

Chap I: Espaces de Sobolev: Propriétés fondamentales

Soit $D \subset \mathbb{R}^d$, $d \in \mathbb{N}^*$, un ouvert borné, de frontière ∂D .
Soit $L^2(D)$ l'espace des fonctions (à valeurs complexes) mesurables (Lebesgue), de carré intégrable sur D relativement à la mesure de Lebesgue,

$$\text{i.e. } \int_D dx |f(x)|^2 < +\infty \quad (x \in \mathbb{R}^d: \text{produit générique dx : mesure de Lebesgue})$$

Rappel: $L^2(D)$ est un espace de Hilbert, relativement aux générateurs usuelles, et au produit intérieur:

$$(f, g)_2 = \int_D dx f(x) \overline{g(x)} \quad \text{conjugaison complexe.} \quad \forall f, g \in L^2(D)$$

La norme correspondante est:

$$\|f\|_2 = (f, f)_2^{1/2} = \left(\int_D dx |f(x)|^2 \right)^{1/2}$$

On va s'intéresser à certains sous-espaces de distributions de $L^2(D)$. On commence par définir l'espace de Sobolev $H^1(D)$.

Définition:

On note $H^1(D)$ le sous-ensemble de $L^2(D)$ se composant de toutes les fonctions $f \in L^2(D)$ pour lesquelles il existe d fonctions $f_1, f_2, \dots, f_d \in L^2(D)$ telles que:

$$\int_D dx f_i(x) \Phi(x) = - \int_D dx f(x) \Phi_{,i}(x), \quad \text{quelle que}$$

soit $\Phi \in C_c^1(D)$ (= fonctions une fois continuellement dérivées à support compact sur D)

(Notation : $\Phi_{,i} \equiv \frac{\partial \Phi}{\partial x^i}$ = dérivée partielle de Φ suivant la i ème direction de coordonnées).

Proposition :

$H^1(D)$ est un sous-espace vectoriel de $L^2(D)$

Preuve :

(i) $f \equiv 0 \in H^1(D)$.

(ii) Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, $f, g \in H^1(D)$; on veut montrer que $\alpha f + \beta g \in H^1(D)$

Par hypothèse : $\int_D dx g(x) \Phi(x) = - \int_D dx g(x) \Phi_{,i}(x)$
et

$$\forall i \in \{1, \dots, d\}, \forall \Phi \in C_c^\infty(D).$$

$$\begin{aligned} \text{Alors : } \int_D dx (\alpha f(x) + \beta g(x)) \Phi(x) \\ = \alpha \int_D dx f(x) \Phi(x) + \beta \int_D dx g(x) \Phi(x) \\ = - \alpha \int_D dx f(x) \Phi_{,i}(x) - \beta \int_D dx g(x) \Phi_{,i}(x) \end{aligned}$$

Or $\alpha f + \beta g \in L^2(D)$, de même $\alpha f_{,i} + \beta g_{,i} \in L^2(D)$.
donc la relation précédente permet d'identifier $\alpha f + \beta g$ à la dérivée généralisée de $\alpha f + \beta g$ suivant la i ème direction de coordonnées.

ie :

$$(\alpha f + \beta g)_{,i} = \alpha f_{,i} + \beta g_{,i}$$

Terminologie : Pour $f \in H^1(D)$, les $f_{,i}$ sont appelés les dérivées généralisées (ou les distributions) de f .

Notation: (1) pour chaque $i \in \{1, \dots, d\}$, on note $\mathcal{J}_i = \mathcal{J}_{x_i} = \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial x_i}$ la i -ème dérivée généralisée.

(2) On note $\nabla \mathcal{J} = (\mathcal{J}_{x_1}, \dots, \mathcal{J}_{x_d})$ le gradient généralisé (faible, distribution) de $\mathcal{J}$.

On introduit sur $H^1(D)$ une topologie de la façon suivante:
Soient $\mathcal{J}, g \in H^1(D)$, on définit un produit intérieur dans $H^1(D)$ de la façon suivante:

Définition: $(\mathcal{J}, g)_{1,2} = (\mathcal{J}, g)_2 + \sum_{i=1}^d (\mathcal{J}_{x_i}, g_{x_i})_2$

ordre de dérivation

La norme correspondante est: $\|\mathcal{J}\|_{1,2} = (\mathcal{J}, \mathcal{J})_{1,2}^{1/2} = (\|\mathcal{J}\|_2^2 + \sum_{i=1}^d \|\mathcal{J}_{x_i}\|_2^2)^{1/2}$

Théorème:

Relativement aux opérations usuelles et à la topologie introduite ci-dessus, $H^1(D)$ est un espace de Hilbert.

Preuve:

Soit $(\mathcal{J}_N)_{N \in \mathbb{N}^*}$ une suite de Cauchy dans $H^1(D)$.

Ceci signifie que:

$$\|\mathcal{J}_M - \mathcal{J}_N\|_{1,2}^2 = \|\mathcal{J}_M - \mathcal{J}_N\|_2^2 + \sum_{i=1}^d \|\mathcal{J}_{M,x_i} - \mathcal{J}_{N,x_i}\|_2^2$$

$\rightarrow 0$

$M, N \rightarrow +\infty$

On en déduit:

(i) $\|\mathcal{J}_M - \mathcal{J}_N\|_2 \rightarrow 0$: $(\mathcal{J}_N)_{N \in \mathbb{N}^*}$ est Cauchy dans $L^2(D)$.

(ii) $\|\mathcal{J}_{M,x_i} - \mathcal{J}_{N,x_i}\|_2 \rightarrow 0 \quad \forall i \in \{1, \dots, d\}$:

$(\mathcal{J}_{N,x_i})_{N \in \mathbb{N}^*}$ est de Cauchy dans $L^2(D) \quad \forall i$

Comme $L^2(D)$ est complet, il existe des fonctions $g, g_1, g_2, \dots, g_i \in L^2(D)$ telle que:

$$g_N \rightarrow g \text{ fortement dans } L^2(D) \quad (\text{ie: } \|g_N - g\|_2 \rightarrow 0 \text{ si } N \rightarrow +\infty)$$

$$g_{N,x_i} \rightarrow g_i \text{ fortement dans } L^2(D) \quad (\forall i)$$

$$\text{Or: } \int_D dx \, g_{N,x_i}(x) \Phi(x) = - \int_D dx \, g_N(x) \Phi_{x_i}(x).$$

$$\forall N \in \mathbb{N}^*, \forall i \in \{1, \dots, d\}, \forall \Phi \in C_c^\infty(D).$$

De plus:

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \int_D dx \, g_N(x) \Phi_{x_i}(x) = \int_D dx \, g(x) \Phi_{x_i}(x) \quad (\text{convergence forte})$$

$$\text{car } \int_D dx \, |g_N(x) - g(x)| |\Phi_{x_i}(x)| \leq \text{Schwarz} \|g_N - g\|_2 \|\Phi_{x_i}\|_2 \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0$$

Un argument similaire montre:

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \int_D dx \, g_{N,x_i}(x) \Phi(x) = \int_D dx \, g_i(x) \Phi(x)$$

On passe ainsi à la limite dans (*).

$$\int_D dx \, \underbrace{g_i(x)}_{\in L^2(D)} \Phi(x) = - \int_D dx \, g(x) \Phi_{x_i}(x), \quad \left(\begin{array}{c} \forall \Phi \\ \forall i \end{array} \right)$$

$$\text{Donc } g \in H^1(D) \text{ et } \|g_N - g\|_{1,2} \rightarrow 0 \quad \text{si } N \rightarrow +\infty.$$

Remarque:

Par définition des normes dans $L^2(D)$ et $H^1(D)$, on a immédiatement: $\|g\|_2 \leq \|g\|_{1,2}, \forall g \in H^1(D)$.

On exprime ceci en disant que $H^1(D)$ est plongé (injecté) dans $L^2(D)$ de façon continue (inclusion des ensembles + on lui donne une topologie propre). (Soit $\text{Id}: H^1(D) \rightarrow L^2(D)$ alors on a $\|g\|_2 \leq \|g\|_{1,2}$ donc Id est continu)

Plus précisément : Soit $I: H^1(D) \rightarrow L^2(D)$

défini par $Ig = g$

I est linéaire ; de plus $\|Ig\|_2 \leq \|g\|_{1,2}$

ie: I est une transformation linéaire continue ($\equiv$ bornée)

On a en fait beaucoup plus,
en effet si la frontière ∂D est suffisamment régulière, on peut démontrer que I est compacte (cf: R. Adams, "Sobolev Spaces").

Implication pratique de la compacité de I :

Toute partie bornée de $H^1(D)$ est relativement compacte dans $L^2(D)$.
En particulier, de toute suite bornée de $H^1(D)$, on peut extraire une sous-suite fortement convergente dans $L^2(D)$.

On va donner une application de cette propriété.

L'inégalité de Poincaré - Wirtinger :

Proposition : Soit $D \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert borné, connexe de frontière ∂D suffisamment régulière. Alors il existe une constante $C \in \mathbb{R}_+^*$ telle que l'inégalité :

$$\left\| g - \frac{1}{|D|} \int_D dx g(x) \right\|_2 \leq C \|\nabla g\|_2$$

quelle que soit $g \in H^1(D)$.

Preuve : Supposons (*) soit fausse ; il existe alors une suite $(g_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \subseteq H^1(D)$ telle que :

$$\left\| g_n - \frac{1}{|D|} \int_D dx g_n(x) \right\|_2 > n \|\nabla g_n\|_2 \quad (**)$$

$$\text{Notons } Qg = \frac{1}{|D|} \int_D dx g(x)$$

mesure de Lebesgue de D .

