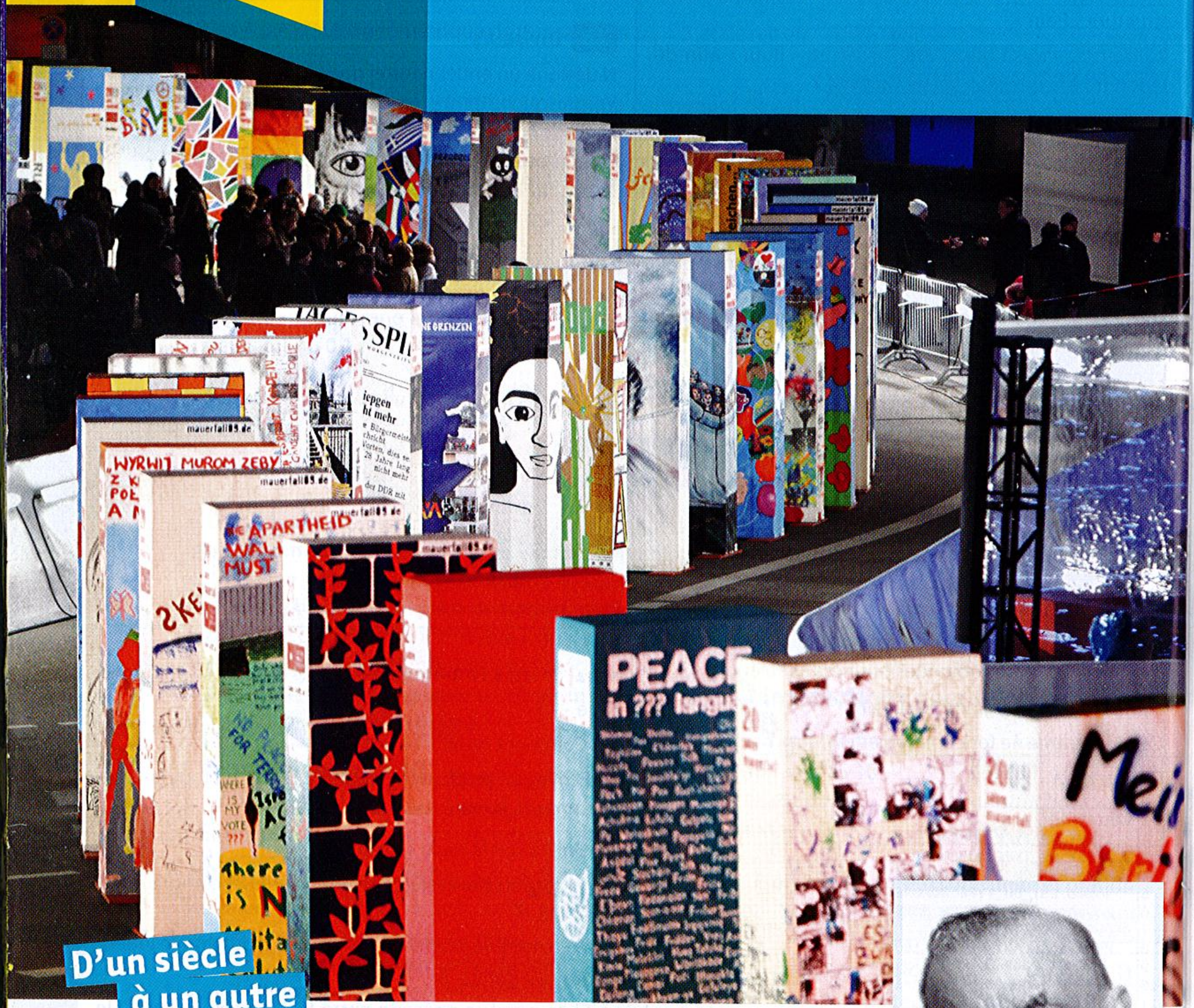
CHAPITRE

1 Suites



D'un siècle à un autre

La chute en cascade de ces dominos géants symbolise la chute du mur de Berlin (lors du 20e anniversaire de cet événement). Le premier domino va entraîner le deuxième, qui entraînera le troisième… Et tous les dominos finiront par tomber. Comme vous le verrez dans ce chapitre, le raisonnement par récurrence procède de la même idée.

Il semble que la première utilisation explicite de ce raisonnement se trouve chez Pascal, dans son *Traité du triangle arithmétique* (1654). Mais ce sont Dedekind et Peano qui l'ont rigoureusement formalisé au XIXe siècle.

En savoir plus sur **Giuseppe Peano**

→ **Chercheurs d'hier, p. 37**

Rappels & Exercices-tests

Compléments numériques

Suites arithmétiques

- Dire qu'une suite (u_n) est **arithmétique** signifie qu'il existe un nombre r, appelé la **raison,** tel que, pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = u_n + r.$$

- (u_n) étant une suite arithmétique, pour tous entiers naturels m et p, $u_m = u_p + (m-p)r$.

En particulier, si le premier terme est u_0, alors pour tout entier naturel n, $u_n = u_0 + nr$.

- La somme des entiers de 1 à n s'exprime par :

$$\sum_{k=1}^{n} k = 1+2+3+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Suites géométriques

- Dire qu'une suite (u_n) est **géométrique** signifie qu'il existe un nombre q non nul, appelé la **raison**, tel que, pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = q \times u_n.$$

- (u_n) étant une suite géométrique, pour tous entiers naturels m et p, $u_m = q^{m-p} \times u_p$.

En particulier, si le premier terme est u_0, pour tout entier naturel n, $u_n = q^n \times u_0$.

- La somme des puissances successives d'un nombre q **différent de 1** s'exprime par :

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = 1+q+q^2+\ldots+q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}.$$

Sens de variation d'une suite

- (u_n) est **croissante** signifie que : pour tout entier naturel n, $u_n \leqslant u_{n+1}$.
- (u_n) est **décroissante** signifie que : pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant u_{n+1}$.
- (u_n) est **constante** signifie que : pour tout entier naturel n, $u_n = u_{n+1}$.
- Pour étudier le sens de variation d'une suite (u_n), on peut :
  – déterminer le signe de la différence $u_{n+1} - u_n$;
  – comparer $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ et 1 dans le cas où tous les termes u_n sont **strictement positifs** ;
  – étudier les variations de la fonction f lorsque la suite (u_n) est définie par $u_n = f(n)$, puisque f et (u_n) varient dans le même sens.

1 Vrai ou faux

Les suites sont définies pour tout entier naturel n.

a) La suite (u_n) définie par $u_n = 5 + 7n$ est arithmétique.
b) La suite (u_n) définie par $u_n = 1 + n^2$ est arithmétique.
c) La suite (u_n) définie par $u_n = 2n$ est géométrique.
d) Si u_n, u_{n+1} et u_{n+2} sont trois termes consécutifs d'une suite arithmétique, alors $u_n + u_{n+2} = 2u_{n+1}$.

2 QCM

Pour chaque affirmation, une seule réponse est exacte. Identifiez-la en justifiant votre choix.

1. La suite (u_n) définie pour tout entier naturel n non nul par $u_n = \frac{2n+1}{n}$ est :
a) arithmétique **b)** géométrique
c) ni arithmétique, ni géométrique

2. La suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_{n+1} = u_n + \frac{2}{3}u_n$ est :
a) arithmétique **b)** géométrique
c) ni arithmétique, ni géométrique

3 Vrai ou faux

a) La suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = 2n - 3$ est croissante.
b) La suite (u_n) définie pour tout entier naturel n non nul par $u_n = 1 - \frac{1}{n}$ est strictement croissante.
c) Si une suite est strictement croissante, alors ses termes finissent par dépasser n'importe quel nombre choisi.
d) Si f est une fonction croissante sur $\mathbb{R}^+$, alors la suite définie par $u_n = f(n)$ est croissante.

4 QCM

Pour chaque affirmation, une seule réponse est exacte. Identifiez-la en justifiant votre choix.

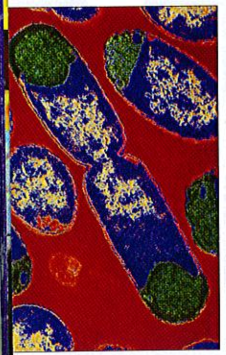
1. La suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = \frac{3n-5}{7}$ est :
a) croissante **b)** décroissante **c)** non monotone

2. La suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et pour tout naturel n, $u_{n+1} = -2u_n + 5$ est :
a) croissante **b)** décroissante **c)** non monotone

3. (u_n) est la suite définie pour tout entier naturel n par $u_n = n^3 - n^2 + n$. La suite (u_n) est :
a) croissante **b)** décroissante **c)** non monotone

Corrigés sur www.transmathlycee.net/eleve-TermS

Activité 1 PROLIFÉRATION BACTÉRIENNE



La multiplication des bactéries comprend deux phases : une phase de croissance et une phase de division, chaque bactérie donnant naissance à deux bactéries, qui à leur tour donneront chacune deux bactéries, etc.

Dans le cas de la bactérie *Escherichia Coli*, la population double approximativement toutes les 20 minutes dans des conditions optimales de croissance. Pour modéliser le phénomène, on considère qu'elle double exactement toutes les 20 minutes.

On note u_n le nombre de bactéries *Escherichia Coli* obtenues (théoriquement) à l'issue de n périodes de 20 minutes, avec $u_0 = 1$ (il existe une unique bactérie au départ).

1 Exprimez u_n en fonction de n et précisez la nature de la suite (u_n).

2 Estimez la population de bactéries obtenues en 4 heures.

3 Au bout de combien de temps la population bactérienne dépassera-t-elle la population de Tokyo (38 000 000 d'habitants), la ville la plus peuplée du monde (2011) ?

4 On assimile la Terre à une sphère de rayon R = 6 370 km. Le volume d'une bactérie étant d'environ 1 µm^3, en combien de temps le volume de la Terre serait-il, en théorie, atteint par la descendance d'une seule bactérie ? Commentez ce résultat.

Activité 2 EXODE RURAL

On imagine un pays dont la population reste constante et égale à 10 millions d'habitants.

Des relevés annuels et une hypothèse de stabilité dans l'évolution permettent de considérer que chaque année, 10 % de la population rurale émigre vers les zones urbaines alors que 5 % de la population urbaine émigre vers les zones rurales.

Au début de l'étude (année 0), la répartition est : 6 millions de ruraux et 4 millions de citadins.

L'objectif de cette activité est de prévoir l'évolution de cette répartition et, en particulier, de savoir si, sous ces hypothèses, on peut prévoir une désertification totale des zones rurales.

On note r_n la population, en millions d'habitants, des zones rurales et u_n celle des zones urbaines à l'année n.

1 Prouvez que : pour tout entier naturel n, $\begin{cases} r_{n+1} = 0{,}9r_n + 0{,}05u_n \\ u_{n+1} = 0{,}95u_n + 0{,}1r_n \end{cases}$

2 **a)** Quelle hypothèse vous permet d'affirmer que pour tout entier naturel n, $u_n = 10 - r_n$?

b) Déduisez-en que pour tout entier naturel n, $r_{n+1} = 0{,}85r_n + 0{,}5$.

3 **a)** Dans un même repère, tracez la droite d d'équation $y = x$ et la droite Δ représentative de la fonction affine f définie par $f(x) = 0{,}85x + 0{,}5$.

b) Placez r_0 sur l'axe des abscisses, puis son image r_1 par la fonction f sur l'axe des ordonnées. Utilisez la droite d pour placer r_1 sur l'axe des abscisses.

Réitérez le procédé pour placer r_2, r_3, …

4 Quelle conjecture pouvez-vous alors émettre concernant :

a) le comportement des suites (r_n) et (u_n) ?

b) la désertification éventuelle des zones rurales ?

5 Utilisez votre calculatrice pour calculer r_{30} et u_{30}.

Modifiez la répartition initiale ($r_0 = 6$ et $u_0 = 4$). Que constatez-vous ?

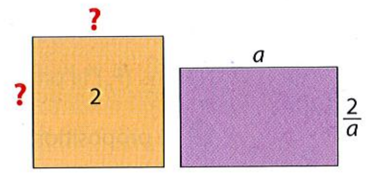
Activité 3 LA MÉTHODE DE HÉRON

Les savants de l'Antiquité ont cherché des procédés pour calculer les racines carrées. Voici une méthode attribuée à Héron d'Alexandrie (Ier siècle de notre ère) pour calculer des valeurs approchées de $\sqrt{2}$.

1 **Mise en situation**

On considère un carré d'aire 2 et un rectangle de même aire, de dimensions a et $\frac{2}{a}$ $\left(\text{avec } a \text{ rationnel, } a > 0 \text{ et } a \neq \frac{2}{a}\right)$.

Jn nombre ationnel est e quotient $\frac{p}{q}$ de deux nombres entiers ($q \neq 0$).



a) Expliquez pourquoi le nombre $\sqrt{2}$ ne peut pas être strictement supérieur, à la fois, à a et à $\frac{2}{a}$.

Peut-il être strictement inférieur à a et $\frac{2}{a}$? Que pouvez-vous en conclure ?

b) Il semble qu'en considérant la moyenne arithmétique de a et $\frac{2}{a}$, on puisse obtenir une approximation du nombre $\sqrt{2}$. Notons b cette valeur : $b = \frac{1}{2}\left(a + \frac{2}{a}\right)$.

Démontrez que le nombre $\frac{2}{b}$ appartient, comme b, à l'intervalle ouvert d'extrémités a et $\frac{2}{a}$.

Aide Vous distinguerez les deux cas $a < \frac{2}{a}$ et $a > \frac{2}{a}$.

c) Expliquez pourquoi b et $\frac{2}{b}$ fournissent un encadrement plus fin de $\sqrt{2}$ que a et $\frac{2}{a}$.

On conçoit donc qu'en itérant ce processus, on obtient **une suite de nombres rationnels qui permet d'approcher $\sqrt{2}$.**

2 **Calcul des premiers termes**

On considère donc la suite (u_n) définie par : $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{2}{u_n}\right)$.

On admet que tous les termes de la suite sont non nuls.

a) Calculez successivement les valeurs exactes des nombres u_0, $\frac{2}{u_0}$, u_1, $\frac{2}{u_1}$ et u_2.

