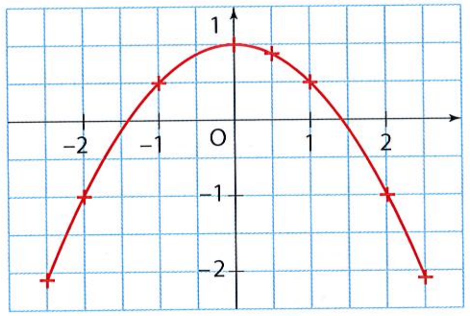
82 f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = -2x + 3{,}5$$

a) Vérifier que $f(3) = -2{,}5$.

b) Calculer $f(-1)$, $f\left(\frac{7}{2}\right)$ et $f(1{,}3)$.

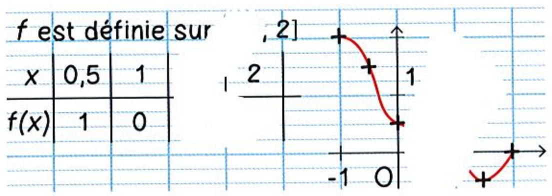
83 f est la fonction définie sur l'intervalle $[-2{,}5\,;2{,}5]$ par la courbe ci-dessous.



Recopier et compléter ce tableau.

x	−2,5	−2	−1	0	1	2
$f(x)$						

84 Tanguy a renversé du correcteur sur son cahier.

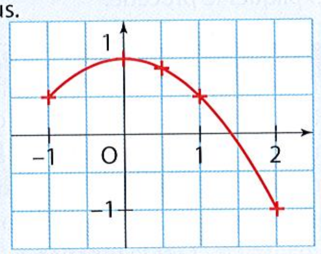


Aider Tanguy à refaire son travail.

Soutien Déterminer des antécédents d'un nombre par une fonction

85 Exercice test

f est la fonction définie sur l'intervalle $[-1\,;2]$ par la courbe ci-dessous.



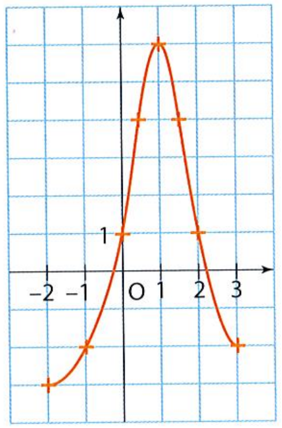
a) Lire les antécédents de 0,5 par f.

b) Combien 0,75 possède-t-il d'antécédents par la fonction f ?

c) Combien −0,5 possède-t-il d'antécédents par la fonction f ?

Appeler le professeur pour qu'il contrôle vos réponses et qu'il vous indique la suite.

86 f est la fonction définie sur $[-2\,;3]$ par la courbe ci-contre.



a) Déterminer les abscisses des points d'ordonnées −2 de la courbe.

b) En déduire les antécédents de −2 par f.

c) Déterminer les antécédents de 1 et 6 par f.

87 g est la fonction définie sur $[0{,}5\,;10]$ par :

$$g(x) = \frac{x+1}{x}$$

a) Tracer à l'écran de la calculatrice la courbe représentative de la fonction g.

b) En lisant sur l'écran de sa calculatrice, Corentin affirme : « 0,8 est la solution de l'équation $g(x) = 2{,}3$ ». A-t-il raison ? Expliquer.

88 h est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$h(x) = \frac{x}{2} + x^2$$

a) Vérifier que 3 est un antécédent de 10,5 par h.

b) Déterminer un antécédent de 0 par h.

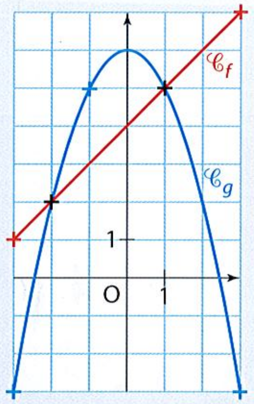
c) Tracer la courbe représentative de la fonction h à l'écran de la calculatrice.

d) 0 a-t-il un autre antécédent par h ?

Soutien Résoudre graphiquement $f(x) > k$, $f(x) > g(x)$

89 Exercice test

Les fonctions f et g sont représentées dans le repère ci-contre par les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.



a) Lire l'ensemble de définition des fonctions f et g.

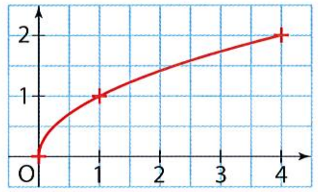
b) Résoudre graphiquement l'inéquation $g(x) < 5$.

c) Résoudre l'inéquation $f(x) \leqslant g(x)$.

d) En déduire l'intervalle sur lequel la courbe $\mathscr{C}_f$ est au-dessous de la courbe $\mathscr{C}_g$.

Appeler le professeur pour qu'il contrôle vos réponses et qu'il vous indique la suite.

90 f est la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;4]$ par la courbe dans le repère ci-dessous.



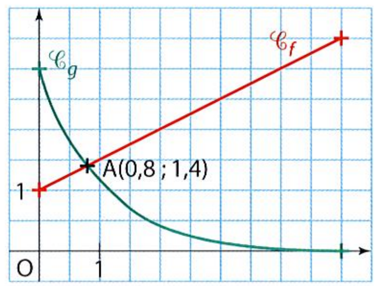
a) Reproduire ce graphique et colorer les points de la courbe dont l'ordonnée est supérieure ou égale à 1.

b) Hachurer sur l'axe des abscisses, les abscisses de tous les points colorés à la question **a)**.

c) En déduire l'ensemble des solutions de $f(x) > 1$.

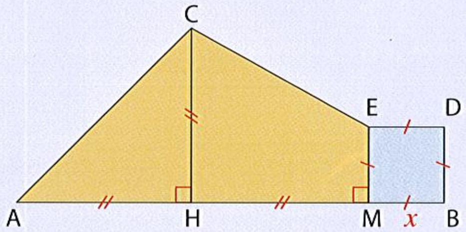
91 $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ sont les courbes représentatives des fonctions f et g définies sur l'intervalle $[0\,;5]$.

Lire sur ce graphique les solutions de l'inéquation $f(x) \geqslant g(x)$.



Approfondissement Modéliser avec une fonction

92 [AB] est un segment de longueur 8 cm.
M est un point variable de ce segment et H est le milieu du segment [AM].
C est un point tel que le triangle AHC est rectangle isocèle en H.
D et E sont des points du même côté que C par rapport à (AB) tels que BMED est un carré.



On note x la longueur MB en cm.

1. a) Préciser à quel intervalle appartient x.

b) Exprimer en fonction de x les aires du carré BMED et du quadrilatère AMEC.

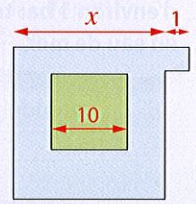
2. On se propose de déterminer la position du point M pour que l'aire du carré BMED soit le double de l'aire du quadrilatère AMEC.

a) Traduire ce problème par une équation.

b) À l'écran de la calculatrice, tracer les courbes représentatives de $x \mapsto x^2$ et $x \mapsto 32 - 4x$.

c) Lire graphiquement la réponse au problème, puis vérifier par le calcul.

93 Un paysagiste établit un projet de bassin composé d'un carré de 1 m de côté accolé à un carré de x mètres de côté, dans lequel se trouve un îlot carré de 10 m de côté.



a) Expliquer pourquoi $x \geqslant 10$.

b) Pour cette situation, quelle est la signification de l'affichage ci-dessous ?