Alors l'inégalité précédente se réécrit

$$\|g_N - Q g_N\|_2 > N \|\nabla g_N\|_2$$

Introduisons la suite $(g_N^*)_{N \in \mathbb{N}^*}$ définie par:

$$g_N^* = \frac{g_N - Q g_N}{\|g_N - Q g_N\|_2}$$

Montrons qu'elle est bornée dans $H^1(D)$

On a:

(a) $(g_N^*)_{N \in \mathbb{N}^*} \subseteq H^1(D)$

(b) $Q g_N^* = 0 \quad (\forall N \in \mathbb{N}^*) \quad (Q(Q g_N) = Q(g_N) \text{ évident!!})$

(c) $\|g_N^*\|_2 = 1, \forall N \in \mathbb{N}^*.$

(d) $\nabla g_N^* = \frac{\nabla g_N}{\|g_N - Q g_N\|_2} \quad \forall N \in \mathbb{N}^* \quad \text{GROUPE LOGIQUE}$

Par (**) et (d): $\|\nabla g_N^*\|_2 < \frac{1}{N}, (\forall N \in \mathbb{N}^*) \quad (\text{logique})$

De cette propriété et de (c) on déduit que la suite $(g_N^*)_{N \in \mathbb{N}^*}$ est bornée dans $H^1(D)$; en effet:

$$\begin{aligned} \|g_N^*\|_{1,2}^2 &= \|g_N^*\|_2^2 + \sum_{i=1}^d \|g_{N,x_i}^*\|_2^2 = 1 + \sum_{i=1}^d \int_D dx \, |g_{N,x_i}^*(x)|^2 \\ &= 1 + \int_D dx \, |\nabla g_N^*(x)|^2 = 1 + \|\nabla g_N^*\|_2^2 \\ &\leq 1 + \frac{1}{N^2} \leq 2 \end{aligned}$$

i.e. $\boxed{\|g_N^*\|_{1,2} \leq \sqrt{2} \text{ (indépendamment de } N)}$

* Par la compacité du plongement:

$$\text{I: } H^1(D) \rightarrow L^2(D).$$

On peut supposer, quitte à passer à une sous-suite, que:

$$g_N^* \xrightarrow{N \rightarrow \infty} g^* \text{ faiblement dans } L^2(D), \text{ i.e. } \|g_N^* - g^*\|_2 \rightarrow 0$$

Pour g^* , on a :

(1) $\|g^*\|_2 = 1$, par (c)

(2) $Qg^* = 0$, par (b), car $Qg_N^* \rightarrow Qg^*$

en effet : $|Qg_N^* - Qg^*| \leq \frac{1}{|D|} \int_D dx |g_N^*(x) - g^*(x)|$
 $\stackrel{\text{Schwarz}}{\leq} |D|^{\frac{1}{2}} \|g_N^* - g^*\|_2 \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0$

On va conclure en montrant que g^* possède un gradient distributionnellement nul ; en effet

On a :

$$\int_D dx g_{N, x_i}^*(x) \Phi_{x_i}(x) - \int_D dx g^*(x) \Phi_{x_i}(x), (\forall i, \forall \Phi)$$

$$\begin{array}{ccc} \downarrow N \rightarrow +\infty & & \downarrow N \rightarrow +\infty \\ 0 & = & - \int_D dx g^*(x) \Phi_{x_i}(x) \end{array}$$

$$\sum_{i=1}^d \|g_{N, x_i}^*\|_2^2 \|\nabla g_N^*\|_2^2 \leq \frac{1}{N^2}$$

$$\forall \|g_{N, x_i}^*\|_2^2 \Rightarrow \|g_{N, x_i}^*\|_2 \leq \frac{1}{N}$$

donc :

$$\left| \int_D dx g_{N, x_i}^*(x) \Phi_{x_i}(x) \right| \stackrel{\text{Schwarz}}{\leq} \|g_{N, x_i}^*\|_2 \|\Phi_{x_i}\|_2 \leq \frac{\|\Phi_{x_i}\|_2}{N} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0$$

On a donc :

$$\int_D dx g^*(x) \Phi_{x_i}(x) = 0 \quad (= \int_D dx 0 \cdot \Phi_{x_i}(x))$$

$$\forall i \in \{1, \dots, d\}, \quad \forall \Phi \in C_c^\infty(D)$$

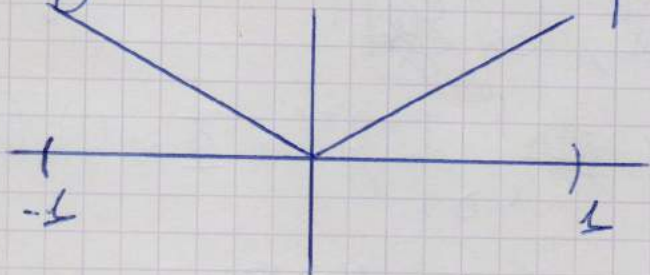
$$\Rightarrow f_{x_i}^* = 0 \quad \text{i.e.} \quad \nabla g^* = 0$$

Comme D est connexe, on en conclut que $g^* = \text{constante (presque partout)}$
 Alors : $Qg^* = \text{constante} = \frac{1}{|D|} \int_D dx \, C^* = \boxed{C^* = 0} = C^*$
 D'où $g^* = 0$ dans $L^2(D)$, ce qui contredit le fait que $\|g^*\|_2 = 1$.

Exemples:

(a) Soit $D = (-1, 1)$

Soit $g: D \rightarrow \mathbb{R}^+$ donnée par $g(x) = |x|$



A-t-on $g \in H^1(D)$?

1) On a $g \in L^2(D)$

2) On cherche une fonction $\phi \in L^2(D)$ telle que:

$$\int_{-1}^1 dx \, g(x) \phi'(x) = - \int_{-1}^1 dx \, g(x) \phi(x), \quad \forall \phi \in C_c^1(D)$$

On a:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 dx \, g(x) \phi'(x) &= \int_{-1}^1 dx \, |x| \phi'(x) \\ &= \int_{-1}^0 dx \, x \phi'(x) + \int_0^1 dx \, x \phi'(x) \\ &= \underbrace{-[x \phi(x)]_{-1}^0}_{=0} + \int_{-1}^0 dx \, \phi(x) \\ &\quad + \underbrace{[x \phi(x)]_0^1}_{=0} - \int_0^1 dx \, \phi(x) \\ &= \int_{-1}^0 dx \, \phi(x) - \int_0^1 dx \, \phi(x) \end{aligned}$$

$\int_{-1}^1 g(x) dx$

Soit $g: D \rightarrow \mathbb{R}$ par:

$$g(x) = \text{Sgn } h(x) = \begin{cases} +1 & \text{si } x \in (0, 1) \\ -1 & \text{si } x \in (-1, 0) \end{cases}$$

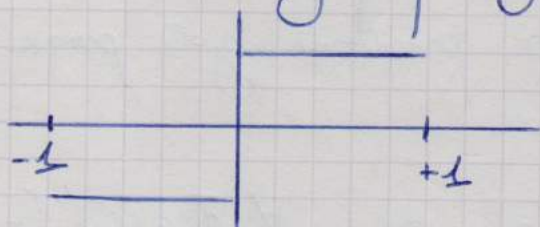
Donc $\int_{-1}^1 dx |x| \Phi'(x) = - \int_{-1}^1 dx \text{sgn}(x) \Phi(x)$

$\forall \Phi \in C_c^1(D)$. Donc:

on conduit $\begin{matrix} x \mapsto \\ \text{on conduit} \end{matrix} \begin{matrix} g(x) = \text{Sgn}(h(x)) \\ g' \in H^1(D) \end{matrix}$ et comme $x \rightarrow \text{sgn}(h(x)) \in L^2(D)$,

Autre exemple: $D = (-1, +1)$

et $g: D \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(x) = \text{Sgn}(h(x))$



A-t-on $g \in H^1(D)$?

On cherche donc $g \in L^2(D)$ telle que:

$$(*) \int_{-1}^{+1} dx g(x) \Phi'(x) = - \int_{-1}^{+1} dx g(x) \Phi(x), \forall \Phi \in C_c^1(D)$$

On a:

$$\int_{-1}^{+1} dx g(x) \Phi'(x) = - \int_{-1}^0 dx \Phi'(x) + \int_0^1 dx \Phi'(x) = -2\Phi(0)$$

Supposons donc qu'il existe $g \in L^2(D)$ telle que (*) ait lieu;

alors, $(**) \int_{-1}^1 dx g(x) \Phi(x) = 2\Phi(0) \quad (\forall \Phi \in C_c^1(D))$

On va montrer que ceci est impossible. En effet, prenons en particulier une fonction test $\Phi \in C_c^1((-1, 0))$

On déduit de (***) que $\int_{-1}^0 dx g(x) \phi(x) = 0$

Au encore : $(g, \phi)_{L^2([-1,0])} = 0$

ie : g est orthogonale (au sens de $L^2([-1,0])$) à $\phi \in C_c^1([-1,0])$

Comme $C_c^1([-1,0])$ est dense dans $L^2([-1,0])$, on déduit que la restriction de g à $(-1,0)$ est nulle presque partout.

On refait le même argument en prenant dans (***) $\phi \in C_c^1(0,+1)$
Alors de (***), on a :

$$(g, \phi)_{L^2(0,1)} = \int_0^1 dx g(x) \phi(x) = 0, \forall \phi \in C_c^1(0,1)$$

d'où $g=0$ presque partout dans $(0,1)$

On conclut des 2 arguments précédents $g=0$ presque partout dans $(-1,+1)$ il s'en suit que :

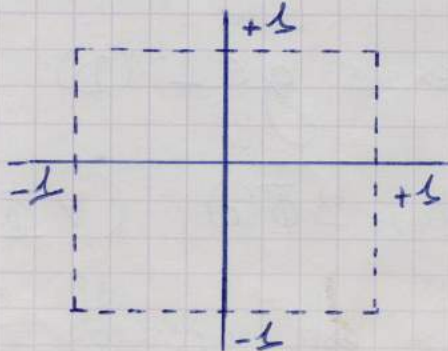
$$\int_{-1}^{+1} dx g(x) \phi(x) = 2\phi(0) = 0 \quad \forall \phi \in C_c^1(-1,+1), \text{ une}$$

contradiction

Donc $g \notin H^1(D)$ en effet $g' = \delta_0 \in \mathcal{D}'(D)$.

Un autre exemple :

Soit $D = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : -1 < x_1 < +1 ; -1 < x_2 < +1\}$



Soit $g: D \rightarrow \mathbb{R}$ définie par:

$$g(x) = g(x_1, x_2) = \operatorname{Sgn}(x_1) + \operatorname{Sgn}(x_2)$$

On a $g \in L^2(D)$

* Montrer qu'il n'y a pas de dérivées partielles généralisées du premier ordre $g_{x_1}, g_{x_2} \in L^2(D)$.

(Donc $g \notin H^1(D)$).

Pan contre, il existe $g_{x_1}, g_{x_2} \in L^2(D)$,
en fait: $g_{x_1}, g_{x_2} \equiv 0$

(Rappel: $\int_D dx \, g_{x_1} x_2(x) \Phi(x) = \int_D dx \, g(x) \Phi_{x_1, x_2}(x)$, $\forall \Phi \in C_c^2(D)$).

Autre notation pour $H^1(D)$: $W^{1,2}(D)$
rappelle $L^2(D)$
ordre de dérivation.