Placez-les sur un axe gradué.

b) Calculez u_3 et u_4. (Donnez une valeur approchée à 10^{-6} près.) Que pouvez-vous en conclure ?

3 **Approche graphique**

On considère les fonctions $x \longmapsto x$ et $x \longmapsto \frac{1}{2}\left(x + \frac{2}{x}\right)$ pour x appartenant à $]0\,;2]$.

a) Déterminez les coordonnées $(x_0\,;y_0)$ du point d'intersection de leurs courbes représentatives.

b) Utilisez votre calculatrice pour obtenir une représentation des premiers termes de la suite (u_n) et conjecturez son comportement.

Aide Avec Casio, utiliser le mode RECUR.
Avec TI, utiliser le mode SUITE.
Voir les instructions sur les rabats de la couverture.

Problèmes ouverts — Refaites ces exercices après le chapitre … Sont-ils plus faciles ?

1 Quel est le reste de la division euclidienne par 8 de 3^{14} ? de 3^{15} ? de 3^{2012} ?

2 Quel est le nombre entier le plus proche de la somme $\frac{1}{1\times 2} + \frac{1}{2\times 3} + \frac{1}{3\times 4} + \ldots + \frac{1}{2\,012\times 2\,013}$?

1 Raisonnement par récurrence

1.1 Un nouveau type de raisonnement

En classe de Première, certains résultats ont été admis sans démonstration.
C'est le cas, par exemple, de la propriété :
pour tout entier naturel n, la somme des entiers de 1 à n s'exprime par $1+2+\ldots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$.

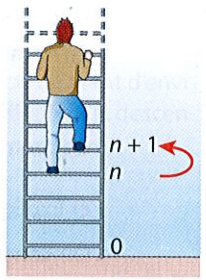
Notons (P_n) la proposition : $1+2+\ldots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$.

▶ La proposition (P_1) est vraie car $1=\dfrac{1(1+1)}{2}$. De même, (P_2) est vraie car $1+2=\dfrac{2(2+1)}{2}$.

On peut encore vérifier, par exemple, que (P_3) et (P_4) sont vraies.

Mais ceci ne démontre pas que (P_n) est vraie quel que soit n, puisque nous ne pouvons pas effectuer une infinité de vérifications.

▶ Le raisonnement qui va nous permettre de conclure peut être imagé ainsi :
Si l'on peut se placer sur un barreau d'une échelle, **et**
si l'on peut ensuite passer d'un barreau quelconque au suivant,
alors on peut gravir tous les barreaux, à partir du barreau initial.



▶ Dans notre exemple, la première étape est vérifiée : la proposition (P_1) est vraie.

On conçoit et on admet que si l'on sait démontrer que « (P_n) vraie » entraîne « (P_{n+1}) vraie », alors la proposition est vraie pour tout n entier naturel (non nul).

Supposons donc (P_n) vraie, c'est-à-dire : $1+2+\ldots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$.

Nous devons en déduire (P_{n+1}) : $1+2+\ldots+n+(n+1)=\dfrac{(n+1)(n+2)}{2}$.

$$\underbrace{1+2+\ldots+n}_{=\frac{n(n+1)}{2} \text{ d'après } (P_n)}+(n+1)=\frac{n(n+1)}{2}+(n+1)=(n+1)\left(\frac{n}{2}+1\right)=\frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

Ainsi, (P_{n+1}) est vraie. On peut donc conclure que la proposition est vraie pour tout entier naturel n (non nul). Ce raisonnement est appelé **raisonnement par récurrence**.

1.2 Principe du raisonnement par récurrence

Pour **démontrer par récurrence** qu'une proposition (P_n) est vraie pour tout entier naturel n supérieur ou égal à un entier naturel n_0 fixé, on procède en trois étapes.

- **Première étape :** on vérifie que (P_{n_0}) est vraie, c'est-à-dire que la proposition est vraie pour le premier indice n_0. On dit qu'on a **initialisé** la récurrence. ▶ **Initialisation**
- **Deuxième étape :** on suppose que pour un entier n quelconque $(n \geqslant n_0)$, la proposition (P_n) est vraie, et sous cette hypothèse – dite de **récurrence** – on démontre que la proposition (P_{n+1}) est vraie. ▶ **Hérédité**

On a ainsi prouvé que l'hypothèse de récurrence « (P_n) vraie » est **héréditaire**.

- **Troisième étape :** lorsque les deux étapes ont été réalisées, on conclut que la proposition (P_n) est vraie pour tout entier naturel n $(n \geqslant n_0)$. ▶ **Conclusion**

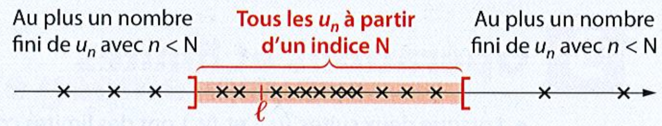
2 Limite d'une suite

2.1 Limite finie

Définition 1 — Dire qu'une suite (u_n) a pour **limite un nombre réel** ℓ signifie que tout intervalle ouvert contenant ℓ contient tous les termes de la suite **à partir d'un certain indice (ou rang).**

On écrit $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=\ell$.

Animation



Cette définition traduit l'accumulation des termes u_n autour de ℓ.
On dit que la suite (u_n) est **convergente de limite** ℓ ou qu'elle converge vers ℓ.

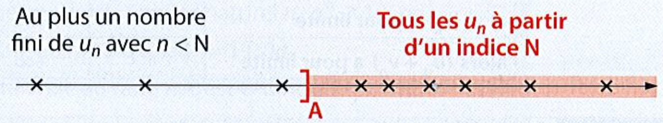
▶ **Remarque.** Lorsqu'elle existe, la limite ℓ est **unique**. → *Exercice 101, page 48*

▶ **Suites de référence.** Les suites définies pour tout entier naturel n non nul par $u_n=\dfrac{1}{n}$, $v_n=\dfrac{1}{n^2}$, $w_n=\dfrac{1}{n^3}$, $t_n=\dfrac{1}{\sqrt{n}}$ ont pour limite 0.

2.2 Limite infinie

Définition 2 — Dire qu'une suite (u_n) a pour **limite** $+\infty$ signifie que tout intervalle ouvert de la forme $]A\,;+\infty[$ contient tous les termes de la suite (u_n) **à partir d'un certain indice.**

On écrit $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=+\infty$.



Cette définition traduit l'idée que les termes u_n arrivent à dépasser tout nombre A, aussi grand soit-il.

▶ **Limite $-\infty$.** De même, l'écriture $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=-\infty$ signifie que tout intervalle ouvert de la forme $]-\infty\,;A[$ contient tous les termes de la suite (u_n) à partir d'un certain indice.

▶ **Suites de référence.** Les suites définies sur $\mathbb{N}$ par $u_n=n$, $v_n=n^2$, $w_n=n^3$, $t_n=\sqrt{n}$ ont pour limite $+\infty$.

2.3 Limites et comparaison

Théorème 1 — (u_n) et (v_n) sont deux suites. Si pour tout entier naturel n supérieur à un certain entier naturel n_0,

- $u_n \leqslant v_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=+\infty$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n=+\infty$;
- $u_n \leqslant v_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n=-\infty$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=-\infty$.

ROC
→ Exercice 93 « Le jour du BAC ».

Animation

Démonstration exigible. • Il s'agit de prouver que tout intervalle de la forme $]A\,;+\infty[$ contient tous les termes de la suite (v_n) à partir d'un certain indice. Soit A un nombre quelconque.
$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=+\infty$ donc, par définition, l'intervalle $]A\,;+\infty[$ contient tous les termes u_n à partir d'un certain indice. Notons p cet indice.

On sait aussi qu'à partir de l'indice n_0, $u_n \leqslant v_n$. Notons alors N le plus grand des deux entiers n_0 et p.
À partir de l'indice N, l'intervalle $]A\,;+\infty[$ contient tous les termes u_n et donc *a fortiori* tous les termes v_n. Ceci étant vrai quel que soit A, on a bien : $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n=+\infty$.

• De même, on prouve que :
si pour tout entier $n \geqslant n_0$, $u_n \leqslant v_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n=-\infty$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=-\infty$.

Théorème 2 (admis)

Animation

Théorème d'encadrement (dit « des gendarmes »)

(u_n), (v_n) et (w_n) sont trois suites.

Si pour tout entier naturel n supérieur à un certain entier naturel n_0, $v_n \leqslant u_n \leqslant w_n$ et si les suites (v_n) et (w_n) convergent **vers la même limite** ℓ, alors la suite (u_n) converge vers ℓ.

3 Opérations et limites

- Lorsque deux suites (u_n) et (v_n) ont des limites connues, on peut en général en déduire la limite de la suite **somme** $(u_n + v_n)$, de la suite **produit** $(u_n \times v_n)$ et de la suite **quotient** $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$.
- Ces règles opératoires, intuitivement évidentes, sont rassemblées dans les tableaux qui suivent.
- Une case contenant un point d'interrogation correspond à un cas où il n'y a pas de conclusion en général ; on dit alors que c'est un cas de forme indéterminée.

3.1 Théorèmes (admis)

Théorème 3

Limite d'une somme

Si (u_n) a pour limite	ℓ	ℓ ou $+\infty$	ℓ ou $-\infty$	$+\infty$
et si (v_n) a pour limite	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
alors $(u_n + v_n)$ a pour limite	$\ell + \ell'$	$+\infty$	$-\infty$	?

Les rôles de (u_n) et (v_n) peuvent être échangés.

Théorème 4

Limite d'un produit

Si (u_n) a pour limite	ℓ	$\ell \neq 0$	∞	0
et si (v_n) a pour limite	ℓ'	∞	∞	∞
alors $(u_n \times v_n)$ a pour limite	$\ell\ell'$	∞	∞	?

Les rôles de (u_n) et (v_n) peuvent être échangés.

Théorème 5

Limite d'un quotient $\frac{u_n}{v_n}$ lorsque $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n \neq 0$

Si (u_n) a pour limite	ℓ	ℓ	∞	$\pm\infty$
et si (v_n) a pour limite	$\ell' \neq 0$	∞	$\ell' \neq 0$	$\pm\infty$
alors $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ a pour limite	$\frac{\ell}{\ell'}$	0	∞	?

Théorème 6

Limite d'un quotient $\frac{u_n}{v_n}$ lorsque $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$

Si (u_n) a pour limite	$\ell \neq 0$ ou ∞	0
et si (v_n) a pour limite	0 en gardant un signe constant à partir d'un certain rang	0
alors $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ a pour limite	∞	?

On détermine le signe de la limite éventuelle d'un produit ou d'un quotient, en utilisant la règle des signes.

3.2 Formes indéterminées

Les cas de formes indéterminées **nécessitent une étude particulière** chaque fois qu'ils se présentent. Pour les mémoriser, on les note « $\infty - \infty$ » ; « $0 \times \infty$ » ; « $\frac{\infty}{\infty}$ » ; « $\frac{0}{0}$ », mais **ces écritures ne doivent jamais être utilisées dans une rédaction.**

4 Limite d'une suite géométrique

(u_n) est une suite géométrique de raison q non nulle. Pour tout entier naturel n, $u_n = u_0 \times q^n$.

D'après les théorèmes sur les opérations et les limites, pour déterminer le comportement de la suite (u_n) à l'infini, il suffit de connaître celui de la suite (v_n) définie par $v_n = q^n$.

Théorème 7

q désigne un nombre. Si $q > 1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = +\infty$.

ROC
→ Exercice 94 « Le jour du BAC ».

Animation

Démonstration exigible.

Le nombre q étant strictement supérieur à 1, notons a le réel strictement positif tel que $q = 1 + a$.

Le calcul des premiers termes de la suite : $q^0 = 1$, $q^1 = 1 + a$, $q^2 = 1 + 2a + a^2$, $q^3 = 1 + 3a + 3a^2 + a^3$, nous invite à comparer q^n et $1 + na$.

- Démontrons par récurrence que : pour tout entier naturel n, $q^n \geqslant 1 + na$.

– Initialisation : la propriété est vraie au rang 0 car $q^0 = 1 + 0a$.

– Hérédité : supposons la propriété vraie au rang n, c'est-à-dire $q^n \geqslant 1 + na$.

Comparons alors q^{n+1} et $1 + (n+1)a$.

Comme $q^n \geqslant 1 + na$ et $q > 0$, on a $q^n \times q \geqslant (1 + na) \times q$ soit $q^{n+1} \geqslant (1 + na)(1 + a)$,

soit $q^{n+1} \geqslant 1 + (n+1)a + na^2$ et donc $q^{n+1} \geqslant 1 + (n+1)a$ car $na^2 \geqslant 0$.

La propriété est vraie au rang $n + 1$.

– Conclusion : pour tout entier naturel n, $q^n \geqslant 1 + na$.

- a est strictement positif donc $\lim\limits_{n\to+\infty} (na) = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} (1 + na) = +\infty$.

Nous sommes dans les conditions d'utilisation du théorème 1 : on en déduit $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = +\infty$.

Conséquence

Si $-1 < q < 1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$.

La démonstration de ce résultat est donnée en exercice. → *Exercice 100, page 48.*

Remarque

Si $q \leqslant -1$, alors la suite (q^n) n'a pas de limite et si $q = 1$, la suite (q^n) est constante (de limite 1).

Exemples

- La suite géométrique de terme général $u_n = 5(\sqrt{2})^n$ a pour raison $q = \sqrt{2}$.

Puisque $q > 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

- La suite géométrique de terme général $v_n = 3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$ a pour raison $q = \frac{1}{2}$.

Puisque $-1 < q < 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$.

- La suite géométrique de terme général $w_n = (-2)^n$, dont les premiers termes sont $1, -2, 4, -8, 16, -32, \ldots$ n'a pas de limite.

5 Convergence des suites monotones

Définition 3

- Dire qu'une suite (u_n) est **majorée** signifie qu'il existe un nombre M tel que, pour tout entier naturel n, $u_n \leqslant M$. Un tel nombre M est appelé un **majorant** de la suite (u_n).
- Dire qu'une suite (u_n) est **minorée** signifie qu'il existe un nombre m tel que, pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant m$. Un tel nombre m est appelé un **minorant** de la suite (u_n).
- Une suite à la fois minorée et majorée est dite **bornée**.

