

Exercice n°3 : (30 minutes)

On considère l'application f définie par $f: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \frac{1}{5} \begin{pmatrix} x + 2y \\ 2x + 4y \end{pmatrix}$

Partie I : Etude d'une application

1. Montrer que l'application est linéaire.
2. Montrer que $f \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}))$. (Rappel $\mathcal{L}(\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}))$ désigne l'ensemble des endomorphismes de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$)
3. Déterminer $\text{Ker}(f)$ et $\text{Im}(f)$. f est elle bijective ?
4. Montrer que $f \circ f = f$.

Partie II : Entraînement au système et polynôme annulateur

1. Résoudre dans \mathbb{R}^3 le système suivant :

$$S = \begin{cases} x + y + 2z = 5 \\ x - y - z = 1 \\ x + z = 3 \end{cases}$$

2. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 7 & 5 \\ -6 & -4 \end{pmatrix}$
 - a. Calculer la matrice $A^2 - 3A + 2I_2$
 - b. En déduire que A est inversible et calculer A^{-1}