Plus généralement, on peut introduire les espaces de Sobolev

$$W^{m,p}(D) \ni g$$

telles que: $D^\alpha g \in L^p(D)$, $p \in [1, +\infty]$,

$$\text{où } D^\alpha g = \frac{\partial^{|\alpha|} g}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_d^{\alpha_d}}, \quad \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d) \in \mathbb{N}^d$$
$$|\alpha| = \sum_{i=1}^d \alpha_i.$$

Ceci signifie que $\int_D dx \, (D^\alpha g(x) \Phi(x)) = (-1)^{|\alpha|} \int_D dx \, g(x) D^\alpha \Phi(x)$
($\forall \Phi \in C_c^\infty(D)$) $\Leftrightarrow \mathbb{L}'$

On peut montrer que $W^{m,p}(D)$ est un espace de Banach,
relativement à la norme $\|g\|_{m,p} = \left\{ \sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|D^\alpha g\|_p^p \right\}^{1/p}$

Si $p=2$, on écrit aussi $W^{m,2}(D) = H^m(D)$

Par exemple: $m=1, p=2$:

$$\begin{aligned} \|g\|_{1,2} &= \left\{ \|g\|_2^2 + \sum_{\substack{|a| \leq m \\ |a|=1}} d \|D^a g\|_2^2 \right\}^{1/2} \\ &= \left\{ \|g\|_2^2 + \sum_{i=1}^d \|g_{x_i}\|_2^2 \right\}^{1/2} \end{aligned}$$

(ex) $m=2, p=2$:

$$\|g\|_{2,2} = \left\{ \|g\|_2^2 + \sum_{i=1}^d \left(\|g_{x_i}\|_2^2 + \sum_{j=1}^d \|g_{x_i x_j}\|_2^2 \right) \right\}^{1/2}$$

Du point de vue des théorèmes de plongement (immersion, injection, etc), le cas unidimensionnel est particulièrement simple: supposons $d=1$, et D un intervalle borné.

Théorème

L'espace de Sobolev $H^1(D)$ est plongé de façon compacte dans $C(\bar{D})$, l'espace de Banach des fonctions continues sur $\bar{D}$ muni de la topologie uniforme. On note:

$$H^1(D) \hookrightarrow C(\bar{D})$$

Preuve:

Soit $g \in H^1(D)$; montrons d'abord que g coïncide presque partout avec une fonction $\tilde{g} \in C(\bar{D})$.

Soit $g \in L^2(D)$ la dérivée généralisée de g .
on a: $\int_D dx g(x) \Phi(x) = - \int_D dx g(x) \Phi(x)$, ($\forall \Phi \in C_c^1(D)$)

La théorie de Lebesgue nous enseigne encore que F est presque partout dérivable sur D et que: donc F continue $F \in C^0(D)$

$F' = g$ presque partout sur D .

De plus: $\int_D dx F'(h) \Phi(h) = - \int_D dx F(h) \Phi'(h), (\forall \Phi \in C_c^1(D))$

En combinant tous ces résultats, on a:

$$\int_D dx (g(h) - F'(h)) \Phi(h) = 0, \forall \Phi \in C_c^1(D)$$

On en déduit que $(g - F)' = 0$ (dérivée généralisée nulle)

d'où puisque D est connexe:

$g - F = c$ (constante) presque partout dans D ,

Soit: $g(h) = c + F(h)$, presque partout.

On choisit donc: $\tilde{g} = c + F$.

Ceci prouve que $H^1(D) \subset C(D)$

* De plus, il existe une constante $\hat{C} \in \mathbb{R}_+^+$ telle que:

Dém:

En effet, on a $\tilde{g} = c + F$; prenons le cas où $c = 0$:

$\tilde{g} = F$, alors:

$$\begin{aligned} |g(h)| &= \left| \int_{x_0}^x dy g(y) \right| \leq \int_{x_0}^x dy |g(y)| \\ &\leq \left(\int_{x_0}^x dy |g(y)|^2 \right)^{1/2} \left(\int_{x_0}^x dy \right)^{1/2} \\ &\stackrel{\text{Swarz}}{\leq} |D|^{1/2} \left(\int_D dy |g(y)|^2 \right)^{1/2} \\ &= |D|^{1/2} \|g\|_2 \leq |D|^{1/2} \left(\|g\|_2^2 + \|g'\|_2^2 \right)^{1/2} \\ &= |D|^{1/2} \|g\|_{1,2} \text{ indépendante de } x. \end{aligned}$$

On a donc le résultat désiré $\|g\|_\infty \leq |D|^{1/2} \|g\|_{1,2}$

Ceci prouve déjà que le plongement de $H^1(D) \rightarrow C(D)$ est continu

(le cas où $C \neq 0$ peut se traiter de façon (presque!) similaire)
Il reste à montrer la compacité du plongement; Soit
 $(f_N)_{N \in \mathbb{N}^*} \subseteq H^1(D)$ une suite bornée dans $H^1(D)$.

$$\|f_N\|_{1,2} \leq K \text{ (constante indép. de } N)$$

Il en résulte:

(a) $(f_N)_{N \in \mathbb{N}^*}$ est équibornée dans $C(D)$;
en effet, on a:

$$\|f_N\|_{\infty} \leq |D|^{1/2} \|f_N\|_{1,2} \leq |D|^{1/2} K \text{ indép. de } N$$

(b) $(f_N)_{N \in \mathbb{N}^*}$ est équicontinue dans $C(D)$

en effet: $f_N(x) = C + \int_{x_0}^x dy f'_N(y)$

$$f_N(x^*) = C + \int_{x_0}^{x^*} dy f'_N(y)$$

$$\text{d'où } f_N(x) - f_N(x^*) = \int_{x^*}^x dy f'_N(y).$$

$$\text{d'où } |f_N(x) - f_N(x^*)| \leq \int_{x^*}^x dy |f'_N(y)|$$

$$\leq \|f'_N\|_2 |x - x^*|^{1/2}$$

Schwarz

$$\leq \|f_N\|_{1,2} |x - x^*|^{1/2}$$

$$\leq K |x - x^*|^{1/2}$$

D'où l'équicontinuité cherchée car K ne dépend pas de N .

(a) & (b), via le théorème d'Arzela-Ascoli implique la compacité
du plongement $H^1(D) \hookrightarrow C(D)$

Corollaire:

Sous les conditions précédentes, les plongements de
 $H^1(D) \hookrightarrow L^p(D)$ sont compacts, $\forall p \in [1, +\infty)$

Preuve:

$$H^1(D) \hookrightarrow C(\bar{D}) \xrightarrow{\text{continue}} L^p(D)$$

$\downarrow$
compact

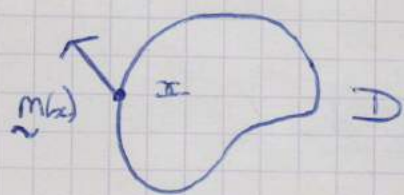
donc la composition est compacte

⚠ Rq: Ces résultats ne persistent pas si $d > 1$!

II) Une introduction à la théorie des équations elliptiques:

Soit $D \subset \mathbb{R}^d$, $d \in \mathbb{N}^*$ quelconque
ouvert borné (connexe), de frontière suffisamment régulière.
On considère des équations aux dérivées partielles du type:

$$(*) \begin{cases} \operatorname{div}(k(x) \nabla u(x)) - a(x)u(x) = f(x), & x \in D \\ \frac{\partial u(x)}{\partial n(x)} = 0, & x \in \partial D. \end{cases}$$



où: k, a, f sont donnés avec:
 $k \in C^1(\bar{D}, \mathbb{R}_+^*)$ (on note $\underline{k} = \min_{x \in \bar{D}} k(x)$)
 $a \in C(\bar{D}, \mathbb{R})$, a non identiquement nulle.
 $f \in L^2(D)$

($\bar{D}$: fermeture de $D \equiv$ compact)

N.B.: (Tous les espaces fonctionnels sont supposés réels)

Exemple: Si $k \equiv 1$, on a: l'équation devient $\begin{cases} \Delta u(x) - u(x) = f(x) & x \in D \\ \frac{\partial u(x)}{\partial n(x)} = 0, & x \in \partial D \end{cases}$
 $a \equiv 1$

Problème: Comment définir de bonnes notions de solution pour (P)?

Supposons momentanément que $f \in C(\bar{D}, \mathbb{R})$ et que (P) ait une solution $u \in C^2(\bar{D})$

Ceci signifie que (P) est satisfait au sens classique sur $\bar{D}$.

Soit $v \in C^1(\bar{D})$ et multiplions les 2 membres de l'équation par $v(x)$ et intégrons le résultat sur D ; on obtient;

$$\operatorname{div}(k(x) \nabla u(x)) - a(x)u(x) = f(x), \quad (\forall x \in D)$$

$$\Leftrightarrow \int_D f(x) v(x) dx = \int_D \operatorname{div}(k(x) \nabla u(x)) v(x) dx + \int_D a(x)u(x)v(x) dx$$

D'autre part: $\operatorname{div}(v_{hc}) (k_{hc}) \nabla u_{hc}) = v_{hc}) \operatorname{div}(k_{hc}) \nabla u_{hc}) + \langle \nabla v_{hc}, k_{hc}) \nabla u_{hc}) \rangle_{\mathbb{R}^d}$

où $\langle, \rangle_{\mathbb{R}^d}$ est le produit intérieur euclidien dans $\mathbb{R}^d$.

ou encore:

$$\nabla v_{hc}) \operatorname{div}(k_{hc}) \nabla u_{hc}) = \operatorname{div}(v_{hc}) (k_{hc}) \nabla u_{hc}) - \langle \nabla v_{hc}, k_{hc}) \nabla u_{hc}) \rangle_{\mathbb{R}^d}$$

Remplaçons ceci dans la relation ci-dessus:

$$\begin{aligned} \int_D dx \operatorname{div}(v_{hc}) (k_{hc}) \nabla u_{hc}) - \int_D dx \langle \nabla v_{hc}, k_{hc}) \nabla u_{hc}) \rangle_{\mathbb{R}^d} \\ - \int_D dx a_{hc}) u_{hc}) v_{hc}) = \int_D dx g_{hc}) v_{hc}) \end{aligned}$$

Mais, par le théorème de Gauss:

$$\begin{aligned} \int_D dx \operatorname{div}(v_{hc}) (k_{hc}) \nabla u_{hc}) &= \int_{\partial D} dx_{hc}) \langle v_{hc}) (k_{hc}) \nabla u_{hc}), n_{hc}) \rangle_{\mathbb{R}^d} \\ &= \int_{\partial D} dx_{hc}) v_{hc}) k_{hc}) \langle \nabla u_{hc}, n_{hc}) \rangle_{\mathbb{R}^d} \\ &= \frac{\partial u_{hc}}{\partial n_{hc}} \equiv 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{condition au limites} \\ \text{de Neumann homogène de} \\ (P) \end{array} \right. \end{aligned}$$

On obtient donc :

$$\int_D dx \langle \nabla v_{hc}, k_{hc}) \nabla u_{hc}) \rangle_{\mathbb{R}^d} + \int_D dx a_{hc}) u_{hc}) v_{hc}) = - \int_D dx g_{hc}) v_{hc})$$

Ceci permet de prouver le résultat suivant:

Proposition

Supposons que K , a satisfaisant aux hypothèses données plus haut;
Supposons que $f \in C(\bar{D})$ et que (P) possède une solution
classique $u \in C^2(\bar{D})$. Alors on a $\int_D dx \langle k_{hc}) \nabla u_{hc}), \nabla v_{hc}) \rangle_{\mathbb{R}^d} + \int_D dx a_{hc}) u_{hc}) v_{hc})$

$$= - \int_D dx \, g(x) v(x).$$

quel que soit $v \in H^1(D)$.