Exemples

- $u_n = 3 - \sqrt{n}$. Pour tout entier naturel n, $u_n \leqslant 3$, donc la suite (u_n) est majorée par 3.

Elle est aussi majorée par tout nombre supérieur à 3…

- $u_n = \frac{1}{n}$. La suite (u_n) est bornée car, pour tout entier naturel non nul n, $0 \leqslant \frac{1}{n} \leqslant 1$.

Théorème 8 (admis)

1. Toute suite croissante majorée est convergente.
2. Toute suite décroissante minorée est convergente.

Remarques

- Le théorème 7 affirme la convergence mais ne précise pas le nombre ℓ limite de la suite.
- Pour une suite croissante, si M est un majorant, on peut seulement affirmer que $\ell \leqslant M$.

Théorème 9

1. Toute suite croissante non majorée a pour limite $+\infty$.
2. Toute suite décroissante non minorée a pour limite $-\infty$.

LOGIQUE
Négation d'une proposition
→ p. 465

Démonstration

1. Soit (u_n) une suite croissante non majorée. Par négation de la définition d'une suite majorée, quel que soit le nombre A, il existe un indice N tel que $u_N > A$.

La suite étant croissante, il en résulte que tous les termes de la suite d'indice supérieur à N sont supérieurs à A. Quel que soit le nombre A, l'intervalle $]A\,;+\infty[$ contient donc tous les termes de la suite à partir d'un certain indice (l'indice N) : la suite (u_n) a pour limite $+\infty$.

2. De façon analogue, on démontre la partie 2.

Théorème 10

1. Si une suite (u_n) est croissante et admet pour limite ℓ, alors pour tout entier naturel n, $u_n \leqslant \ell$.
2. Si une suite (u_n) est décroissante et admet pour limite ℓ, alors pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant \ell$.

RAISONNER
Raisonnement par l'absurde
→ p. 468

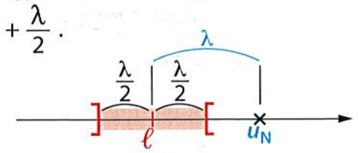
Démonstration. • Raisonnons par l'absurde.

Supposons qu'il existe un terme de la suite noté u_N tel que $u_N > \ell$.

Notons λ la distance (non nulle) $u_N - \ell$. Par construction, $u_N > \ell + \frac{\lambda}{2}$.

La suite (u_n) est croissante, donc pour tout entier naturel $n \geqslant N$,

$u_n > \ell + \frac{\lambda}{2}$ et u_n est à l'extérieur de l'intervalle ouvert $\left]\ell - \frac{\lambda}{2}\,;\ell + \frac{\lambda}{2}\right[$.



Cet intervalle ne contient donc qu'un nombre fini de termes de la suite (au plus N).

Donc le nombre ℓ ne peut pas être la limite de la suite (u_n) (*cf.* définition 1 p. 25).

Ainsi, pour tout entier naturel n, $u_n \leqslant \ell$.

- La démonstration dans le cas où (u_n) est décroissante est analogue.

OBJECTIF 1 Mener un raisonnement par récurrence

- Pour démontrer qu'une proposition (P_n) est vraie pour tout entier naturel n $(n \geqslant n_0)$:

– Première étape : on vérifie que (P_{n_0}) est vraie (initialisation) ;
– Deuxième étape : on suppose que (P_n) est vraie et on démontre que, sous cette hypothèse de récurrence, (P_{n+1}) est vraie (hérédité).
– Troisième étape : on conclut.

EXERCICE RÉSOLU A Démontrer une égalité

Démontrez que pour tout entier naturel n non nul, $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Méthode

- On commence par expliciter la proposition (P_n).
- On **initialise** le processus en vérifiant que la proposition (P_n) est vraie pour le premier indice n, ici égal à 1.
- On vérifie l'**hérédité** : on suppose « (P_n) vraie », et on démontre que cela entraîne « (P_{n+1}) vraie », c'est-à-dire que :

$$1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 + (n+1)^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}.$$

Rappel
Si x_1 et x_2 sont les racines du trinôme $ax^2 + bx + c$, alors ce trinôme se factorise sous la forme $a(x - x_1)(x - x_2)$.

- On **conclut**.

Solution

- Notons (P_n) la proposition : $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Démontrons (P_n) par récurrence.

- Démontrons que (P_1) est vraie.

$\frac{1(1+1)(2+1)}{6} = \frac{6}{6} = 1 = 1^2$, donc (P_1) est vraie.

- Supposons que (P_n) est vraie.

$$1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 = (n+1)\left[\frac{n(2n+1)}{6} + (n+1)\right] = (n+1) \times \frac{2n^2 + 7n + 6}{6}.$$

Le trinôme $2x^2 + 7x + 6$ a deux racines -2 et $-\frac{3}{2}$, d'où sa factorisation : $(x+2)(2x+3)$. Il en résulte :

$$1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 + (n+1)^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}.$$

La propriété (P_{n+1}) est vraie.

- Donc la proposition (P_n) est vraie pour tout entier naturel n non nul.

Mise en pratique

1 **1.** Démontrez que pour tout entier $n \geqslant 1$,
$$1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$
2. Déduisez-en une relation entre la somme des cubes et la somme des entiers de 1 à n.

2 **1.** Démontrez que pour tout entier $n \geqslant 1$,
$$1 \times 2 + 2 \times 3 + \ldots + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}.$$

Pour les exercices 3 et 4
On utilise la notation suivante, pour $n \in \mathbb{N}^*$:
$n\,! = 1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times n$. On lit « factorielle n ».

3 Démontrez que pour tout entier $n \geqslant 1$,
$$1 + (2 \times 2\,!) + (3 \times 3\,!) + \ldots + (n \times n\,!) = (n+1)\,! - 1.$$

4 Démontrez que pour tout entier $n \geqslant 1$,
$$n\,! \geqslant 2^{n-1}.$$

EXERCICE RÉSOLU B Démontrer des propriétés d'une suite

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 1}$.
Prouvez par récurrence que tous les termes de la suite (u_n) sont strictement positifs et que la suite est croissante.

Méthode

- On traduit les deux propriétés à démontrer par une double inégalité.
- On **initialise** le processus, en vérifiant que la proposition (P_n) est vraie pour le premier indice n, ici égal à 0.
- On vérifie l'**hérédité** : on suppose « (P_n) vraie », et on démontre que cela entraîne « (P_{n+1}) vraie », c'est-à-dire $0 < u_{n+1} \leqslant u_{n+2}$.
- On **conclut**.

Solution

- Il s'agit de démontrer que : pour tout entier naturel n, $0 < u_n \leqslant u_{n+1}$.
Notons (P_n) la proposition : $0 < u_n \leqslant u_{n+1}$.
- Démontrons que (P_0) est vraie.
$u_0 = 1$ et $u_1 = \sqrt{u_0 + 1} = \sqrt{2}$.
$0 < u_0 \leqslant u_1$, donc (P_0) est vraie.
- On suppose « (P_n) vraie » : $0 < u_n \leqslant u_{n+1}$ donc $1 < u_n + 1 \leqslant u_{n+1} + 1$.
La fonction *racine carrée* étant strictement croissante sur $[0\,;+\infty[$, on obtient :
$$\sqrt{1} < \sqrt{u_n + 1} \leqslant \sqrt{u_{n+1} + 1}$$
soit $1 < u_{n+1} \leqslant u_{n+2}$.
La propriété (P_{n+1}) est vraie.
- La proposition (P_n) est donc vraie pour tout entier naturel n : la suite (u_n) est croissante et à termes strictement positifs.

Mise en pratique

5 On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n,
$$u_{n+1} = u_n + 2n + 1.$$
Démontrez par récurrence que pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant n^2$.

6 On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et pour tout entier naturel n,
$$u_{n+1} = u_n^2 + 1.$$
Démontrez par récurrence que pour tout entier naturel $n \geqslant 4$, $u_n \geqslant 2^n$.

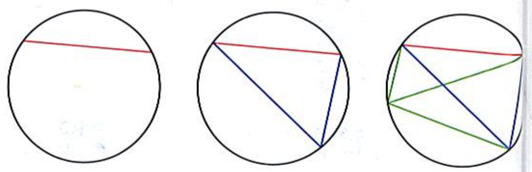
7 On considère la suite (u_n) de l'exercice résolu B définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n,
$$u_{n+1} = \sqrt{u_n + 1}.$$
Démontrez par récurrence que pour tout entier naturel n, $0 < u_n < 2$.

8 On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et pour tout entier naturel n,
$$u_{n+1} = \sqrt{u_n + 5}.$$
Démontrez par récurrence, que pour tout entier naturel n, $2 \leqslant u_n < 3$.

9 On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = \frac{1}{2}$ et pour tout entier naturel n,
$$u_{n+1} = u_n^2 - u_n + 1.$$
Démontrez par récurrence, que pour tout entier naturel n, $\frac{1}{2} \leqslant u_n < 1$.

Aide
Vous pouvez utiliser les variations de la fonction f telle que $u_{n+1} = f(u_n)$.

10 On place n points distincts $(n \geqslant 2)$ sur un cercle et on note S_n le nombre total de segments que l'on peut tracer ayant pour extrémités deux de ces points.



1. Déterminez S_2, S_3, S_4 et S_5.
2. Conjecturez l'expression de S_n en fonction de n.
3. Démontrez par récurrence votre conjecture.

OBJECTIF 2 Étudier le comportement d'une suite à l'infini

Pour étudier la limite éventuelle d'une suite, on utilise les **théorèmes 1 à 6** en s'appuyant sur les limites des fonctions de référence.

EXERCICE RÉSOLU C Utiliser les théorèmes de comparaison

Déterminez dans chaque cas, si elle existe, la limite de la suite (u_n) définie par :

a) $u_n = \dfrac{n + (-1)^n}{n}$ (pour $n \geqslant 1$) ; **b)** $u_n = \dfrac{n}{\sqrt{n-1}}$ (pour $n \geqslant 2$).

Méthode

a) On encadre $(-1)^n$, ce qui nous conduit à un encadrement de (u_n) par deux expressions qui ont la **même** limite.

- On utilise la limite de la suite de référence définie pour tout entier naturel $n \geqslant 1$ par $v_n = \dfrac{1}{n}$.
- On peut alors utiliser le théorème 2.

b) Le calcul de quelques termes permet de conjecturer que les termes (u_n) deviennent aussi grands que l'on veut.
Une méthode consiste alors à mettre en évidence une suite de référence (v_n) dont la limite est $+\infty$ et telle que pour tout entier naturel $n \geqslant 2$, $v_n \leqslant u_n$.
Ici, (v_n) est la suite définie pour tout entier naturel $n \geqslant 2$ par $v_n = \sqrt{n}$.

Solution

a) Pour tout entier naturel non nul n,
$$-1 \leqslant (-1)^n \leqslant 1.$$
D'où : $n - 1 \leqslant n + (-1)^n \leqslant n + 1$.
n étant non nul, $\dfrac{n-1}{n} \leqslant u_n \leqslant \dfrac{n+1}{n}$
soit encore $1 - \dfrac{1}{n} \leqslant u_n \leqslant 1 + \dfrac{1}{n}$.

- Comme $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n} = 0$, il en résulte :
$$\lim_{n \to +\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right) = 1 \text{ et } \lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1.$$
- Étant dans les conditions d'utilisation du théorème 2, on peut conclure :
$$\lim_{n \to +\infty} u_n = 1.$$

b) Pour tout entier naturel $n \geqslant 2$, $0 < \sqrt{n-1} < \sqrt{n}$ et donc $\dfrac{1}{\sqrt{n}} < \dfrac{1}{\sqrt{n-1}}$.
D'où :
$$\frac{n}{\sqrt{n}} < \frac{n}{\sqrt{n-1}} \text{ soit } \sqrt{n} < u_n.$$
Comme $\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt{n} = +\infty$, le théorème 1, par comparaison, permet de conclure :
$\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

Mise en pratique

Pour les exercices 11 à 14
Déterminez, si elle existe, la limite de la suite de terme général u_n.

11 $u_n = \dfrac{2 + 5(-1)^n}{n}$ avec $n \geqslant 1$.

12 $u_n = 2 + \dfrac{5(-1)^n}{n}$ avec $n \geqslant 1$.

13 $u_n = 3n - (-1)^n$.

14 $u_n = \dfrac{\sin(n^2 + 1)}{\sqrt{n+1}}$.

15 La suite (u_n) est définie pour tout entier naturel $n \geqslant 3$, par : $u_n = \dfrac{n^2 + 1}{\sqrt{n-2}}$.

1. Justifiez que pour tout entier $n \geqslant 3$, $u_n \geqslant n\sqrt{n}$.
2. Déduisez-en la limite de la suite (u_n).

16 La suite (u_n) est définie pour tout entier naturel $n \geqslant 4$, par :
$$u_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

1. Justifiez que pour tout entier k, $0 < k \leqslant n$, $\dfrac{1}{\sqrt{k}} \geqslant \dfrac{1}{\sqrt{n}}$, puis que pour tout entier $n \geqslant 4$,
$$u_n \geqslant \sqrt{n}.$$
2. Précisez alors le comportement à l'infini de la suite (u_n).

EXERCICE RÉSOLU D Lever une indétermination du type « $\infty - \infty$ » ou « $\frac{\infty}{\infty}$ »

Dans chaque cas, déterminez, si elle existe, la limite de la suite (u_n).

a) $u_n = n - \sqrt{n}$. **b)** $u_n = \dfrac{2n^2+1}{n^2+n}$ $(n \geqslant 1)$.

Méthode

a) En présence d'une forme indéterminée « $\infty - \infty$ », une factorisation permet, en général, de lever l'indétermination.