Preuve:

On sait que (cf Adams: Sobolev Spaces) $C^1(\bar{D})$ est dense dans $H^1(D)$.
Soit $v \in H^1(D)$; il existe alors une suite $(v_m)_{m \in \mathbb{N}^+} \subseteq C^1(\bar{D})$ telle que:
 $\|v_m - v\|_{1,2} \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0$

Or:

$$\begin{aligned} & \int_D dx \, \langle k(x) \nabla u(x), \nabla v_m(x) \rangle_{\mathbb{R}^d} + \int_D dx \, a(x) u(x) v_m(x) \\ &= - \int_D dx \, g(x) v_m(x) \quad (v_m \in \mathbb{N}^+) \\ & \xrightarrow{m \rightarrow \infty} - \int_D dx \, g(x) v(x) = \int_D dx \, \langle k(x) \nabla u(x), \nabla v(x) \rangle_{\mathbb{R}^d} + \int_D dx \, a(x) u(x) v(x) \end{aligned}$$

Par exemple:

$$\begin{aligned} \left| \int_D dx \, g(x) v_m(x) - \int_D dx \, g(x) v(x) \right| &\leq \int_D dx \, |g(x)| |v_m(x) - v(x)| \\ &\leq \|g\|_2 \|v_m - v\|_2 \leq \|g\|_2 \|v_m - v\|_{1,2} \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

$\downarrow$
Schwarz

les autres termes se traitent de la même façon.

Ceci motive la définition suivante

(lorsque $k \in C^1(\bar{D}, \mathbb{M}_*^+)$, $a \in C(\bar{D}, \mathbb{R}^+)$, $g \in L^2(D)$)

Définition fondamentale:

On appelle solution généralisée (solution faible, solution distribution) du problème (P) toute fonction $u \in H^1(D)$ satisfaisant à la relation

$$\int_D dx \, \langle k(x) \nabla u(x), \nabla v(x) \rangle_{\mathbb{R}^d} + \int_D dx \, a(x) u(x) v(x) = - \int_D dx \, g(x) v(x) \quad (\forall v \in H^1(D))$$

Remarque: Si $f \in C(\bar{D})$ et si $u \in C^2(D)$ est solution classique de (I) alors u est solution généralisée.
 L'inverse est faux.

On s'intéresse maintenant à l'existence et à l'unicité de telles solutions généralisées.

On remarque déjà que (*) peut s'écrire :

$$(u, v)_{3,2,q,h} = -(f, v)_2$$

(cf. TD par la notation)

Considérons la fonctionnelle linéaire $P_f : H^1(D) \rightarrow \mathbb{R}$

définie par : $P_f(v) = (f, v)_2$. De plus, cette fonctionnelle est bornée (= continue) sur $H^1(D)$; en effet :

$$|(u, v)_{3,2,q,h}| = |P_f(v)| = |(f, v)_2| \underset{\text{Schwarz}}{\leq} \|f\|_2 \cdot \|v\|_2 \leq \|f\|_2 \|v\|_{3,2} \leq C \|f\|_2 \|v\|_{3,2,q,h}.$$

cf. TD par cette partie

Par le théorème de la représentation de Riesz-Fréchet (1906), on conclut qu'il existe un unique $u \in H^1(D)$ telle que $P_f(v) = (u, v)_{3,2,q,h} = (f, v)_2$.

$$\text{De plus, } \|u\|_{3,2,q,h} = \sup_{\substack{v \in H^1(D) \\ v \neq 0}} \frac{|P_f(v)|}{\|v\|_{3,2,q,h}} \leq C \|f\|_2$$

On a démontré le résultat suivant :

Théorème :

Considérons le problème (I) où $k \in C^1(\bar{D}, \mathbb{R}_*^+)$, $a \in C(\bar{D}, \mathbb{R}_*^+)$, $f \in L^2(D)$.

Alors (I) possède exactement une solution généralisée $u \in H^1(D)$.

De plus, il existe une constante $C > 0$ telle que :

$$\|u\|_{1,2} \leq C \|g\|_2$$

$$(\text{ou: } \|u\|_{1,2} \leq C \|g\|_2)$$

Corollaire immédiat:

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Si } g \equiv 0, \text{ on a donc } u \equiv 0, \text{ c'est à dire que le problème} \\ (P) \left\{ \begin{array}{l} \operatorname{div}(k(x) \nabla u(x)) - a(x)u(x) = 0 \\ \frac{\partial u(x)}{\partial n(x)} = 0, x \in \partial D \end{array} \right. \end{array}}$$

ne possède que la solution triviale $u \equiv 0$

Ceci s'applique en particulier à des problèmes de la forme

$$(P) \left\{ \begin{array}{l} \Delta u(x) - u(x) = f(x), x \in D \\ \frac{\partial u(x)}{\partial n(x)} = 0, x \in \partial D \end{array} \right.$$

Question maternelle: Que se passe-t-il lorsque a est de signe quelconque?

On suppose dorénavant que $k \in C^1(\bar{D}, \mathbb{R}_+^*)$, $a \in C(\bar{D}, \mathbb{R})$, $f \in L^2(D)$.
L' notion de solutions généralisées reste la même dans ce cas
mais il n'est plus possible d'interpréter $\int_D \operatorname{div}(k(x) \nabla u(x), \nabla v(x)) dx$

+ $\int_D a(x) u(x) v(x) dx$
comme produit interne dans $H^1(D)$ (Impossible de déterminer une propriété de solutions)

On va montrer que dans ce cas, le traitement mathématique du problème (P) s'appuie sur l'alternative de Fredholm.

Soit $m = \min_{x \in \bar{D}} a(x)$ et définissons la fonction $a^\# : \bar{D} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$
 $a^\#(x) = \underbrace{a(x)}_{\geq 0} - m + 1 \geq 1$

Si $u \in H^1(D)$ est solution généralisée de (P), on a alors:

$$\int_D dx \langle k(x) \nabla u(x), \nabla v(x) \rangle_{\mathbb{R}^d} + \int_D dx (a^\# + m - 1) u(x) v(x) \\ = - \int_D dx g(x) v(x)$$

Notons: $(u, v)_{1,2,\#} = \int_D dx \langle k(x) \nabla u(x), \nabla v(x) \rangle_{\mathbb{R}^d} \\ + \int_D dx a^\#(x) u(x) v(x)$

Aus la relation précédente s'écrit: $(u, v)_{1,2,\#} + (m-1)(u, v)_2 = -(g, v)_2$

On a donc:

Lemme:

Sous les hypothèses données plus haut, $u \in H^1(D)$ est solution généralisée de (P) si et seulement si:

$$(u, v)_{1,2,\#} + (m-1)(u, v)_2 = -(g, v)_2$$

quelle que soit $v \in H^1(D)$

But: Exprimer les produits scalaires dans $L^2(D)$ $(u, v)_2, (g, v)_2$ par des formes quadratiques sur $H^1(D)$.

Soit $w \in L^2(D)$ et définissons la fonctionnelle $P_w: H^1(D) \rightarrow \mathbb{R}$ par $P_w(v) = (w, v)_2$; P_w est linéaire; elle est aussi bornée

$$|P_w(v)| \leq \underbrace{\|w\|_2}_{\text{schwarz}} \|v\|_2 \leq C \|w\|_2 \|v\|_{1,2,\#}$$

Par le théorème de Riesz - Fréchet, il existe donc un unique $w^\# \in H^1(D)$ tel que $(w, v)_2 = (w^\#, v)_{1,2,\#}$

Considérons la transformation $A: L^2(D) \rightarrow H^1(D)$

tel que $Aw = w^\#$; alors $(w, v)_2 = (Aw, v)_{1,2,\#} (= \text{form. quadratique})$

Lemme: $A: L^2(D) \rightarrow H^1(D)$ est une transformation linéaire bornée; de plus la restriction $A^\#: H^1(D) \rightarrow H^1(D)$ de A à $H^1(D)$ est compacte et autoadjointe.
Ce lemme permet d'énoncer le résultat suivant.
(Voir Exercice 2 série 3)

Proposition

Sous les hypothèses données plus haut, $v \in H^1(D)$ est solution généralisée de (P) si et seulement si

$$v + (m-1)A^\#v = -A\gamma \quad (\text{égalité dans } H^1(D))$$

Preuve: On sait déjà que $(u, v)_{1,2,\#} + (m-1)(u, v)_2 = -(g, v)_2$ quel que soit $v \in H^1(D)$.
Ceci se réécrit :

$$(u, v)_{1,2,\#} + (m-1)(A^\#u, v)_{1,2,\#} = -(A\gamma, v)_{1,2,\#} \quad (\forall v \in H^1(D))$$

d'où le résultat puisque cette dernière relation signifie que $u + (m-1)A^\#u + A\gamma$ est orthogonale à $H^1(D)$, donc nul.

La proposition signifie que le problème de l'existence de $v \in H^1(D)$ se ramène à l'utilisation de la théorie de Fredholm.

On verra plus bas que le problème :

$$(P) \begin{cases} \text{div}(k(x) \nabla u(x)) - a(x)u(x) = f(x), & x \in D \\ \frac{\partial u(x)}{\partial n(x)} = 0, & x \in \partial D \end{cases}$$

avec a de signe quelconque ne peut pas s'étudier au moyen de l'alternative de Fredholm sans une étude détaillée du problème aux valeurs propres suivant

Somme:

Sous les hypothèses données plus haut, $u \in H^1(D)$ est solution généralisée de (P) si et seulement si l'égalité

$$u - (1-m)A^\# u = -Ag$$

Remarque: Cette équation se réécrit

$$(I - \alpha A^\#) u = g$$

où I est l'opérateur identité sur $H^1(D)$.

$$\alpha = 1-m$$

$$g = -Ag \quad (g \in H^1(D))$$

et est une équation linéaire inhomogène sur $H^1(D)$

On suppose $\alpha \neq 0$ (ie: $m \neq 1$: ceci n'est pas une restriction

Si $m = 1$, $a(x) \geq 1 > 0$ et dans ce cas, le problème (P) possède exactement une solution généralisée quelle que soit $g \in L^2(D)$.

Pour $\alpha \neq 0$, on applique l'alternative de Fredholm à l'équation (*).

Proposition

Sous les hypothèses ci-dessus, on a l'alternative suivante:

(i) $\frac{1}{\alpha}$ n'est pas valeur propre de $A^\#$: dans ce cas l'équation (*) possède exactement une solution généralisée $u \in H^1(D)$ quelle que soit $g \in H^1(D)$

(ii) $\frac{1}{\alpha}$ est valeur propre de $A^\#$ d'espace propre E_α :

Dans ce cas, l'équation (*) possède au moins une solution généralisée $u \in H^1(D)$ si et seulement si g est orthogonale (au sens de $H^1(D)$) à E_α

ie g est orthogonale à toutes les fonctions propres de $A^\#$ relatives à la valeur propre $1/\alpha$. Dans ce cas, ie:

existe exactement une solution généralisée $u_{\perp} \in H^s(D)$ orthogonale à E_{λ} et toute solution de (*) s'écrit comme une combinaison linéaire de $u_{\perp}$ et d'éléments de E_{λ} .

Preuve: Cf cours ARC

Il s'agit maintenant d'interpréter ce résultat dans le contexte des problèmes (P) et (P_{λ}) .

Rappelons d'abord que la paire (u, λ) est solution généralisée de (P_{λ}) si et seulement si :

$$u = (-\lambda - m + 1) A^{\#} u \quad (\text{égalité dans } H^s(D))$$

Par ailleurs, u est solution généralisée de (P) si et seulement si

$$u - \alpha A^{\#} u = -A g \quad \alpha = 1 - m$$

Ceci conduit au résultat suivant :

Théorème fondamental (alternative de Fredholm pour (P))

Sous les hypothèses données plus haut, considérons le problème (P).

$$(P) \begin{cases} \operatorname{div}(k(x) \nabla u(x)) - a(x) u(x) = f(x) & x \in D \\ \frac{\partial u(x)}{\partial n(x)} = 0, & x \in \partial D \end{cases}$$

et le problème (P_{λ}) :

$$(P_{\lambda}) : \begin{cases} \operatorname{div}(k(x) \nabla u(x)) - a(x) u(x) = \lambda u(x), & x \in D \\ \frac{\partial u(x)}{\partial n(x)} = 0, & x \in \partial D \end{cases}$$

Alors on a l'alternative suivante (on suppose $m \neq 1$)

(i) $\lambda = 0$ n'est pas valeur propre de P_{λ} :

Alors le problème (P) possède exactement une solution généralisée $u \in H^s(D)$.

Alors:
$$\sum_{m=1}^{+\infty} |\lambda_m| |(g, u_m)_2|^2 \leq - \sum_{m=1}^{+\infty} \lambda_m |(g, u_m)_2|^2 + 2|\lambda| \sum_{m=1}^{+\infty} |(g, u_m)_2|^2$$

$$= - \sum_{m=1}^{+\infty} \lambda_m |(g, u_m)_2|^2 + 2|\lambda| \|g\|_2^2$$

$$= \|g\|_{1,2,a^\#,h}^2 + (m-1) \|g\|_2^2 + 2|\lambda| \|g\|_2^2$$

$$\leq \|g\|_{1,2,a^\#,h}^2 + (m-1) C^* \|g\|_{1,2,a^\#,h}^2$$

$$+ 2|\lambda| C^* \|g\|_{1,2,a^\#,h}^2$$

$$\leq C \|g\|_{1,2,a^\#,h}^2$$

ie
$$\sum_{m=1}^{+\infty} |\lambda_m| |(g, u_m)_2|^2 \leq C \|g\|_{1,2,a^\#,h}^2 \leq C \|g\|_{1,2}^2$$

Exemples: (1) Ce théorème s'applique par exemple à :

$$(P_\lambda) \begin{cases} \Delta u_h = \lambda u_h, x \in D \\ \frac{\partial u_h}{\partial n} = 0, x \in \partial D \end{cases}$$

Dans ce cas, $\lambda_m \leq 0, (\forall m \in \mathbb{N}^*)$

En fait $\lambda = 0$ est valeur propre; les fonctions propres sont les constantes sur D ; en fait: $\frac{1}{|D|^{1/2}}$

2) $(P_\lambda) \begin{cases} \Delta u_h - u_h = \lambda u_h, x \in D \\ \frac{\partial u_h}{\partial n} = 0, x \in \partial D \end{cases}$

3e $\lambda_m \leq -1, \forall m \in \mathbb{N}^*$

Question: Dans le cas général où on a:

$\lambda_m \leq -m$; sous quelles conditions si la valeur $\lambda = -m$ est valeur propre?

Livre: F. Riesz + B. Nagy "Leçon d'An. Fon."

La résolution du problème (P_λ) donnée ci-dessus est essentielle pour donner une solution au problème.

$$(P) \begin{cases} \operatorname{div}(k(x) \nabla u(x)) - a(x) u(x) = f(x), x \in D. \\ \frac{\partial u(x)}{\partial n(x)} = 0, x \in \partial D \end{cases}$$

où $k \in C^1(\bar{D}, \mathbb{R}_*)^+$, $a \in C(\bar{D}, \mathbb{R})$, $f \in L^2(D)$.

On rappelle qu'une solution généralisée de (P) est une fonction $u \in H^1(D)$ telle que :

$$\int_D dx k(x) \langle \nabla u(x), \nabla v(x) \rangle_{\mathbb{R}^d} + \int_D dx a(x) u(x) v(x) = - \int_D dx f(x) v(x).$$

quelle que soit $v \in H^1(D)$.

Difficulté : le membre de gauche de la relation précédente n'est pas un produit intérieur dans $H^1(D)$.

Soit $a^\# : \bar{D} \rightarrow \mathbb{R}_*^+$ définie par : $a^\#(x) = a(x) - m + 1$

où $m = \min_{x \in \bar{D}} (a(x))$

Alors $a(x) = a^\#(x) + m - 1$, donc, par subdivision

$$\begin{aligned} \int_D dx k(x) \langle \nabla u(x), \nabla v(x) \rangle_{\mathbb{R}^d} + \int_D dx a^\#(x) u(x) v(x) \\ + (m-1) \int_D dx u(x) v(x) = - \int_D dx f(x) v(x) \end{aligned}$$

ou encore : $(u, v)_{1,2,a^\#,k} + (m-1)(u, v)_2 = -(f, v)_2$

ou encore :

$$(u, v)_{1,2,a^\#,k} + (m-1)(A^\# u, v)_{1,2,a^\#,k} = -(A f, v)_{1,2,a^\#,k}$$

quelle que soit $v \in H^1(D)$, d'où le résultat suivant :

ie : ces fonctions forment un système orthonormé de $H^2(D)$.

Ces fonctions forment en fait une base de $H^2(D)$ car $\ker(T^\#) = \{0\}$.

En effet : $(f, \frac{U_m}{(1-m-\Delta)^{1/2}})_{1,2,a^\#,k} = 0$ par chaque $m \in \mathbb{N}^*$, alors :

$$(T^\# f, \frac{U_m}{(1-m-\Delta)^{1/2}})_{1,2,a^\#,k}$$

$$= (f, \frac{T^\# U_m}{(1-m-\Delta)^{1/2}})_{1,2,a^\#,k}$$

$$= \lambda_m (f, \frac{U_m}{(1-m-\Delta)^{1/2}})_{1,2,a^\#,k} = 0 \quad (\forall m \in \mathbb{N}^*)$$

D'où $T^\# f = 0$ par le théorème de Hilbert-Schmidt, ie $f=0$ car $\ker T^\# = \{0\}$.

* (c) ces U_n forment un système orthonormé de $L^2(D)$.

En effet $\|U_m\|_2 = 1$,

D'autre part, on se sert de :

$$U_m = (1-m-\Delta) T^\# U_m$$

d'où :

$$S_{m,m'} = (U_m, U_{m'})_{1,2,a^\#,k} = (1-m-\Delta) (T^\# U_m, U_{m'})_{1,2,a^\#,k}$$

$$\text{dnc } S_{m,m'} = (1-m-\Delta) (U_m, U_{m'})_2$$

et si $m \neq m'$:

$$0 = \underbrace{(1-m-\Delta)}_{>0} (U_m, U_{m'})_2$$

$$\text{d'où } (U_m, U_{m'})_2 = 0$$

En résumé : $(U_n, U_m)_2 = S_{m,n}$

En fait, les U_n forment un système orthonormé complet de $L^2(D)$.
En effet, par (b) les combinaisons linéaires finies des $\frac{U_m}{(1-m-\lambda_m)^{1/2}}$ sont denses dans $H^1(D)$.

Mais cet ensemble de combinaisons linéaires finies coïncide avec l'ensemble des combinaisons linéaires finies des U_n . Celui-ci est donc dense dans $H^1(D)$ et a fortiori dans $L^2(D)$.

(d) Soit $g \in H^1(D)$, alors :

$$g = \sum_{m=1}^{+\infty} \left(g, \frac{U_m}{(1-m-\lambda_m)^{1/2}} \right)_{\mathbb{L}^2, a^\#, h} \frac{U_m}{(1-m-\lambda_m)^{1/2}}$$

(développement fortement convergent dans $H^1(D)$, et a fortiori dans $L^2(D)$)

et $g = \sum_{m=1}^{+\infty} (g, U_m)_2 U_m$

(développement fortement convergent dans $L^2(D)$)

Par l'unicité des coefficients de Fourier,
on a nécessairement

$$(1-m-\lambda_m)^{1/2} (g, U_m)_2 = \left(g, \frac{U_m}{(1-m-\lambda_m)^{1/2}} \right)_{\mathbb{L}^2, a^\#, h}, \quad (U_m \in \mathbb{N}^*)$$

Alors, par Parseval :

$$\begin{aligned} \|g\|_{\mathbb{L}^2, a^\#, h}^2 &= \sum_{m=1}^{+\infty} \left| \left(g, \frac{U_m}{(1-m-\lambda_m)^{1/2}} \right)_{\mathbb{L}^2, a^\#, h} \right|^2 = \sum_{m=1}^{+\infty} (1-m-\lambda_m) |(g, U_m)_2|^2 \\ &= (1-m) \sum_{m=1}^{+\infty} |(g, U_m)_2|^2 - \sum_{m=1}^{+\infty} \lambda_m |(g, U_m)_2|^2 = (1-m) \|g\|_2^2 - \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n |(g, U_n)_2|^2 \end{aligned}$$

Mais, par (a), $\lambda_m \leq -m$, pour tout $m \in \mathbb{N}^*$
donc $|\lambda_m| \leq -\lambda_m + 2|m|$

Question: Dans quelle mesure l'existence des paires (U_m, λ_m) me permet de résoudre le problème:
 $U = (1 - m - \lambda) T^{\#} U$?

Remplaçons U par U_m ci-dessus,
 on voit alors que l'équation $U_m = (1 - m - \lambda_m) T^{\#} U_m$ est
 satisfaite quel que soit $m \in \mathbb{N}^*$ à condition de choisir des λ_m tels que:
 $(1 - m - \lambda_m) \lambda_m = 1, (\forall m \in \mathbb{N}^*)$

Ceci donne:

$$\lambda_m = 1 - m - \frac{1}{\lambda_m}$$

Donc, les paires $(U_m, \lambda_m)_{m \in \mathbb{N}^*}$ donnent la solution au problème (P_1) dans le sens du théorème suivant:

Théorème fondamental:

Sous les hypothèses données plus haut, le problème (P_1) possède les solutions propres généralisées $(U_m)_{m \in \mathbb{N}^*}$ correspondant aux valeurs propres $(\lambda_m)_{m \in \mathbb{N}^*}$

De plus,

(a) On a : $\lim_{m \rightarrow +\infty} \lambda_m = -\infty$ et $\lambda_m \leq -m, (\forall m \in \mathbb{N}^*)$

(b) Les fonctions $\frac{U_m}{(1 - m - \lambda_m)^{1/2}}, (m \in \mathbb{N}^*)$

forment une base hilbertienne de $H^2(D)$

(c) Les fonctions $(U_m), m \in \mathbb{N}^*$, forment une base orthonormée de $L^2(D)$.