- On veut mettre en facteur le terme « dominant », ici n, lorsqu'il est non nul. Comme on étudie la limite en $+\infty$, seules les valeurs de « u_n » pour « n grand » nous intéressent. On se place dans le cas $n \neq 0$, réalisé dès que $n \geqslant 1$.
- On utilise les règles opératoires sur la limite d'une somme (théorème 3), puis celles sur la limite d'un produit (théorème 4).

b) On justifie que l'on est en présence d'une forme indéterminée « $\frac{\infty}{\infty}$ ».

- Le numérateur et le dénominateur sont des expressions polynômiales : le terme « dominant » est, pour chacune, le terme de plus haut degré. Ici c'est n^2 dans les deux cas. On factorise donc par n^2, puis on simplifie l'écriture du quotient.
- On utilise les règles opératoires sur les limites pour conclure.

Solution

a) $\lim\limits_{n\to+\infty} (n) = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty$.
Nous sommes en présence d'une forme indéterminée.

- Pour tout entier $n \geqslant 1$:
$$n - \sqrt{n} = n\left(1 - \frac{\sqrt{n}}{n}\right) = n\left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$
- Or $\lim (n) = +\infty$ et, puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}} = 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 - \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right) = 1$.

Donc, d'après la règle sur la limite d'un produit :
$$\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty.$$

b) $\lim\limits_{n\to+\infty} (n^2) = +\infty$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} (2n^2+1) = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} (n^2+n) = +\infty$.
Nous sommes en présence d'une forme indéterminée.

- Pour tout $n \geqslant 1$:
$$\frac{2n^2+1}{n^2+n} = \frac{n^2\left(2+\frac{1}{n^2}\right)}{n^2\left(1+\frac{1}{n}\right)} = \frac{2+\frac{1}{n^2}}{1+\frac{1}{n}}.$$
- Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n^2} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(2+\dfrac{1}{n^2}\right) = 2$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1+\dfrac{1}{n}\right) = 1$.

Donc, d'après la règle sur la limite d'un quotient :
$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 2.$$

Mise en pratique

Pour les exercices 17 à 19

Vérifiez que l'étude du comportement à l'infini de chaque suite conduit à une indétermination, puis levez cette indétermination et donnez la limite éventuelle de la suite.

17 **a)** $u_n = n^2 - 3n$. **b)** $u_n = n\sqrt{n} - n^2$.

18 **a)** $u_n = 3^n - 2^n$. **b)** $u_n = \dfrac{5^n - 1}{4^n + 3}$.

19 **a)** $u_n = \dfrac{5n^2 - 5}{2n(n+1)}$. **b)** $u_n = \dfrac{7n+3}{n^2}$.

20 Étudiez le comportement à l'infini des suites (u_n), (v_n) et (w_n) définies pour tout entier naturel n non nul par :
$$u_n = \frac{3n^2-4}{n+1},\ v_n = \frac{u_n}{n} \text{ et } w_n = u_n - 3n.$$

EXERCICE RÉSOLU E Étudier une suite s'exprimant avec des radicaux

Déterminez, si elle existe, la limite de la suite de terme général :

a) $u_n = 3n - \sqrt{n^2+1}$. **b)** $v_n = \sqrt{n^2+1} - n$.

Méthode

a) On examine si un calcul direct conduit au résultat ou si une indétermination nécessite une transformation d'écriture.

Notation
Le symbole $\forall$ signifie « quel que soit » ou « pour tout ». Il n'est utilisable que dans une proposition écrite en langage mathématique.

- On conjecture que lorsque n devient très grand, u_n se comporte comme $3n - \sqrt{n^2} = 2n$, d'où l'idée de mettre n en facteur, lorsque n est non nul.
- On utilise la propriété :
si $x \geqslant 1$, alors $1 \leqslant \sqrt{x} \leqslant x$.
- On utilise le théorème des gendarmes.
- On peut alors conclure.

b) On examine, de nouveau, si un calcul direct conduit au résultat. La méthode précédente conduit à une nouvelle indétermination.

- On considère l'expression $\sqrt{n^2+1} + n$, dite conjuguée de $\sqrt{n^2+1} - n$, pour laquelle il n'y a pas d'indétermination.

On multiplie et on divise v_n par cette expression conjuguée (non nulle), pour utiliser ensuite l'identité remarquable $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$.

Solution

a) Pour tout entier naturel n, $n^2+1 > n^2$.
La fonction *racine carrée* est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$. Il en résulte :
$\forall\ n \in \mathbb{N}$, $\sqrt{n^2+1} > \sqrt{n^2}$ soit $\sqrt{n^2+1} > n$.
Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n^2+1} = +\infty$.
Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} (3n) = +\infty$, nous sommes en présence d'une forme indéterminée.

- Pour tout entier $n \geqslant 1$:
$$u_n = 3n - \sqrt{n^2}\sqrt{1+\frac{1}{n^2}} = n\left(3 - \sqrt{1+\frac{1}{n^2}}\right).$$
- Or $1 + \dfrac{1}{n^2} > 1$ donc $1 \leqslant \sqrt{1+\dfrac{1}{n^2}} \leqslant 1 + \dfrac{1}{n^2}$.
- Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1+\dfrac{1}{n^2}\right) = 1$, d'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{1+\dfrac{1}{n^2}} = 1$.
- Ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(3 - \sqrt{1+\dfrac{1}{n^2}}\right) = 2$
d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

b) $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n^2+1} = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$:
nous sommes en présence d'une forme indéterminée.

- $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $\sqrt{n^2+1} + n \neq 0$ et :
$$v_n = \frac{(\sqrt{n^2+1} - n)(\sqrt{n^2+1} + n)}{\sqrt{n^2+1} + n}$$
$$v_n = \frac{n^2+1-n^2}{\sqrt{n^2+1}+n} = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}+n}.$$

Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} (\sqrt{n^2+1} + n) = +\infty$, et par prise de l'inverse : $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$.

Mise en pratique

Pour les exercices 21 à 24

Déterminez, si elle existe, la limite de la suite (u_n) proposée.

21 **a)** $u_n = \sqrt{2n^2 - 5}$ (avec $n \geqslant 2$).
b) $u_n = \sqrt{n^2 + 3n}$.

22 **a)** $u_n = \sqrt{2n^2 - 5} - 2n$ (avec $n \geqslant 2$).
b) $u_n = n\left(\sqrt{2 + \dfrac{1}{n}} - \sqrt{2}\right)$ (avec $n > 0$).

23 **a)** $u_n = \sqrt{2n+1} - \sqrt{2n-1}$.
b) $u_n = \dfrac{n}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n+2}}$.

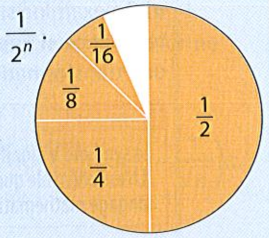
24 **a)** $u_n = \dfrac{n}{\sqrt{n+1}} - \dfrac{n}{\sqrt{n+2}}$.
b) $u_n = \dfrac{3n - \sqrt{9n^2+1}}{\sqrt{n^2+5}}$.

EXERCICES

OBJECTIF 3 Utiliser les suites géométriques

EXERCICE RÉSOLU F Calculer la limite (éventuelle) d'une somme de termes

1. La suite (S_n) est définie pour tout entier $n \geqslant 1$ par $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^n}$.



a) Que suggère ce dessin concernant la limite éventuelle de la somme S_n ?

b) Démontrez votre conjecture.

2. Déterminez la limite éventuelle de la suite (T_n) définie pour tout entier $n \geqslant 1$ par $T_n = \frac{5}{4} + \left(\frac{5}{4}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{5}{4}\right)^n = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{5}{4}\right)^k$.

Méthode

1. a) On observe que chaque terme ajouté correspond à la moitié de la partie restante (en blanc). On s'approche ainsi du recouvrement du disque sans aller au-delà.

b) On met en évidence la somme des premiers termes d'une suite géométrique de raison q $\left(q = \frac{1}{2}\right)$.

q étant différent de 1, on exprime cette somme en utilisant l'égalité :

$$1 + q + q^2 + \ldots q^{n-1} = \frac{1-q^n}{1-q}.$$

• Comme $-1 < q < 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$; on en déduit $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$.

2. On reconnaît la somme des premiers termes d'une suite géométrique de raison $q \left(q = \frac{5}{4}\right)$.

• Comme $q > 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = +\infty$; on en déduit $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$.

Solution

1. a) On peut conjecturer que la suite (S_n) a pour limite l'aire du disque : 1 unité d'aire.

b) Pour tout entier $n \geqslant 1$,

$$S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^n}$$

$$= \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}}\right)$$

d'où $S_n = \frac{1}{2} \times \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}} = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

• Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = 1$.

2. $T_n = \frac{5}{4}\left(1 + \left(\frac{5}{4}\right) + \left(\frac{5}{4}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{5}{4}\right)^{n-1}\right)$,

d'où : $T_n = \frac{5}{4} \times \frac{1 - \left(\frac{5}{4}\right)^n}{1 - \frac{5}{4}} = 5\left(\left(\frac{5}{4}\right)^n - 1\right)$

$T_n = \left(5\left(\frac{5}{4}\right)^n - 1\right)$.

• Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{5}{4}\right)^n = +\infty$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = +\infty$.

Mise en pratique

Pour les exercices 25 à 28

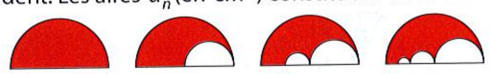
Déterminez, si elle existe, la limite lorsque n tend vers l'infini de la somme S_n.

25 $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{3^k} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{3^n}$.

26 $S_n = \sum_{k=0}^{n} \left(-\frac{1}{2}\right)^k = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \left(-\frac{1}{2}\right)^n$.

27 $S_n = 0{,}6 + 0{,}6^2 + \ldots + 0{,}6^n$.

28 Le premier demi-disque a pour rayon 1 cm. On passe d'une figure à l'autre en « enlevant » un demi-disque dont le rayon est la moitié du précédent. Les aires a_n (en cm^2) constituent une suite.



a_0 a_1 a_2 a_3

1. Calculez a_0, a_1, a_2, a_3.

2. La suite (a_n) est décroissante et minorée (par 0…) donc convergente. Calculez sa limite.

EXERCICES

Pour se tester

Exercices interactifs

29 Questions sur le cours

Complétez les propositions suivantes.

a) Si $q > 1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = \ldots$.

b) Si $-1 < q < 1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = \ldots$.

c) Une suite telle qu'il existe un nombre M supérieur à tous les termes de la suite est dite … et le nombre M est un … de la suite.

d) Toute suite croissante et majorée est … .

e) Toute suite décroissante non minorée a pour limite … .

f) (u_n) et (v_n) sont deux suites. Si pour tout entier $n \geqslant n_0$, $u_n \leqslant v_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, alors … .

30 Vrai ou faux

Vrai ou faux ? Justifiez votre réponse.

a) Une suite bornée est convergente.

b) Une suite monotone et convergente est bornée.

c) (u_n) et (v_n) sont deux suites. Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{v_n}{u_n} = 0$.

d) (u_n) et (v_n) sont deux suites. Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n + v_n) = 0$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$.

e) Une suite non majorée a pour limite $+\infty$.

f) (u_n) et (v_n) sont deux suites. Si la suite $(u_n \times v_n)$ converge, alors (u_n) et (v_n) sont convergentes.

31 QCM Une seule réponse exacte

Pour chaque affirmation, une seule réponse est exacte. Identifiez-la en justifiant votre réponse.

1. Pour tout entier naturel n non nul, $u_n = \frac{3n + n^2}{n-1}$.

a) $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 3$ **b)** $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ **c)** $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$

2. Si pour tout entier naturel n, $v_n \leqslant u_n \leqslant w_n$, avec $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 2$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = 3$, alors :

a) la suite (u_n) est convergente

b) la suite (u_n) n'a pas pour limite $+\infty$

c) la suite (u_n) n'a pas de limite

3. La suite (u_n) est convergente et majorée par 3. Alors nécessairement :

a) $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 3$ **b)** $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \leqslant 3$

c) La suite (u_n) est croissante

4. Si pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $-\frac{1}{2} \leqslant u_n - 2 \leqslant \frac{1}{n}$, alors :

a) la suite (u_n) est décroissante

b) la suite (u_n) est bornée

c) $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 2$

32 QCM Au moins une réponse exacte

Pour chaque affirmation, plusieurs réponses peuvent être exactes. Identifiez-les en justifiant vos réponses.

1. La suite (S_n) est définie pour tout n de $\mathbb{N}^*$ par :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n} = \frac{1}{n} + \frac{2}{n} + \ldots + \frac{n}{n}.$$

a) La suite (S_n) est décroissante.

b) La suite (S_n) n'a pas de limite réelle.

c) La suite (S_n) est convergente.

d) Pour tout entier naturel non nul n, $S_n = \frac{n+1}{2}$.

2. La suite (S_n) est définie pour n de $\mathbb{N}^*$ par :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2} = \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \ldots + \frac{n}{n^2}.$$

a) Pour tout entier naturel non nul n, $S_n = \frac{n+1}{2n}$.

b) Pour tout entier naturel n non nul, $0 \leqslant S_n \leqslant \frac{1}{2}$.

c) $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \frac{1}{2}$. **d)** La suite (S_n) est croissante.

Corrigés sur www.transmathlycee.net/eleve-TermS

Apprendre à chercher

33 Conjecturer puis démontrer

La suite (u_n) est définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{u_n + 2}$.

Objectif Exprimer de manière explicite les termes de la suite (u_n) définie par récurrence.

1. L'intérêt du passage de la définition par récurrence à la définition explicite est de permettre le calcul direct d'un terme sans avoir à connaître ceux qui le précèdent.

Une approche est de calculer les premiers termes afin de conjecturer comment l'indice n de u_n intervient dans la valeur de u_n.

Calculez sous forme fractionnaire les termes u_1, u_2, u_3, u_4, u_5 et u_6.

2. La lecture des résultats sous forme fractionnaire montre que tous ces nombres sont des inverses de nombres entiers naturels. Le lien entre les dénominateurs de deux termes consécutifs peut permettre de résoudre le problème.

Calculez la différence entre les dénominateurs de deux termes consécutifs allant de u_1 à u_6.

3. Des puissances de 2 apparaissant (à une unité près), il semble maintenant possible d'exprimer u_n en fonction de n.

a) Énoncez une conjecture et testez-la sur les termes connus.

b) Prouvez, par récurrence, que votre conjecture est vraie.