(d) Il existe une constante $C \in \mathbb{R}_+^*$ telle que:

et voilà

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |\lambda_n| (f, u_n)_2^2 \leq c \|f\|_{s,2}^2 \quad \text{quelque que soit } f \in H^s(D)$$

Preuve: * (a) On sait que $\lim_{m \rightarrow +\infty} \alpha_m = 0$, $\alpha_m > 0$,

$$\text{d'où } \lim_{m \rightarrow +\infty} \gamma_m = -\infty \text{ car } \gamma_m = 1 - m - \frac{1}{\alpha_m}$$

On a d'autre part (on choisit $u=v=u_m$ dans la définition de (P)), on a:

$$\int_D dx \, k(x) |\nabla u_m(x)|^2 + \int_D dx \, a(x) |u_m(x)|^2 = - \gamma_m \underbrace{\int_D dx |u_m(x)|^2}_{= \|u_m\|_2^2 = 1}$$

$$\text{ie: } \gamma_m = - \int_D dx \, k(x) |\nabla u_m(x)|^2 - \int_D dx \, a(x) |u_m(x)|^2 \quad (\forall m) \\ \leq - \int_D dx \, a(x) |u_m(x)|^2 \leq -m \int_D dx |u_m(x)|^2 = -m$$

* (b) On sait déjà que $(u_m, u_{m'})_{s,2,a^\#,k} = 0$ si $m \neq m'$
 On discute du cas $m=m'$, on part de:

$$u_m = (1 - m - \gamma_m) P^\# u_m$$

$$\text{Prelevons le produit scalaire dans } H^s(D) \text{ de cette égalité avec } u_m \\ (u_m, u_m)_{s,2,a^\#,k} = \|u_m\|_{s,2,a^\#,k}^2 = (1 - m - \gamma_m) (P^\# u_m, u_m)_{s,2,a^\#,k} \\ (1 - m - \gamma_m) \|u_m\|_2^2 = (1 - m - \gamma_m) \\ \underbrace{\|u_m\|_2^2}_{=1}$$

$$\text{D'où: } \|u_m\|_{s,2,a^\#,k} = (1 - m - \gamma_m)^{1/2}$$

donc les $\frac{u_m}{(1 - m - \gamma_m)^{1/2}}$ sont de norme ~~(norme = 1)~~ 1

Il s'ensuit que:

$$\left(\frac{u_m}{(1 - m - \gamma_m)^{1/2}}, \frac{u_{m'}}{(1 - m - \gamma_m)^{1/2}} \right) = \delta_{m,m'}$$

Lemme: T est une transformation linéaire bornée. De plus, sa restriction $T^\#$ à $H^1(D)$ est une transformation linéaire compacte, autoadjointe, positive et inversible (i.e. $\ker T^\# = \{0\}$)

Démonstration

T est trivialement linéaire. résulte immédiatement de la linéarité du produit intérieur. De plus, $\|Tw\|_{1,2,a^\#,k} = \|w^*\|_{1,2,a^\#,k}$

$$= \sup_{\substack{v \in H^1(D) \\ \|v\|_2 = 1 \\ v \neq 0}} \frac{|(w,v)|}{\|v\|_2} \leq \|w\|_2$$

Par ailleurs $H^1(D) \xhookrightarrow{I \text{ compact}} L^2(D) \xrightarrow{T \text{ bornée}} H^1(D)$ et on a :

$$T^\# = T \circ I \text{ compact en tant que composition d'une transformation linéaire bornée et une transformation linéaire continue. De plus:}$$

$$\begin{aligned} (T^\# w_1, w_2)_{1,2,a^\#,k} &= (w_1, w^*)_2 = (w^*, w)_2 \\ &= (T^\# w^*, w)_{1,2,a^\#,k} \\ &= (w, T^\# w^*)_{1,2,a^\#,k} \\ &\quad (Tw, w^* \in H^1(D)) \end{aligned}$$

i.e. $T^\#$ est autoadjoint. Par ailleurs :

$$(Tw, w)_{1,2,a^\#,k} = \|w\|_2^2 \geq 0$$

Cette forme quadratique n'étant pas dégénérée, i.e. :

$$w \neq 0 \Rightarrow (T^\# w, w) > 0.$$

Finalement, si $T^\# w = 0$ (i.e. $w \in \ker T^\#$), alors

$$\|w\|_2 = 0, \text{ i.e. } w = 0, \text{ i.e. } \ker T^\# = \{0\}$$

Ceci conduit au résultat suivant :

Demme:

Sous les hypothèses ci-dessus, $u \in H^1(D)$, $u \neq 0$ est solution généralisée de (P_λ) correspondant à la valeur propre λ si et seulement si:

$u = (1-m-\lambda) T^\# u$ en tant qu'égalité dans $H^1(D)$ où $T^\#$ est l'opérateur du lemme précédent.

Preuve:

Pour un tel m , on a:

$$\begin{aligned} (u, v)_{1,2,a^*,k} &= (1-m-\lambda) (u, v)_2 = (1-m-\lambda) (u^\#, v)_{1,2,a^*,k} \\ &= (1-m-\lambda) (T^\# u, v)_{1,2,a^*,k} \text{ quel que } v \in H^1(D). \end{aligned}$$

$$\Rightarrow u = (1-m-\lambda) T^\# u$$

On applique maintenant le théorème spécial pour les opérateurs compacts autoadjoints à $T^\#$. Ceci implique qu'il existe des paires $(U_m, \alpha_m)_{m \in \mathbb{N}^*}$ telles que:

$$T^\# U_m = \alpha_m U_m$$

où $U_m \in H^1(D)$, $\alpha_m \in \mathbb{R}$. De plus, $\lim_{m \rightarrow \infty} \alpha_m = 0$

et $\alpha_m > 0$. (0 n'est pas valeur propre)

Convention: $\|U_m\|_2 = 1$, $\forall m \in \mathbb{N}^*$

Pas d'oubli, dans la liste des valeurs propres $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots$, chacune des valeurs propres apparaît un nbre de fois égal à sa multiplicité (qui est finie ici!).

On a: $(U_m, U_{m'})_{1,2,a^*,k} = 0$ si $m \neq m'$

ie: $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots$

$U_1, U_2, U_3, \dots$

$$(P_\lambda) \left\{ \begin{array}{l} \operatorname{div}(k(x) \nabla u(x)) - a(x) u(x) = \lambda u(x) \\ \frac{\partial u(x)}{\partial n(x)} = 0 \quad (x \in \partial D) \end{array} \right\}$$

où $k \in C^1(\bar{D}, \mathbb{R}_*^+)$, $a \in C(\bar{D}, \mathbb{R})$

Un cas particulier de (P_λ) est le problème :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta u(x) = \lambda u(x), \quad x \in D \\ \frac{\partial u(x)}{\partial n(x)} = 0, \quad x \in \partial D \end{array} \right\}$$

On cherche des solutions généralisées de (P_λ) sous la forme de paires (u, λ) se composant de fonctions propres et des valeurs propres correspondantes.

Définition:

On appelle fonction propre généralisée de (P_λ) correspondant à la valeur propre λ toute fonction $u \in H^1(D)$, non identiquement nulle, telle que :

$$\int_D dx \, k(x) \langle \nabla u(x), \nabla v(x) \rangle_{\mathbb{R}^d} + \int_D dx \, a(x) u(x) v(x) = -\lambda \int_D dx \, u(x) v(x) \quad (\forall v \in H^1(D))$$

But: Résoudre (P_λ) en s'appuyant sur le théorème spectral pour les opérateurs compacts autoadjoints.

Pour ce faire, considérons la fonction $a^\# : \bar{D} \rightarrow \mathbb{R}$, définie par :

$$a^\#(x) = a(x) - m + 1, \quad \text{où } m = \min_{x \in \bar{D}} a(x)$$

On a : $a^\# \in C(\bar{D}, \mathbb{R}_*^+)$



Substituons ceci dans l'expression ci-dessus on obtient :

$$\int_D \operatorname{div} (k(x) \langle \nabla u(x), \nabla v(x) \rangle_{\mathbb{R}^d}) + \int_D \operatorname{div} (a^\#(x) u(x) \nabla v(x)) = (1-m-\lambda) \int_D \operatorname{div} (u(x) \nabla v(x))$$

On a donc le :

Lemme :

Sous les hypothèses ci-dessus, $u \in H^1(D)$, $u \neq 0$ est solution propre généralisée de (P_λ) correspondant à la valeur propre λ si et seulement si

$$(u, v)_{1,2,a^\#,k} = (1-m-\lambda)(u, v)_2$$

quel que soit $v \in H^1(D)$

Idee : exprimer le produit intérieur $(u, v)_2$ comme une forme quadratique sur $H^1(D)$.

Soit $w \in L^2(D)$, considérons la fonctionnelle linéaire

$L_w : H^1(D) \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$L_w(v) = (w, v)_2 ; L_w \text{ est bornée}$$

$$|L_w(v)| \leq \|w\|_2 \|v\|_2 \leq C \|w\|_2 \|v\|_{1,2,a^\#,k}$$

Par le théorème de Riesz - Fréchet, il existe un unique $w^\# \in H^1(D)$ tel que :

$$L_w(v) = (w, v)_2 = (w^\#, v)_{1,2,a^\#,k}$$

$$\text{De plus : } \|w^\#\|_{1,2,a^\#,k} = \sup_{\substack{v \in H^1(D) \\ v \neq 0}} \frac{|L_w(v)|}{\|v\|_{1,2,a^\#,k}}$$

Considérons alors la transformation :

$$T : L^2(D) \rightarrow H^1(D) \text{ définie par}$$

$$Tw = w^\#$$

On a le

quelle que soit $g \in L^2(D)$

(ii) $\lambda = 0$ est valeur propre de (P_λ) :

Alors, le problème (P) possède au moins une solution généralisée $u \in H^1(D)$ si et seulement si g est orthogonale (au sens de $L^2(D)$) à l'espace propre des problèmes (P) et (P_λ) .

Rappelons d'abord que la paire (u, λ) est solution généralisée de (P_λ) si et seulement si:

① $u = (-\lambda - m + 1) A^\# u$ (égalité dans $H^1(D)$)

Par ailleurs, u est solution généralisée de (P) si et seulement si

$$u - \alpha A^\# u = -A g \quad \alpha = 1 - m$$

E_0 correspondant à $\lambda = 0$, i.e. orthogonale à toutes les fonctions propres correspondant à $\lambda = 0$. Dans ce cas, il existe exactement une solution généralisée $u \in H^1(D)$ à (P) orthogonale à E_0 (au sens de $L^2(D)$). De plus, toute solution généralisée de (P) s'écrit comme combinaison linéaire de $u_\perp$ et d'éléments de E_0 .

Preuve:

On remarque que $\frac{1}{\alpha}$ est valeur propre de $A^\#$ si il existe $u \in H^1(D)$, $u \neq 0$, tel que: $A^\# u = \frac{1}{\alpha} u$

i.e.: $u = (1 - m) A^\# u$, par définition de α

Ceci est exactement l'équation ① avec $\lambda = 0$

Ceci prouve (i) car $g = -A f$ peut être quelconque.

(ii) il existe une solution généralisée $u \in H^1(D)$ si et seulement si $(g, u)_{L^2, A^\#, k=0} = 0$, quelque soit $g \in E_\alpha$

Mais la construction de A , on a :

$$(A g, v)_{1,2, a^{\#}, h} = (g, v)_2 = 0$$

Soit $u_L \in H^1(D)$ l'unique solution généralisée de (P) orthogonale à E_0 au sens de $H^1(D)$.

$$\text{Alors } u_L - (1-m) A^{\#} u_L = -A g.$$

et donc, si $u_p \in E_0$, on a :

$$0 = (u_L, u_p)_{1,2, a^{\#}, h} = (1-m) (A^{\#} u_L, u_p)_{1,2, a^{\#}, h} - \underbrace{(A g, u_p)_{1,2, a^{\#}, h}}_{=0} \\ = (1-m) (u_L, u_p)_2$$

Mais $m \neq 1$ ($\lambda \neq 0$), d'où $(u_L, u_p)_2 = 0$

Le reste de l'énoncé est le même que dans le cas de la proposition abstraite.

Exemple et commentaires :

(1) Considérons le problème :

$$(P) \begin{cases} \operatorname{div}(k h c) \nabla u h c) = g h c, & x \in D \\ \frac{\partial u h c}{\partial n h c} = 0, & x \in \partial D \end{cases}$$

Si $a \equiv 0$; d'où $m = 0$

Dans ce cas, $\lambda = 0$ est valeur propre du problème (P_{λ}) :

$$(P_{\lambda}) : \begin{cases} \operatorname{div}(k h c) \nabla u h c) = \lambda u h c, & x \in D \\ \frac{\partial u h c}{\partial n h c} = 0, & x \in \partial D \end{cases}$$

Des fonctions propres correspondantes sont les constantes sur D ;
et l'espace propre correspondant est unidimensionnel

(ie : $\lambda = 0$ est de multiplicité égale à un)

On peut engendrer E_0 par la fonction :

$$u_0 h c) = \frac{1}{|D|} \pi_2$$

On applique alors le point (ii) du théorème fondamental à cette situation,

on obtient :

Corollaire:

Soit problème (P) ci-dessus possède au moins une solution généralisée $u \in H^1(D)$ si et seulement si $\int_D f(x) dx = 0$

Dans ce cas, il existe exactement une solution généralisée $u_L \in H^1(D)$ de (P) telle que $\int_D dx u_L(x) = 0$. De plus toute solution généralisée

u de (P) s'écrit : $u = u_L + C$, $C = \text{constante}$

(2) Ce résultat précédent s'applique à l'équation de Poisson :

$$(P) \begin{cases} \Delta u(x) = f(x), x \in D \\ \frac{\partial u(x)}{\partial n(x)} = 0, x \in \partial D \end{cases}$$

D'autres exemples:

Considérons le problème :

$$(P) \begin{cases} \Delta u(x) = |x| - \alpha, x \in D \\ \frac{\partial u(x)}{\partial n(x)} = 0, x \in \partial D \end{cases}$$

$$\text{où } D = \{x \in \mathbb{R}^2 / |x| < R\}$$

$$\text{où } R \in \mathbb{R}_*^+, |x| : \text{norme euclidienne de } x$$

$\alpha \in \mathbb{R}$: paramètre :

Ce problème possède-t-il au moins une solution $u \in H^1(D)$?

Dans (P), la fonction $x \rightarrow f(x) = |x| - \alpha \in L^2(D)$

On remarque que le problème

$$(P_\lambda) \begin{cases} \Delta u(x) = \lambda u(x), x \in D \\ \frac{\partial u(x)}{\partial n(x)} = 0, x \in \partial D \end{cases} \text{ admet } \lambda = 0 \text{ comme valeur propre}$$

les fonctions propres étant les constantes

Par application du critère basé sur l'alternative de Fredholm,
(P) admet au moins une solution si et seulement si

$$\int_D \operatorname{chc} f(x) = 0 = \int_0^{2\pi} \int_0^R dr d\varphi (r - \alpha) = 2\pi \int_0^R dr (r^2 - \alpha r) = 2\pi \left(\frac{R^3}{3} - \frac{\alpha R^2}{2} \right)$$

ceci est nul i.e. : si et seulement si $\boxed{\alpha = \frac{2R}{3}}$

Même question pour:

$$(P) \begin{cases} \Delta u(x) = e^{-|x|^2} - \alpha, & x \in D \\ \frac{\partial u(x)}{\partial n(x)} = 0, & x \in \partial D \end{cases} \quad \text{où } D = \{x \in \mathbb{R}^2 / |x| < R\}$$

où $R \in \mathbb{R}_*^+$, $|x|$: norme euclidienne de x
 $\alpha \in \mathbb{R}$: paramètre

Le problème possède-t-il au moins une solution $u \in H^1(D)$?

Par application du même critère, on conclut qu'il existe exactement une valeur α pour laquelle il existe au moins une solution généralisée.

En particulier,

les problèmes donnés ci-dessous avec $\alpha = 0$ n'ont pas de solutions

Complément d'information concernant les théorèmes de plongement

Soient B_1 et B_2 deux espaces de Banach, de normes $\|\cdot\|_{B_1}$, $\|\cdot\|_{B_2}$

Définition :

On dit que B_1 est plongé (injecté, immergé) dans B_2 de façon continue si :

(i) $B_1 \subseteq B_2$

(ii) il existe $c \in \mathbb{R}_*^+$ telle que : $\|g\|_{B_2} \leq c \|g\|_{B_1}$
 quelle que soit $g \in B_1$.

On note dans ce cas : $B_1 \rightarrow B_2$

Exemple : si D est borné, et si on a $p, q \in [1, +\infty[$ avec $p \geq q$
 alors $L^p(D) \rightarrow L^q(D)$ (application de l'inégalité de Hölder)

Définition :

Le plongement continu de $B_1 \rightarrow B_2$ est compact si
 l'application $I: B_1 \rightarrow B_2$ définie par $Ig = g$ est compacte.

Exemples de plongements continus ou compacts :

① $B_1 = C^1([0, 1], \mathbb{C})$ muni de la topologie C^1 :

$$\|g\|_{C^1} = \max_{x \in [0, 1]} |g(x)| + \max_{x \in [0, 1]} |g'(x)|$$

$B_2 = C([0, 1], \mathbb{C})$ muni de la topologie uniforme

Alors on a le plongement $B_1 \rightarrow B_2$.

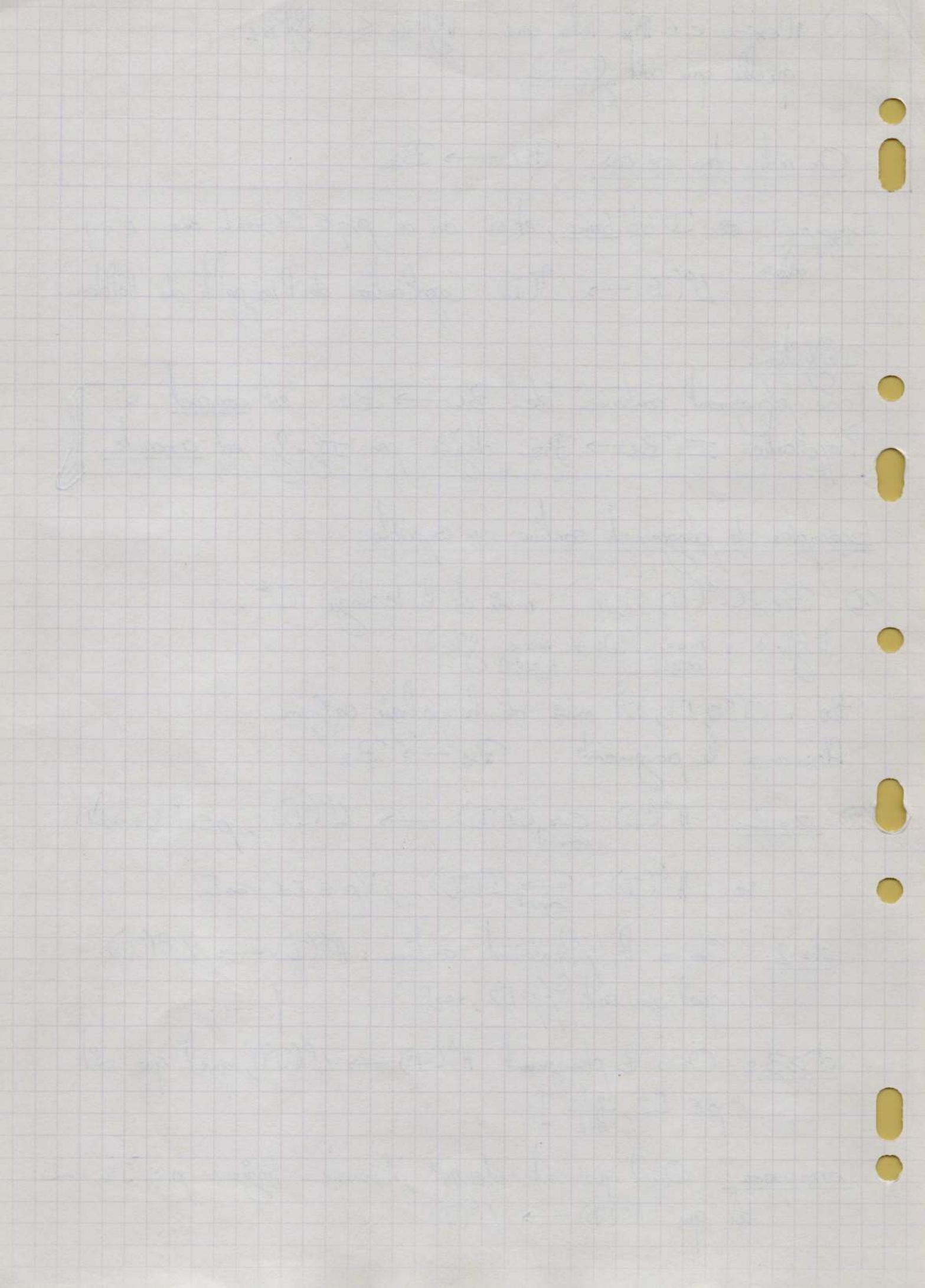
② $d=1$: $H^1(D) \xrightarrow{\text{compact}} C(\overline{D}) \rightarrow L^p(D)$, $p \in [1, +\infty[$

i.e. : $H^1(D) \xrightarrow{\text{compact}} L^p(D)$, $\forall p \in [1, +\infty[$