34 Une suite arithmético-géométrique

La suite (u_n) est définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n + 1$

Objectif Démontrer que la suite (u_n) est convergente et préciser sa limite.

1. On passe d'un terme au suivant par la fonction affine $x \mapsto \dfrac{1}{2}x + 1$. Graphiquement, les droites d'équations $y = x$ et $y = \dfrac{1}{2}x + 1$ se coupent en un point dont l'abscisse est la solution de l'équation $x = \dfrac{1}{2}x + 1$, c'est-à-dire 2.

Tracez ces droites et utilisez-les pour repérer sur l'axe des abscisses les premiers termes de la suite.

2. Cette approche graphique permet de conjecturer que la suite est croissante et majorée (par 2).

a) Démontrez par récurrence que pour tout entier naturel n, $u_n \leqslant u_{n+1} < 2$.

b) Justifiez alors la convergence de la suite (u_n).

3. Il reste à déterminer la limite de la suite. Le nombre 2 semble un bon candidat, mais rien pour l'instant ne prouve que la limite soit bien égale à 2.

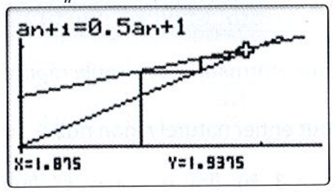
On s'intéresse donc à la suite (v_n) des différences, définie pour tout entier naturel n par $v_n = 2 - u_n$, en espérant pouvoir démontrer que cette suite est de limite zéro.

a) Exprimez v_{n+1} en fonction de v_n et déduisez-en la nature de la suite (v_n).

b) Calculez alors $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n$ puis $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

Note

La calculatrice permet d'obtenir une représentation des premiers termes de la suite (u_n) et de conjecturer son comportement.



Avec Casio, utiliser le mode RECUR. Avec TI, utiliser le mode SUITE. Voir les instructions sur les rabats de la couverture.

35 Un encadrement utile

La suite (u_n) est définie pour tout entier naturel non nul n par $u_n = \dfrac{1}{n+\sqrt{1}} + \dfrac{1}{n+\sqrt{2}} + \ldots + \dfrac{1}{n+\sqrt{n}}$.

Objectif Démontrer que la suite (u_n) est convergente et préciser sa limite.

1. On observe que les n termes de la somme u_n sont des nombres positifs ordonnés.

Précisez quel est le plus petit, quel est le plus grand.

2. Chacun des termes de la somme est supérieur (ou égal) au plus petit et inférieur (ou égal) au plus grand. D'où l'idée d'encadrer la somme u_n afin d'utiliser le théorème des gendarmes.

a) Déduisez-en que pour tout entier naturel non nul n,

$$\frac{n}{n+\sqrt{n}} \leqslant u_n \leqslant \frac{n}{n+1}.$$

b) Calculez $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{n}{n+\sqrt{n}}$ puis $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{n}{n+1}$.

c) Concluez.

Narration de recherche

→ **L'objectif n'est pas seulement de résoudre le problème posé : vous devez aussi noter les différentes idées même lorsqu'elles n'ont pas permis de trouver la réponse. Expliquez pourquoi vous avez changé de méthode et ce qui vous a fait avancer, etc.**

36 Alain et Béatrice étudient le comportement d'une suite (u_n) qu'ils savent croissante et majorée par 1.

Alain prétend que la suite est bornée et Béatrice affirme qu'il y a au plus un nombre fini de termes négatifs.

Qu'en pensez-vous ?

37 Dans cet exercice, on étudie la suite (u_n) définie par la donnée de u_0 ($u_0 \geqslant 0$) et pour tout entier naturel n,

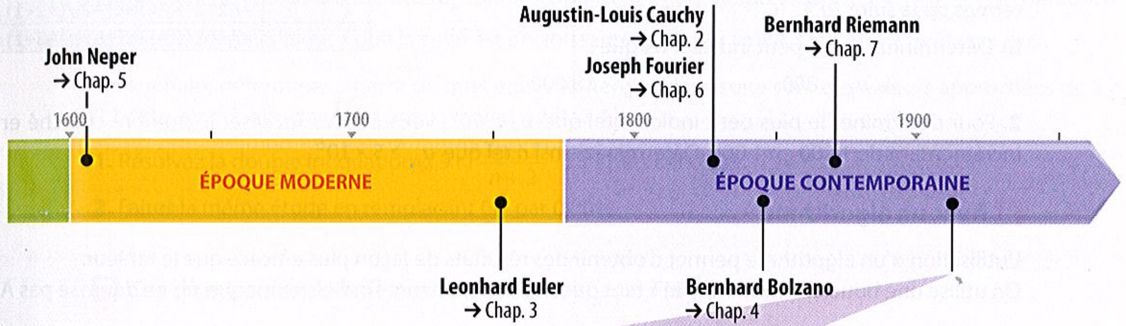
$$u_{n+1} = 5 - \frac{5}{u_n + 1}.$$

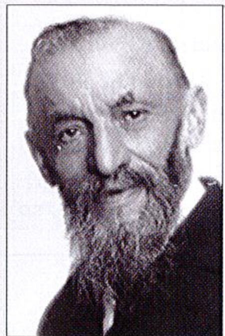
Précisez le sens de variation et la convergence éventuelle de la suite (u_n) suivant les valeurs de u_0.

Chercheurs d'hier

Eux aussi, ils ont cherché avant de trouver !

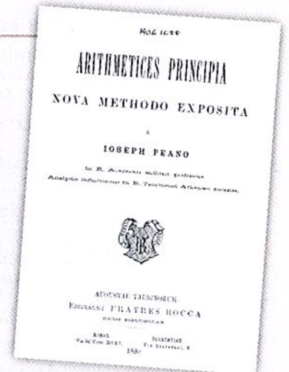
→ **Voici quelques mathématiciens importants qui ont travaillé dans le domaine de l'Analyse.**





Giuseppe Peano
(1858-1932)

S'appuyant sur des travaux antérieurs de Dedekind (*Was sind und was sollen die Zahlen*), Peano construisit l'ensemble ℕ des nombres entiers naturels au moyen de cinq axiomes, c'est-à-dire cinq propositions acceptées comme vraies et à partir desquelles on démontre toutes les propriétés (construction exposée dans son *Arithmetices principia, nova methodo exposita*, 1889 – page de titre ci-contre).



Ces cinq axiomes s'énoncent aujourd'hui ainsi :

1. 0 désigne un nombre appelé *Zéro*, élément de ℕ.
2. Si n est un nombre, alors n admet un unique successeur qui lui est distinct et qui est aussi un nombre.
3. *Zéro* n'est le successeur d'aucun nombre.
4. Deux nombres dont les successeurs sont les mêmes sont égaux.
5. Induction : Si un ensemble E de nombres contient 0 et le successeur de tout nombre de E, alors tout nombre est dans E. (L'axiome 5 est le principe de récurrence vu dans ce chapitre.)

Sur le Web serge.mehl.free.fr/chrono/Peano.html
fr.wikipedia.org/wiki/Giuseppe_Peano

Travaux dirigés

Utiliser un algorithme
→ Pour déterminer un rang

TP 38 Dépasser un seuil

On admet que la suite définie pour tout entier naturel n par $u_n = \dfrac{n^2\sqrt{n}}{n+1}$ est croissante et a pour limite $+\infty$. Cela signifie que, quel que soit le nombre A choisi aussi grand que l'on veut, tous les termes de la suite dépassent ce nombre à partir d'un certain indice.

OBJECTIF Un nombre A étant choisi, on souhaite déterminer à partir de quel indice n, $u_n > \mathrm{A}$.

A Avec tableur

1. a) Vérifiez que les formules données dans le tableau ci-contre permettent (en recopiant vers le bas) de déterminer les premiers termes de la suite (u_n).

	A	B
1	n	u_n
2	0	=A2^2*RACINE(A2)/(A2+1)
3	1	=A3^2*RACINE(A3)/(A3+1)

b) Déterminez le plus petit indice n tel que :

- $u_n > 800$
- $u_n > 10\,000$

2. Pour déterminer le plus petit indice n tel que $u_n > 10^6$, vous pouvez localiser le nombre cherché en incrémentant de 1 000 en 1 000. Déterminez ainsi n tel que $u_n > 5 \times 10^6$.

B Avec un algorithme

L'utilisation d'un algorithme permet d'obtenir des résultats de façon plus efficace que le tableur.
On utilise une boucle conditionnelle « tant que » : on incrémente l'indice n tant que u_n ne dépasse pas A.

1. Mise en œuvre d'un algorithme

Cet algorithme est rédigé pour l'étude d'une suite croissante de limite $+\infty$.

a) Programmez cet algorithme avec AlgoBox ou votre calculatrice pour la suite (u_n).

b) Vérifiez les résultats obtenus à la partie **A**.

```
Variables
A, n
Algorithme
Saisir A
n reçoit 0
Tant que u_n ≤ A
   n reçoit n + 1
Fin Tant que
Afficher « Le premier terme qui dé-
passe » A « est le terme d'indice » n
```

2. Adaptation de l'algorithme

On se propose d'adapter cet algorithme au cas d'une suite décroissante de limite $-\infty$.

a) On considère la suite (v_n) définie pour tout naturel n par $v_n = \dfrac{1-n^3}{2n+1}$.
Prouvez que (v_n) est décroissante et que $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = -\infty$.

b) Modifiez l'algorithme précédent pour déterminer à partir de quel indice n, $u_n < -\mathrm{A}$, où A est un nombre positif donné. Testez cet algorithme avec la suite (v_n) pour : $\mathrm{A} = 800$, $\mathrm{A} = 10\,000$, $\mathrm{A} = 5 \times 10^6$.

C Cas d'une suite définie par récurrence

On s'intéresse maintenant à l'étude de suites définies par récurrence, c'est-à-dire du type $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Un nombre positif A étant choisi, écrivez un algorithme permettant pour une telle suite, croissante, de limite $+\infty$, de déterminer à partir de quel indice n, u_n dépasse A.

2. La suite (u_n) est définie par $u_0 = 2$ et pour tout entier n non nul, $u_{n+1} = u_n + \sqrt{u_n}$. Utilisez cet algorithme (avec AlgoBox ou votre calculatrice) pour obtenir l'indice à partir duquel les termes de la suite dépassent le nombre 10^6.

Remarque. *Le programme peut, selon la nature de la fonction f telle que $u_{n+1} = f(u_n)$, utiliser des valeurs approchées de u_n. Cela peut entraîner une approximation sur la valeur de l'indice cherché.*

Utiliser un algorithme
→ Pour étudier une suite monotone de limite finie

TP 39 Au voisinage de la limite

- Dire qu'une suite converge vers un nombre ℓ signifie que tout intervalle ouvert contenant ℓ contient tous les termes de la suite **à partir d'un certain indice**.
- Dire qu'un nombre est, par exemple, « à moins de » 0,01 d'un nombre a revient à dire que ce nombre appartient à l'intervalle ouvert $]a - 0{,}01\,;\, a + 0{,}01[$.
- Pour une suite monotone qui converge vers un nombre ℓ, on peut se demander à partir de quel indice les termes de la suite sont aussi proches de ℓ que l'on veut, c'est-à-dire à une distance de ℓ aussi petite que l'on veut. La suite étant monotone, le fait qu'un terme soit dans un intervalle ouvert de centre ℓ entraîne que tous les termes suivants y sont aussi.

A Cas d'une suite définie de manière explicite, $u_n = f(n)$

Lorsque la suite (u_n) est définie de manière explicite, on peut envisager une étude « à la main ».

Considérons par exemple la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = \dfrac{3n+1}{n+2}$. On démontre (et vous pouvez le faire…) que la suite est décroissante et a pour limite 3 lorsque n tend vers $+\infty$.

On souhaite déterminer à partir de quel indice les termes de la suite sont des valeurs approchées de 3 à 0,1 près, c'est-à-dire dans l'intervalle ouvert $]2{,}9\,;\,3{,}1[$.

1. Résolvez la double inéquation $2{,}9 < \dfrac{3n+1}{n+2} < 3{,}1$ puis concluez.

2. Faites la même étude en remplaçant 0,1 par 0,001.

B Cas d'une suite définie par récurrence, $u_{n+1} = f(u_n)$

Lorsque la suite (u_n) est définie par récurrence, on doit souvent faire appel aux outils de calcul.

Considérons par exemple la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{2} + 3$.

On démontre que la suite est croissante et a pour limite 6 lorsque n tend vers $+\infty$.

L'algorithme ci-contre, écrit avec AlgoBox, a donc pour objectif de déterminer à partir de quel indice les termes de la suite sont dans l'intervalle ouvert $]6 - r\,;\,6 + r[$, où r est un nombre strictement positif choisi par l'utilisateur.

```
1     VARIABLES
2       n EST_DU_TYPE NOMBRE
3       r EST_DU_TYPE NOMBRE
4       u EST_DU_TYPE NOMBRE
5       L EST_DU_TYPE NOMBRE
6     DEBUT_ALGORITHME
7       u PREND_LA_VALEUR 1
8       n PREND_LA_VALEUR 0
9       LIRE L
10      LIRE r
11      TANT_QUE (u<=L-r ou u>=L+r) FAIRE
12        DEBUT_TANT_QUE
13        u PREND_LA_VALEUR F1(u)
14        n PREND_LA_VALEUR n+1
15        FIN_TANT_QUE
16      AFFICHER "Le terme u"
17      AFFICHER n
18      AFFICHER " appartient à ]L-r;L+r[."
19    FIN_ALGORITHME
20
21   Fonction numérique utilisée :
22   F1(x)=x/2+3
```

1. À quelles lignes précise-t-on :

- la valeur du premier terme u_0 ?
- la fonction f telle que $u_{n+1} = f(u_n)$?

2. Les lignes 11 à 15 correspondent à une boucle conditionnelle.

- Précisez le test qui conditionne cette boucle.
- À quelle condition « sort-on » de cette boucle ?

3. Utilisez cet algorithme pour déterminer à partir de quel indice n, u_n appartient :

a) à $]5{,}99\,;\,6{,}01[$;

b) à $]6 - 10^{-5}\,;\,6 + 10^{-5}[$.

4. La suite (u_n) est définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{3} + 2$.

Conjecturez le sens de variation de la suite et sa limite éventuelle L. Déterminez à partir de quel indice n on obtient une valeur approchée de L à 0,001 près.

Un type de raisonnement
Appliquer un procédé de sommation

TP 40 Suite définie par une somme

La suite (u_n) est définie pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, par $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$.

OBJECTIF Déterminer une expression explicite de u_n en fonction de n afin d'étudier le comportement de la suite (u_n) quand n tend vers $+\infty$.

MISE EN ŒUVRE

- Pour conjecturer une expression de u_n et le comportement de la suite (u_n), on dispose de deux méthodes :
  - calculer les premiers termes de la suite à l'aide d'un tableur ou d'une calculatrice **A** ;
  - utiliser un procédé de sommation (qualifié de processus « de téléscopage ») **B**.
- Pour démontrer la validité des conjectures émises, on utilise un raisonnement par récurrence **C**.

A Expérimenter à l'aide d'un tableur et conjecturer

1. a) On envisage d'obtenir l'affichage des trente premiers termes de la suite.

◇	A	B	C
1	n	1/n(n+1)	u_n
2	1	=1/(A2*(A2+1))	=B2
3	2	=1/(A3*(A3+1))	=B3+C2

Vérifiez que les formules ci-contre vous permettent d'obtenir (en recopiant vers le bas) les premiers termes de la suite.

b) Choisissez l'affichage des termes u_n sous la forme fractionnaire (Format – Cellule – Nombre – Fraction). Que pouvez-vous conjecturer en ce qui concerne la forme explicite du terme u_n ?

2. Sélectionnez les colonnes A et C pour afficher une représentation graphique de ces trente premiers termes.

Quelle est l'allure du nuage de points obtenu ?

Que pouvez-vous conjecturer en ce qui concerne le comportement de la suite ?

B Utiliser un procédé de sommation pour conjecturer

1. a) Vérifiez que, quel que soit le nombre k non nul, $\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = \frac{1}{k(k+1)}$.

b) Utilisez cette propriété pour obtenir la somme définissant le terme u_4.

Remarquez alors les simplifications possibles.

2. a) En vous inspirant du schéma ci-contre, déduisez-en une nouvelle expression de u_n.

Ce schéma constitue une illustration du procédé.

b) Que pouvez-vous alors conjecturer en ce qui concerne le comportement de la suite ? Est-ce conforme à vos conjectures du **A** ?

$$\begin{array}{ccc}
\frac{1}{2} & - & \cancel{\frac{1}{2}} \\
\cancel{\frac{1}{2}} & - & \cancel{\frac{1}{3}} \\
\cancel{\frac{1}{3}} & - & \cancel{\frac{1}{4}} \\
\cancel{\dots} & & \dots \\
\dots & & \cancel{\dots} \\
\cancel{\frac{1}{n-1}} & - & \cancel{\frac{1}{n}} \\
\cancel{\frac{1}{n}} & - & \frac{1}{n+1} \\
\hline
 & u_n = \dots\dots &
\end{array}$$

C Démontrer

a) Démontrez par récurrence que l'expression conjecturée de u_n est valable pour tout entier naturel $n \geqslant 1$.

b) Déterminez $\lim_{n \to +\infty} u_n$. Cela confirme-t-il votre conjecture ?

D Appliquer

Étudiez de la même manière la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n, par :

$$v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)}.$$

Approfondissement AP
Prolongements possibles
→ exercices 106 et 107

TP 41 Approximations du nombre π

OBJECTIF Approcher à l'aide d'une suite le nombre π.

Principe de la méthode d'encadrement

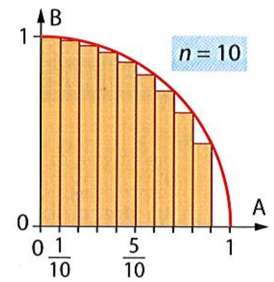
- On inscrit, dans un quart de disque de rayon 1, n rectangles de même largeur $\frac{1}{n}$.
- On conçoit qu'en augmentant le nombre n de rectangles, l'aire totale de ces rectangles est de plus en plus proche de l'aire $\frac{\pi}{4}$ du quart de disque (partie **A**).
- On en déduit un algorithme pour obtenir une approximation du nombre π (partie **B**).

A Expression de l'aire des rectangles

Sur le dessin ci-contre, on a représenté, dans un repère orthonormé, le quart de disque de rayon 1 dont les points ont des coordonnées $(x ; y)$ positives.

On a partagé le rayon $[OA]$ en 10 segments de même longueur, puis dessiné les rectangles comme indiqués sur la figure. On note S_{10} la somme des aires de ces rectangles.

On notera ainsi $S_n (n \geqslant 2)$ la somme des aires des rectangles associés à un partage du rayon $[OA]$ en n segments de même longueur.



1. Justifiez que l'équation $y = \sqrt{1 - x^2}$, avec $x \in [0 ; 1]$, caractérise l'appartenance d'un point $M(x ; y)$ à l'arc de cercle $\overset{\frown}{AB}$.

2. Exprimez alors S_{10}, puis S_n.

B Utilisation d'un algorithme

Dans l'algorithme ci-contre écrit avec AlgoBox :

– la ligne 7 correspond au choix du nombre n de segments de même longueur utilisés dans le partage du segment $[OA]$;

– le calcul de S_n est effectué dans la boucle (lignes 9 à 12).

```
1   VARIABLES
2     n EST_DU_TYPE NOMBRE
3     S EST_DU_TYPE NOMBRE
4     i EST_DU_TYPE NOMBRE
5     A EST_DU_TYPE NOMBRE
6   DEBUT_ALGORITHME
7     LIRE n
8     S PREND_LA_VALEUR 0
9     POUR i ALLANT_DE 1 A n-1
10      DEBUT_POUR
11      S PREND_LA_VALEUR S+(1/n)*F1(i/n)
12      FIN_POUR
13    A PREND_LA_VALEUR 4*S
14    AFFICHER A
15  FIN_ALGORITHME
16
17  Fonction numérique utilisée :
18  F1(x)=sqrt(1-x*x)
```

1. a) Que reconnaissez-vous dans la ligne 18 ?

b) Qu'obtient-on à l'affichage ?

2. a) Utilisez Algobox (ou votre calculatrice) pour calculer S_n pour des valeurs de n de plus en plus grandes (jusqu'à 100 000).

b) Donnez la précision obtenue pour $n = 1000$.

c) Pour obtenir une approximation du nombre π, Archimède (IIIe siècle avant J.-C.) a utilisé deux polygones réguliers de 96 côtés : l'un inscrit dans le cercle, l'autre circonscrit au cercle, ce qui lui a permis d'obtenir l'encadrement $3 + \frac{1}{7} < \pi < 3 + \frac{10}{71}$.

Comparez votre résultat avec la précision obtenue par Archimède.

Remarque. *Cette méthode d'approximation d'une aire par des rectangles, qui peut paraître ici d'une efficacité limitée, joue un rôle très important dans la théorie de l'intégration abordée dans le chapitre 7.*

Entraînement

DE TÊTE

42 La suite (u_n) est définie par $u_0 = 0$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \dfrac{1}{2 - u_n}$.

Calculez u_1, u_2, u_3 et conjecturez la valeur de u_{2012}.

43 La suite (u_n) est définie par $u_0 = 3$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 2u_n - 3$.

Calculez u_1, u_2, u_3 et conjecturez la valeur de u_{2012}.

Pour les exercices 44 à 51

Déterminez, si elle existe, la limite lorsque n tend vers l'infini de la suite de terme général u_n.

44 $u_n = \left(\dfrac{2}{3}\right)^n$.

45 $u_n = 2n + 1$.

46 $u_n = 1 + \dfrac{1}{n}$.

47 $u_n = \dfrac{n+2}{n}$.

48 $u_n = \dfrac{2n-3}{n^2}$.

49 $u_n = \sqrt{n+1}$.

50 $u_n = (-1)^n \sqrt{n}$.

51 $u_n = \dfrac{2n - n^2}{n+1}$.

RAISONNEMENT PAR RÉCURRENCE

52 Démontrez que pour tout entier naturel $n \geqslant 2$,
$$5^n \geqslant 4^n + 3n.$$

53 Démontrez que pour tout entier naturel $n \geqslant 4$,
$$2^n \geqslant n^2.$$

54 Démontrez que pour tout entier naturel $n \geqslant 2$,
$$3n^2 \geqslant (n+1)^2.$$

55 Démontrez que pour tout entier naturel $n \geqslant 5$,
$$3^n \geqslant 2^n + 5n^2.$$

Aide

Utiliser le résultat de l'exercice 54.

56 Démontrez par récurrence que pour tout entier naturel n, $4^n + 5$ est un multiple de 3.

57 Démontrez que pour tout entier naturel n, $2^{3n} - 1$ est un multiple de 7.

58 Pour tout entier naturel n, on note (P_n) la proposition : « $3^n \geqslant (n+2)^2$ ».

1. Les propositions (P_0), (P_1), (P_2) et (P_3) sont-elles vraies ?

2. Démontrez par récurrence que pour tout entier naturel $n \geqslant 3$, (P_n) est vraie.

59 La suite (u_n) est définie par $u_0 = 3$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = -u_n + 4$.

1. Déterminez u_1, u_2, u_3, u_4, u_5 et conjecturez l'expression de u_n en fonction de n.

2. Démontrez cette conjecture par récurrence.

60 La suite (u_n) est définie par $u_0 = 2$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 2u_n - 3$.

1. Déterminez u_1, u_2, u_3, u_4, u_5.

2. a) Étudiez les premiers termes de la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = u_n - 3$.

b) Conjecturez l'expression de v_n en fonction de n.

c) Démontrez cette conjecture par récurrence.

3. Exprimez alors u_n en fonction de n.

61 La suite (u_n) est définie par $u_0 = 2$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 5u_n - 8$.

Démontrez par récurrence que la suite (u_n) est constante.

62 Pour tout entier naturel n non nul, on pose :
$$S_n = 1 + 3 + 5 + \ldots + (2n-1).$$

1. Calculez S_1, S_2, S_3 et S_4.

Conjecturez l'expression de S_n en fonction de n.

2. Démontrez cette conjecture par récurrence.

3. Observez la somme S_n et donnez une autre démonstration de la conjecture.

Aide

$1 + 2 + \ldots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

63 La suite (u_n) est définie par $u_0 \in]0\,;1[$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = u_n(2 - u_n)$.

Démontrez par récurrence que pour tout entier naturel n,
$$0 < u_n < 1.$$

Aide

Utiliser la fonction f définie sur l'intervalle $]0\,;1[$ par : $f(x) = x(2-x)$.

64 **Polygones convexes**

Un polygone est dit convexe lorsque chacun de ses angles mesure moins de π radians.

Démontrez par récurrence que la somme des mesures des angles d'un polygone convexe de n côtés ($n \geqslant 3$) est égale à $(n-2)\pi$ radians.

CALCULS DE LIMITES

Pour les exercices 65 à 70

Étudiez, dans chaque cas, la limite éventuelle de la suite (u_n). Précisez les propriétés ou théorèmes utilisés.

→ *Exercices résolus C, D, E.*

65 a) $u_n = \dfrac{2n+3}{3n-1}$ **b)** $u_n = \dfrac{5n-3}{3n-5}$ **c)** $u_n = \dfrac{5 + \cos(n)}{n}$

66 a) $u_n = n - \dfrac{1}{n+1}$ **b)** $u_n = \dfrac{n}{4} - 2 + \dfrac{2n}{n^2+1}$

67 a) $u_n = \dfrac{5n^2 - 3n + 7}{n^2 + n + 1}$ **b)** $u_n = \dfrac{-3n^2 + 2n + 4}{2(n+1)^2}$

68 a) $u_n = \dfrac{10n - 1}{n^2 + 1}$ **b)** $u_n = \dfrac{2n^2 - 1}{3n + 7}$

69 a) $u_n = \dfrac{\sqrt{n+1}}{n+1}$ **b)** $u_n = \dfrac{n\sqrt{n} + n}{n+2}$

70 a) $u_n = \sqrt{n^2 + 2n} - (n+1)$

b) $u_n = \sqrt{n}\left(\sqrt{n^2+2} - \sqrt{n^2+1}\right)$

Pour les exercices 71 à 73

Calculez la limite éventuelle des suites (u_n) et (v_n), puis celle des suites $(u_n + v_n)$, $(u_n \times v_n)$ et $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$.

71 $u_n = \dfrac{n+1}{2n^2+1}$ et $v_n = n$.

72 $u_n = \dfrac{2n}{n + \sqrt{n}}$ et $v_n = \dfrac{3n+5}{n+2}$.

73 $u_n = \dfrac{n^2+1}{2(n+3)^2}$ et $v_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$.

74 Proposez deux suites (u_n) et (v_n) vérifiant :
$$\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty, \quad \lim_{n \to +\infty} v_n = -\infty,$$
et telles que :

a) $\lim\limits_{n \to +\infty} (u_n + v_n) = 0$ $\quad (\forall n \in \mathbb{N},\ u_n + v_n \neq 0)$.

b) $\lim\limits_{n \to +\infty} (u_n + v_n) = 10$.

c) $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = 0$. **d)** $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = -5$.

75 **LOGIQUE** **« Pour tout », « Il existe ».**

1. La suite (u_n) est croissante.

Les propositions suivantes permettent-elles d'affirmer que la suite (u_n) est convergente ?

Justifiez votre réponse. Si la réponse est négative, proposez un contre-exemple.

a) Il existe un réel M tel que, pour tout entier naturel n, $u_n \leqslant$ M.

b) Pour tout réel M, il existe un entier naturel n tel que $u_n \leqslant$ M.

2. Les propositions suivantes permettent-elles d'affirmer que la suite (v_n) a pour limite $+\infty$?

Justifiez votre réponse. Si la réponse est négative, proposez un contre-exemple.

a) Il existe un réel M tel que, pour tout entier naturel n, $v_n \geqslant$ M.

b) Pour tout réel M, il existe un entier naturel n tel que pour tout entier $m > n$, $v_m \geqslant$ M.

ÉTUDE DE SUITES

76 La suite (u_n) est définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = u_n + 2n + 3$.

1. Étudiez le sens de variation de la suite (u_n).

2. Démontrez que pour tout entier naturel n, $u_n > n^2$.

3. Déduisez-en le comportement en $+\infty$ de la suite (u_n).

77 La suite (u_n) est définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2}$.

1. Démontrez que pour tout entier naturel n, $0 \leqslant u_n \leqslant 2$.

2. Prouvez que la suite (u_n) est strictement croissante.

3. Quel est le comportement de la suite en $+\infty$? Justifiez votre réponse.

78 La suite (u_n) est définie pour tout entier naturel n non nul par $u_n = \dfrac{n!}{n^n}$ où $n! = 1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times n$.

1. Justifiez que pour tout entier naturel non nul n,
$$0 < u_n \leqslant \frac{1}{n}.$$

2. Quel est le comportement en $+\infty$ de la suite (u_n) ?

79 La suite (u_n) est définie pour tout entier naturel n par $u_n = n + 1 - \cos(n)$.

1. Démontrez que pour tout entier naturel n,
$$n \leqslant u_n \leqslant n + 2.$$

2. Quel est le comportement de la suite en $+\infty$?

80 **LOGIQUE** **Nécessaire ou suffisant ?**

Le théorème 8 précise que si la suite (u_n) est croissante et non majorée, alors elle a pour limite $+\infty$.

1. a) Déterminez les premiers termes de la suite définie, pour tout entier naturel n, par $u_n = n + (-1)^n$.

b) La suite est-elle majorée ? Est-elle croissante ? Justifiez vos réponses.

2. a) Soit A un nombre fixé. on note E(A) sa partie entière. Pouvez-vous trouver un indice n_0 tel que pour tout entier naturel $n > n_0$, $u_n > A$? Quel est le comportement de la suite (u_n) en $+\infty$?

b) La condition « croissante et non majorée » suffit pour conclure que la limite d'une suite est $+\infty$. Mais est-elle nécessaire ?

3. Dans les deux cas ci-dessous, précisez si la condition surlignée est nécessaire, suffisante, nécessaire et suffisante ou ni nécessaire et ni suffisante.

(u_n) et (v_n) sont deux suites définies pour tout entier naturel n.

a) Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \ell$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n - v_n) = 0$.

b) Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n - v_n) = 0$.

81 Les suites (u_n) et (v_n) sont définies pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, par $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}$ et $v_n = \dfrac{1}{n}$.

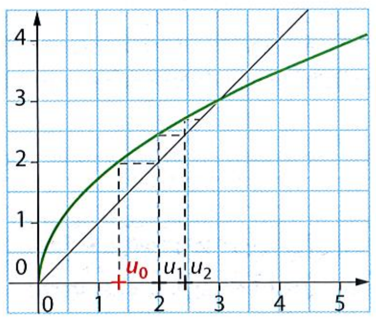
1. Prouvez que 1 est un majorant de la suite (u_n).

2. Prouvez que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $u_n < v_n$.

3. De ces deux renseignements, lequel permet de déterminer le comportement de la suite (u_n) en $+\infty$?

82 Sont représentées sur le dessin ci-dessous, la fonction définie pour x positif par $f(x) = \sqrt{3x}$ et la droite d'équation $y = x$.

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 \in [1 ; 3]$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \sqrt{3u_n}$.



1. L'intervalle $I = [1 ; 3]$ semble contenir tous les termes de la suite. Démontrez par récurrence que tous les terme (u_n) appartiennent effectivement à I.

2. Conjecturez le sens de variation de la suite (u_n) puis démontrez votre conjecture.

3. Démontrez que la suite (u_n) est convergente et conjecturez sa limite (voir l'exercice 103 p. 48).

83 La suite (u_n) est définie pour tout entier naturel n non nul par :

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k^2} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{n^2}.$$

1. Démontrez que la suite (u_n) est croissante.

2. a) Démontrez, par récurrence, que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$,

$$u_n \leqslant 2 - \frac{1}{n}.$$

b) Que pouvez-vous en déduire pour la suite (u_n) ?

84 La suite (u_n) est définie pour tout entier naturel non nul par :

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^3} = \frac{1}{1^3} + \frac{1}{2^3} + \ldots + \frac{1}{n^3}.$$

1. Démontrez que la suite est (u_n) croissante.

2. a) Démontrez, par récurrence, que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $u_n \leqslant 2 - \dfrac{1}{n}$.

b) Que pouvez-vous en déduire pour la suite (u_n) ?

85 On se propose d'étudier le comportement à l'infini de la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n non nul par :

$$u_n = \frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+2} + \ldots + \frac{n}{n^2+n}.$$

1. Quel est le plus petit des n termes de la somme définissant u_n ? Le plus grand ?

2. Déduisez-en un encadrement de u_n qui permet de déterminer le comportement de la suite en $+\infty$.

→ *Exercice 35, Apprendre à chercher, page 36*

86 **ALGORITHMIQUE** **Suite définie par récurrence**

```
Variables
n, u, i
Algorithme
Saisir n
u reçoit 1
Pour i de 1 à n
Afficher u
u reçoit 2 + u/3
Fin Pour
```

1. Précisez l'objectif de cet algorithme.

2. Utilisez cet algorithme pour programmer votre calculatrice (ou un tableur).

3. Que pouvez-vous conjecturer pour de grandes valeurs de l'entier naturel n ?

4. Comment se traduit le remplacement de la ligne « u reçoit 1 » par « u reçoit 4 » sur le sens de variation de la suite ?

SUITES DU TYPE $u_{n+1} = a\,u_n + b$

Une suite (u_n) est dite **arithmético-géométrique** lorsqu'elle vérifie une relation de récurrence de la forme $u_{n+1} = au_n + b$ où a et b sont deux réels, $a \neq 0$.

Lorsque $a = 1$, (u_n) est une suite arithmétique.

Lorsque $b = 0$, (u_n) est une suite géométrique.

87 La suite (u_n) est définie par $u_0 = -2$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \dfrac{2}{3}u_n - 1$.

1. À l'aide d'une calculatrice ou d'un tableur, calculez les vingt premiers termes de la suite (u_n). Quelles conjectures pouvez-vous établir ?

2. On note α la limite supposée de la suite (u_n) et on considère alors la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = u_n - \alpha$.

a) Calculez les valeurs exactes des trois premiers termes de la suite (v_n).

b) Démontrez que (v_n) est une suite géométrique.

c) Exprimez v_n en fonction de n, puis u_n en fonction de n.

3. Déduisez-en la limite de la suite (u_n).

4. (S_n) est la suite définie pour tout entier naturel n par :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + u_1 + \ldots + u_n.$$

a) Exprimez S_n en fonction de n.

b) Déduisez-en la limite de la suite (S_n).

88 La suite (u_n) est définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \dfrac{u_n - 1}{2}$.

1. Donnez les cinq premiers termes de la suite (u_n).

2. α est un nombre réel. La suite (v_n) est définie pour tout entier naturel n, par $v_n = u_n - \alpha$.

a) Démontrez que la suite (v_n) est géométrique si et seulement si $\alpha = -1$.

b) Exprimez alors v_n, puis u_n, en fonction de n.

c) Étudiez le sens de variation et la convergence éventuelle de la suite (u_n).

d) Déterminez le plus petit entier naturel n tel que u_n appartient à l'intervalle $]-1-10^{-4} ; -1+10^{-4}[$.

AVEC LES TICE

89 La population d'une ville augmente régulièrement de 5 % par an. On fait l'hypothèse que ce taux reste constant.

1. On note p_0 la population actuelle et p_n celle, prévisible, dans n années.

a) Exprimez p_n en fonction de p_0 et de n.

b) Justifiez que $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n = +\infty$.

2. L'objectif est de déterminer dans combien d'années la population aura été multipliée par 10.

Cette recherche aboutit à une équation que l'on ne sait actuellement pas résoudre (les outils seront fournis dans le chapitre 5).

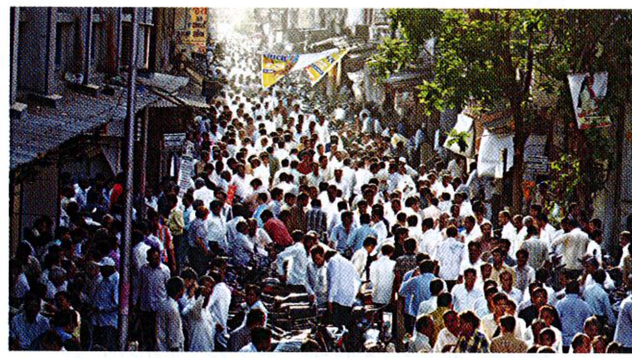
On peut cependant déjà répondre au problème posé en utilisant les outils de calculs : tableur, calculatrice, …

Dans une feuille de calcul d'un tableur, complétez le tableau ci-dessous pour afficher les valeurs successives de p_n et répondre à la question posée.

	A	B
1	n	p_n
2	1	=1,05^A2

3. a) Proposez un algorithme permettant de résoudre le problème posé. L'utilisation d'une boucle conditionnelle est adaptée à la situation.

b) Utilisez alors cet algorithme pour programmer votre calculatrice (ou Algobox) et confirmer le résultat obtenu précédemment.



La population de Surat en Inde croît de 5 % par an, ce qui représente une des plus fortes croissances mondiales. En comparaison, les populations des villes de France croissent de 0 à 2 %.

Prendre toutes les initiatives

90 Proposez deux suites (u_n) et (v_n) vérifiant $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = 3$ et pour tout entier naturel n, $u_n \neq 3v_n$.

91 Démontrez que la suite (u_n) définie pour tout entier naturel non nul n par $u_n = \dfrac{\sin(n)}{n}$ converge.

Le jour du BAC

92 Travail en autonomie

→ **Rédigez la solution de cet exercice en vous aidant du guide.**

Sur le Web
Retrouvez le corrigé de cet exercice sur le site www.transmathlycee.net/eleve-TermS

Soit (u_n) la suite numérique définie sur $\mathbb{N}$ par :
$$u_0 = 0 \quad \text{et} \quad u_{n+1} = \sqrt{3u_n + 4}.$$

1. a) Démontrez que, pour tout entier naturel n,
$$0 \leqslant u_n < 4.$$

b) Démontrez que (u_n) est croissante.

c) Déduisez-en que (u_n) converge.

2. a) Démontrez que pour tout entier naturel n,
$$4 - u_{n+1} \leqslant \frac{1}{2}(4 - u_n).$$

b) La suite (v_n) est définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = 4 - u_n$.
Démontrez que pour tout entier naturel n,
$$0 \leqslant v_n \leqslant \frac{1}{2^{n-2}}.$$

c) Déduisez-en la convergence de la suite (v_n) et sa limite, puis la limite de la suite (u_n).

▸ Analyser l'énoncé

- L'objectif de la partie **1.** est de prouver la convergence de la suite (u_n). Les questions **a)** et **b)** vous donnent les outils pour conclure.
- L'utilisation d'une calculatrice est conseillée pour avoir une idée du comportement de la suite (u_n).

▸ Analyser l'énoncé

Dans la partie **2.**, apparaît la suite auxiliaire (v_n). L'encadrement demandé en **b)** doit permettre de prouver sa convergence et de déterminer sa limite.

Guide

1. a) On pense à un raisonnement par récurrence, car la suite (u_n) est définie par récurrence.
C'est la stricte croissance de la fonction *racine carrée* qui permet de passer aux inégalités suivantes.

b) L'étude du signe de $u_{n+1} - u_n$ nécessite un changement d'écriture.
L'expression de cette différence, $\sqrt{3u_n + 4} - u_n$, incite à utiliser son expression conjuguée, $\sqrt{3u_n + 4} + u_n$.
L'étude du signe de $u_{n+1} - u_n$ se ramène ainsi à celle du trinôme du second degré $-x^2 + 3x + 4$ sur $[0\,;4]$.

c) Pour prouver la convergence de la suite, il suffit maintenant d'exploiter les propriétés de la suite (u_n) démontrées dans les questions précédentes : la suite (u_n) est croissante et majorée, donc…

2. a) Pour majorer $4 - u_{n+1}$, vous pouvez utiliser l'expression (conjuguée) $4 + \sqrt{3u_n + 4}$ en remarquant que ce nombre est, pour tout entier naturel n, supérieur ou égal à 6.

b) Traduisez le résultat précédent à l'aide de v_{n+1}, v_n, puis prouvez par récurrence que $v_n \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n v_0$, soit $v_n \leqslant \frac{1}{2^{n-2}}$. La positivité de tous les termes de la suite (v_n) est, quant à elle, facile à établir.

c) L'encadrement obtenu précédemment vous permet de conclure que la suite (v_n) converge vers 0.
Exprimez u_n en fonction de v_n pour déterminer la limite de la suite (u_n).

ZOOM sur la rédaction

Explicitez la propriété P_n et mettez bien en évidence les trois étapes d'un raisonnement par récurrence : initialisation – hérédité – conclusion.

ZOOM sur la rédaction

Pensez à justifier que, pour tout entier naturel n, $\sqrt{3u_n + 4} + u_n > 0$.

ZOOM sur la rédaction

Précisez clairement le théorème utilisé en vous assurant que les conditions d'application sont bien remplies et en les rappelant dans votre rédaction.

ZOOM sur la rédaction

Précisez, de nouveau, clairement le théorème utilisé (ici le théorème d'encadrement) et justifiez dans votre rédaction que les conditions d'application sont bien remplies.

93 ROC Restitution organisée des connaissances

Prérequis

Définition d'une suite tendant vers $+\infty$

Dire qu'une suite (u_n) a pour limite $+\infty$ signifie que tout intervalle ouvert de la forme $]A\,;+\infty[$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain indice.

1. Démonstration

Démontrez le théorème suivant :
(u_n) et (v_n) sont deux suites.
Si pour tout entier naturel n supérieur à un certain entier naturel n_0, $u_n \leqslant v_n$ et si $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = +\infty$.

2. Application

La suite (v_n) est définie par $v_0 = 1$ et pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = v_n + 2n + 3$.

a) Démontrez que, pour tout entier naturel n, $v_n \geqslant n^2$.

b) Quelle est la limite de la suite (v_n) ?

94 ROC Restitution organisée des connaissances

1. Démonstration

a) a est un réel strictement positif.

Démontrez par récurrence que pour tout entier $n \geqslant 1$,
$$(1 + a)^n \geqslant 1 + na.$$

b) Déduisez de ce qui précède la limite d'une suite géométrique de raison $q > 1$.

Énoncez le théorème ainsi démontré.

2. Application

Déterminez la limite des suites définies par :

a) $u_n = (\sqrt{3} + 1)^n$. **b)** $\dfrac{1}{1{,}01^n}$.

95 BAC

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + n - 2$.

1. Calculez u_1, u_2 et u_3.

2. a) Démontrez que pour tout entier naturel $n \geqslant 4$,
$$u_n \geqslant 0.$$

b) Déduisez-en que pour tout entier naturel $n \geqslant 5$,
$$u_n \geqslant n - 3.$$

c) Déduisez-en la limite de la suite (u_n).

3. On définit la suite (v_n) par :
$$n \in \mathbb{N},\ v_n = -2u_n + 3n - \frac{21}{2}.$$

a) Démontrez que la suite (v_n) est une suite géométrique. Précisez sa raison et v_0.

b) Déduisez-en que pour tout n de $\mathbb{N}$,
$$u_n = -\frac{25}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{3}{2}n - \frac{21}{4}.$$

c) Soit la somme S_n définie pour tout entier naturel n par :
$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k.$$
Déterminez l'expression de S_n en fonction de n.

96 BAC *(Extrait)*

On note (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par :
$$u_n = \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{2n}.$$

1. Prouvez que pour tout n de $\mathbb{N}^*$,
$$u_{n+1} - u_n = \frac{-3n - 2}{n(2n + 2)(2n + 1)}.$$

2. Déduisez-en le sens de variation de la suite (u_n).

3. Démontrez alors que (u_n) est une suite convergente.

97 BAC *(Extrait)* Vrai ou faux ?

On considère une suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ dont aucun terme n'est nul.
On définit alors la suite (v_n) sur $\mathbb{N}$ par $v_n = -\dfrac{2}{u_n}$.

Pour chaque proposition, indiquez si elle est vraie ou fausse et proposez une démonstration pour la réponse indiquée. Dans le cas d'une proposition fausse, la démonstration consistera à fournir un contre-exemple.

1. Si (u_n) est convergente, alors (v_n) est convergente.

2. Si (u_n) est minorée par 2, alors (v_n) est minorée par -1.

3. Si (u_n) est décroissante, alors (v_n) est croissante.

4. Si (u_n) est divergente, alors (v_n) converge vers 0.

98 BAC *(Extrait)*

On considère la suite (w_n) dont les termes vérifient, pour tout nombre entier naturel, $n \geqslant 1$:
$$n\,w_n = (n + 1)\,w_{n-1} + 1 \quad \text{et} \quad w_0 = 1.$$
Ce tableau donne les dix premiers termes de cette suite.

w_0	w_1	w_2	w_3	w_4	w_5	w_6	w_7	w_8	w_9
1	3	5	7	9	11	13	15	17	19

1. Détaillez le calcul permettant d'obtenir w_{10}.

2. *Dans cette question, toute trace de recherche même incomplète ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte.*

Donnez la nature de la suite (w_n). Calculez $w_{2\,009}$.

99 *D'après* BAC

On note u_n le nombre de foyers, exprimé en millions, possédant un téléviseur à écran plat l'année n.
On pose $n = 0$ en 2005, $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \dfrac{1}{10}u_n(20 - u_n)$.

1. Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;20]$ par :
$$f(x) = \frac{x}{10}(20 - x).$$

a) Étudiez les variations de la fonction f sur $[0\,;20]$.

b) Déduisez-en que pour tout x de $[0\,;10]$, $f(x) \in [0\,;10]$.

2. Prouvez par récurrence que :
pour tout n de $\mathbb{N}$, $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 10$.

3. Prouvez que la suite (u_n) est convergente et déterminez sa limite ℓ. (On admettra que cette limite est solution de l'équation $f(x) = x$.)

EXERCICES

Pour aller plus loin

100 Limite d'une suite géométrique

L'objectif est d'étudier le comportement à l'infini de la suite géométrique (q^n), avec $q \neq 0$ et $-1 < q < 1$.

On rappelle que pour $q > 1$, $\lim\limits_{n \to +\infty} q_n = +\infty$.

Le nombre q étant non nul, posons $p = \dfrac{1}{q}$.

1. On suppose que $0 < q < 1$.
Comparez alors p et 1. Déduisez-en la limite de p^n puis celle de q^n lorsque n tend vers $+\infty$.

2. On suppose maintenant que $-1 < q < 0$.
Considérez alors la suite de terme général $|q|^n$ et déduisez-en, par encadrement, le comportement en $+\infty$ de la suite (q^n).

3. Concluez.

101 Unicité de la limite d'une suite convergente

L'objet de cet exercice est de démontrer l'unicité de la limite d'une suite convergente. Pour cela, on utilise un raisonnement par l'absurde.

LOGIQUE
Raisonnement par l'absurde
➜ p. 468

Supposons que la suite (u_n) admette deux limites finies ℓ et ℓ' distincte $(\ell > \ell')$. Notons :

λ la distance (non nulle) de ℓ à ℓ' : $\lambda = \ell - \ell'$,

I_1 l'intervalle de centre ℓ et de rayon $\dfrac{\lambda}{3}$,

I_2 l'intervalle de centre ℓ' et de rayon $\dfrac{\lambda}{3}$.

1. a) Représentez ces deux intervalles sur un axe.

b) Prouvez que I_1 et I_2 sont disjoints.

Aide
Prenez un nombre quelconque de I_2 et prouvez qu'il ne peut pas appartenir à I_1.

2. Par définition de la limite ℓ, que pouvez-vous dire de l'ensemble des termes de la suite qui n'appartiennent pas à I_1 ? De l'ensemble des termes de la suite qui appartiennent à I_2 ?
Concluez.

102 La suite (u_n) est définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{\sqrt{u_n^2 + 1}}$.

1. Prouvez que pour tout entier naturel n, $u_n > 0$.

2. Prouvez que la suite (u_n) est décroissante.

3. Justifiez la convergence de la suite (u_n).

4. a) Donnez les valeurs exactes des cinq premiers termes de la suite.
Que pouvez-vous conjecturer concernant l'expression de u_n en fonction de n ?

b) Démontrez votre conjecture par récurrence.

5. Quelle est la limite de la suite (u_n) ?

103 La suite (u_n) est définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \sqrt{3u_n}$.

L'étude faite dans l'exercice **82** a permis d'établir que cette suite est croissante et bornée ($\forall n \in \mathbb{N}$, $1 \leqslant u_n \leqslant 3$), donc convergente.

On conjecture que sa limite est 3 et on étudie la suite (v_n) définie par $v_n = 3 - u_n$.

1. Vérifiez que pour tout entier naturel n,

$$v_{n+1} = \sqrt{3}\,\frac{3 - u_n}{\sqrt{u_n} + \sqrt{3}}.$$

2. Démontrez que pour tout entier naturel n,

$$v_{n+1} \leqslant \frac{\sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}} v_n.$$

3. Démontrez, par récurrence, que pour tout entier naturel n, $v_n \leqslant 2\left(\dfrac{\sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}}\right)^n$.

4. Déduisez-en $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

104 Retour sur la méthode de Héron

Dans l'activité 3, on a conjecturé que le nombre irrationnel $\sqrt{2}$ est la limite d'une suite de nombres rationnels.
On se propose, dans cet exercice, de démontrer cette conjecture.

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{2}{x}\right).$$

1. a) Justifiez que la fonction f est dérivable pour tout x de $\mathbb{R}^*$.

b) Démontrez que pour tout x de $\mathbb{R}^*$:

$$f'(x) = \frac{(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})}{2x^2}.$$

Déduisez-en le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}^*$.

2. La suite (u_n) est définie par $u_0 = \dfrac{3}{2}$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$.

a) Calculez u_1 et u_2. (Donnez les résultats sous la forme de fractions, puis sous forme décimale arrondie à 10^{-5}.)

b) Démontrez par récurrence que pour tout entier naturel n, $\sqrt{2} < u_{n+1} < u_n \leqslant \dfrac{3}{2}$.

Déduisez-en que la suite (u_n) est convergente.

c) Démontrez que pour tout n de $\mathbb{N}$,

$$u_{n+1} - \sqrt{2} < \frac{1}{2}(u_n - \sqrt{2}).$$

d) Déduisez-en par récurrence que pour tout n de $\mathbb{N}$,

$$0 < u_n - \sqrt{2} \leqslant \frac{1}{2^n}(u_0 - \sqrt{2}).$$

e) Déduisez-en $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

105 Étudiez le comportement à l'infini de la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n non nul par :

$$u_n = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} \mathrm{E}\left(\frac{k}{2}\right),$$

où E est la fonction partie entière qui à tout nombre x associe le nombre entier $\mathrm{E}(x)$ tel que $\mathrm{E}(x) \leqslant x < \mathrm{E}(x) + 1$ c'est-à-dire le plus grand entier inférieur ou égal à x.

PROLONGEMENTS DU TD 41

Ces exercices prolongent le TD 41 : ils proposent d'autres approximations de réels à l'aide de suites.

106 Le nombre d'or

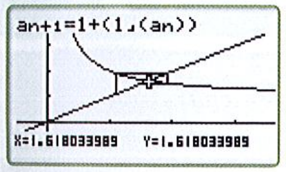
A. Calculs et conjectures

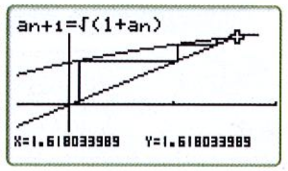
1. Définissez chacune des deux suites récurrentes (u_n) et (v_n) dont le calcul des premiers termes apparaît respectivement dans les colonnes A et B ($u_1 = v_1 = 1$).

◇	A	B
1	1	1
2	=1+1/A1	=RACINE(1+B1)
3	=1+1/A2	=RACINE(1+B2)

2. À l'aide d'un tableur ou d'une calculatrice, calculez les trente premiers termes de chacune des suites.

3. Les suites vous semblent-elles monotones ? Vous semblent-elles convergentes ?
Les vues d'écran de calculatrices ci-dessous confirment-elles vos conjectures ?





B. Démonstration

1. a) Démontrez, par récurrence, que pour tout entier naturel $n \geqslant 2$, $\dfrac{3}{2} \leqslant u_n \leqslant 2$.

b) Si la suite (u_n) converge, on note Φ sa limite.

On admet ici que Φ est la solution positive de l'équation $x = 1 + \dfrac{1}{x}$ (la démonstration sera proposée dans le chapitre 4).

Utilisez les graphiques des copies d'écran ci-dessus pour donner une valeur approchée du nombre Φ.

c) Calculez Φ et vérifiez que :

$$\frac{3}{2} \leqslant \Phi \leqslant 2.$$

d) Démontrez que pour tout $x \geqslant \dfrac{3}{2}$,

$$\left|\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \left(1 + \frac{1}{\Phi}\right)\right| \leqslant \frac{4}{9}|x - \Phi|.$$

e) Déduisez de ce qui précède que pour tout entier naturel $n \geqslant 2$, $|u_{n+1} - \Phi| \leqslant \dfrac{4}{9}|u_n - \Phi|$,

puis démontrez par récurrence que pour tout entier naturel $n \geqslant 2$, $|u_n - \Phi| \leqslant \left(\dfrac{4}{9}\right)^{n-2}|u_2 - \Phi|$.

f) Démontrez alors que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \dfrac{1 + \sqrt{5}}{2}$.

Ce nombre Φ est appelé « **nombre d'or** ».

2. a) Démontrez par récurrence que pour tout entier naturel $n \geqslant 2$, $\sqrt{2} \leqslant v_n \leqslant \Phi$.

b) On considère alors la suite (w_n) définie pour tout naturel non nul n par $w_n = \Phi - v_n$.

Vérifiez que $\Phi^2 = \Phi + 1$.

c) Justifiez que pour tout entier naturel non nul n, $w_{n+1} = \dfrac{\Phi - v_n}{\Phi + \sqrt{1 + v_n}}$ puis déduisez-en que pour tout entier naturel non nul n, $w_{n+1} = \dfrac{w_n}{3}$.

d) Démontrez par récurrence que :

$$\forall n \text{ de } \mathbb{N}^*,\ w_n \leqslant \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}.$$

e) Déduisez-en que $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = \dfrac{1 + \sqrt{5}}{2}$.

Commentaire. *Les termes de la suite (u_n) sont des nombres rationnels (quotients d'entiers), ceux de la suite (v_n) sont des nombres irrationnels (qui ne s'expriment pas sous la forme de quotients d'entiers). Les deux suites ont pourtant la même limite : le nombre irrationnel Φ.*

107 Le nombre e

La suite (u_n) est définie pour tout entier naturel n non nul par $u_n = 1 + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}$, où $k! = 1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times k$.

1. Calculs et conjecture

a) Vérifiez que les formules données dans la colonne B du tableau ci-dessous permettent, en recopiant vers le bas, de déterminer les premiers termes de la suite (u_n).

	A	B
1	n	u_n
2	1	=1+1/FACT(A2)
3	2	=B2+1/FACT(A3)

b) Faites afficher les trente premiers termes de la suite (u_n). Que pouvez-vous conjecturer quant au comportement de la suite (u_n) en $+\infty$?

2. Démonstrations

a) Prouvez la monotonie de la suite (u_n).

b) Démontrez que : $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{k!} \leqslant \dfrac{1}{2^{k-1}}$.

c) Déduisez-en que la suite (u_n) est majorée par 3.

d) Les résultats obtenus vous permettent-ils de confirmer vos conjectures ?

Commentaire. *on note e la limite de cette suite (e ≈ 2,718). Vous retrouverez ce nombre e dans le chapitre 3.*

EXERCICES