$d=2$: On a le plongement continu : $H^1(D) \rightarrow L^p(D)$
 quel que soit $p \in [2, +\infty[$

$d \geq 3$: On a le plongement $H^1(D) \rightarrow L^p(D)$, quel que soit
 $p \in [2, \frac{2d}{d-2}]$

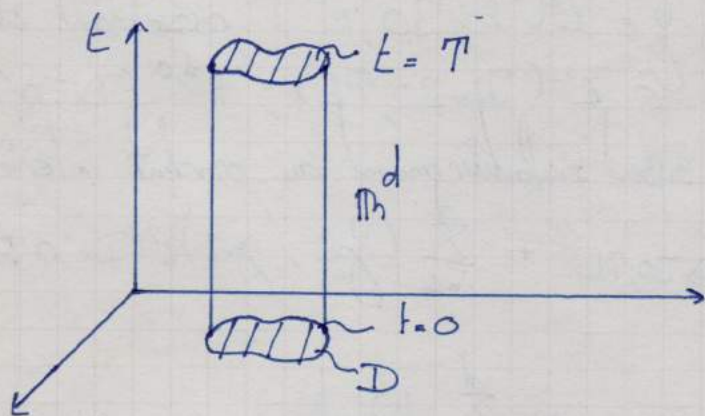
Conséquence : Quel que soit $d \in \mathbb{N}^*$, il existe toujours $p \in [2, +\infty[$
 tel que $H^1(D) \rightarrow L^p(D)$



Chap 3:

Une introduction à la théorie des équations aux dérivées partielles paraboliques

Soit $D \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert, borné, de frontière suffisamment régulière ∂D ,
Considérons le cylindre de base D et de hauteur $T \in \mathbb{R}_*^+$ à savoir:
 $D \times (0, T)$.



Considérons $H^1(D \times]0, T[)$ l'espace de Sobolev se composant de toutes les
fonctions $g \in L^2(D \times]0, T[)$, possédant des dérivées distributions :

$g_{x_1}, \dots, g_{x_d}, g_t \in L^2(D \times]0, T[)$; $H^1(D \times]0, T[)$ est un
espace de Hilbert relativement au produit intérieur (on suppose H^1 réel)

$$(g, g)_{H^1(D \times]0, T[)} = \int_{D \times]0, T[} dx dt g(x, t) g(x, t) + \sum_{i=1}^d \int_{D \times]0, T[} dx dt g_{x_i}(x, t) g_{x_i}(x, t) + \int_{D \times]0, T[} dx dt g_t(x, t) g_t(x, t)$$

Sous forme abrégée:

$$(g, g)_{H^1(D \times]0, T[)} = (g, g)_{L^2(D \times]0, T[)} + \sum_{i=1}^d (g_{x_i}, g_{x_i})_{L^2(D \times]0, T[)} + (g_t, g_t)_{L^2(D \times]0, T[)}$$

La norme induite est :

$$\|g\|_{H^1(D \times]0, T[)}^2 = \|g\|_{L^2(D \times]0, T[)}^2 + \sum_{i=1}^d \|g_{x_i}\|_{L^2(D \times]0, T[)}^2 + \|g_t\|_{L^2(D \times]0, T[)}^2$$

Terminologie:

$H^1(D \times]0, T[)$ est appelé espace de Sobolev (parabolique) isotrope

Remarque:

On a $H^1(D) \subseteq H^1(D \times]0, T[)$

On définit les espaces $W^{m,p}(D \times]0, T[)$ de la même façon

On peut également définir l'espace de Sobolev anisotrope $H^{1,0}(D \times]0, T[)$

se composant de toutes les fonctions $g \in L^2(D \times]0, T[)$ possédant des dérivées distributions $g_{x_1}, \dots, g_{x_d} \in L^2(D \times]0, T[)$; $H^{1,0}(D \times]0, T[)$ devient également un espace de Hilbert relativement au produit intérieur

$$(g, g)_{H^{1,0}(D \times]0, T[)} = (g, g)_{L^2(D \times]0, T[)} + \sum_{i=1}^d (g_{x_i}, g_{x_i})_{L^2(D \times]0, T[)}$$

La norme induite est:

$$\|g\|_{H^{1,0}(D \times]0, T[)}^2 = \|g\|_{L^2(D \times]0, T[)}^2 + \sum_{i=1}^d \|g_{x_i}\|_{L^2(D \times]0, T[)}^2$$

Remarque: On a le plongement continu

$$H^1(D \times]0, T[) \longrightarrow H_0^1(D \times]0, T[) \quad (\text{immédiat par définition})$$

NB.: Ne pas confondre $H^{1,0}(D \times]0, T[)$ avec $H_0^1(D)$
(germeline de $C_0^\infty(D)$ relativement à $\|\cdot\|_{1,2}$)

Un problème de traces: Soit $g \in H^1(D \times]0, T[)$;

Comment définit-on la restriction de g aux hyperplans

$t=0$ et $t=T$? Ceci est non trivial puisque ces hyperplans sont de mesure nulle relativement à la mesure de Lebesgue dans $\mathbb{R}^{d+1}$

On prouve tout d'abord:

Démonstration: Soit $g \in C^1(\bar{D} \times [0, T])$ telle que $g(x, T) = 0$, quel que soit $x \in \bar{D}$. Alors:

$$\int_D |g(x, 0)|^2 dx \leq \|g\|_{H^1(D \times]0, T[)}^2$$

Preuve :

On considère la fonction

$\Phi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par:

$$\Phi(z) = z|z|$$

On a: $\Phi \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $\Phi'(z) = 2|z|$

$$\begin{aligned} \text{On a: } \Phi(g(x, 0)) &= -(\Phi(g(x, T)) - \Phi(g(x, 0))) \\ &= -\int_0^T dt \frac{d}{dt} \Phi(g(x, t)) = -\int_0^T dt \Phi'(g(x, t)) g_t(x, t) \end{aligned}$$

$$\text{donc } g(x, 0) |g(x, 0)| = -2 \int_0^T dt |g(x, t)| g_t(x, t) \quad (\forall x \in \mathbb{D})$$

Prenez le module dans les deux membres et estimons:

$$\begin{aligned} |g(x, 0)|^2 &\leq 2 \int_0^T dt |g(x, t)| |g_t(x, t)| \\ &\leq \int_0^T dt |g(x, t)|^2 + \int_0^T dt |g_t(x, t)|^2, \quad (\forall x \in \mathbb{D}) \end{aligned}$$

Intégrons maintenant sur $x \in \mathbb{D}$, les deux membres de l'inégalité on obtient:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{D}} dx |g(x, 0)|^2 &\leq \int_{\mathbb{D}} dx \int_0^T dt |g(x, t)|^2 + \int_{\mathbb{D}} dx \int_0^T dt |g_t(x, t)|^2 \\ &\stackrel{\text{Fubini}}{=} \int_{\mathbb{D} \times (0, T)} dx dt |g(x, t)|^2 + \int_{\mathbb{D} \times (0, T)} dx dt |g_t(x, t)|^2 \leq \|g\|_{H^1(\mathbb{D} \times (0, T))}^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= -(\Phi(g(x, T)) - \Phi(g(x, 0))) \\ &= -\int_0^T dt \frac{d}{dt} \Phi(g(x, t)) \\ &= -\int_0^T dt \Phi'(g(x, t)) g_t(x, t) \end{aligned}$$

$$\text{Donc } \|g(\cdot, 0)\|_2 \leq \|g\|_{H^1(\mathbb{D} \times [0, T])}$$

Que se passe-t-il si $g(x, T) \neq 0$?



Proposition:

Il existe une constante $c \in \mathbb{R}^+$ telle que, quelle que soit $g \in C^1(\mathbb{D} \times [0, T])$ on ait: $\int_{\mathbb{D}} dx |g(x, 0)|^2 \leq c \|g\|_{H^1(\mathbb{D} \times (0, T))}^2$

Preuve:

On se ramène au lemme précédent au moyen de la construction suivante :

Soit $D \subset \mathbb{R}^d$ ouvert, borné tel que $\bar{D} \subset D'$ (notation $D \subset\subset D'$)
Considérons le cylindre :

$$D \times (T', T'') \text{ où : } T' < 0 \text{ et } T'' > T$$

Soit $g \in C^1(\bar{D} \times [0, T])$

Alors, il existe une fonction $\tilde{g} \in C^1(\bar{D} \times [T', T''])$ satisfaisant aux propriétés suivantes :

(i) $\tilde{g}$ est à support compact dans $D \times]T', T''[$ donc :
 $\tilde{g}|_{\partial D, T''} = 0$

(ii) la restriction de $\tilde{g}$ à $\bar{D} \times [0, T]$ coïncide avec g .

(iii) il existe $C \in \mathbb{R}_+^*$ telle que :

$$\|\tilde{g}\|_{H^1(D \times (T', T''))} \leq C \|g\|_{H^1(D \times [0, T])}$$

$$\begin{aligned} \text{Alors : } \int_D d\mu_c |g|_{x,0}|^2 &\stackrel{(iii)}{=} \int_D d\mu_c |\tilde{g}|_{x,0}|^2 \leq \int_{D'} d\mu_c |\tilde{g}|_{x,0}|^2 \\ &\stackrel{\text{car } \bar{D} \subset D'}{\leq} \|\tilde{g}\|_{H^1(D \times [T', T''])}^2 \\ &\stackrel{(i)}{\leq} C \|g\|_{H^1(D \times [0, T])}^2 \\ &\stackrel{\text{et lemme précédent}}{\leq} C \|g\|_{H^1(D \times [0, T])}^2 \end{aligned}$$

$$\text{Donc : } \|g|_{x,0}\|_2^2 \leq C \|g\|_{H^1(D \times [0, T])}^2 \quad (\forall g \in C^1(\bar{D} \times [0, T]))$$

Or, $C^1(\bar{D}) \times]0, T[$ est dense dans $H^1(D \times [0, T])$: pour $g \in H^1(D \times [0, T])$
il existe une suite $(g_N)_{N \in \mathbb{N}} \subset C^1(\bar{D} \times [0, T])$ telle que

$$\|g_N - g\|_{H^1(D \times [0, T])} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0$$

De la proposition précédente, on a :

$$(i) \|f_N(\cdot, 0)\|_2^2 \leq C \|f_N\|_{H^1(D_x(0, \pi))}^2, (\forall N \in \mathbb{N}^*)$$

$$(ii) \|f_M(\cdot, 0) - f_N(\cdot, 0)\|_2^2 \leq C \|f_M - f_N\|_{H^1(D_x(0, \pi))}^2 \\ (\forall M, N \in \mathbb{N}^*)$$

Mais $(f_N)_{N \in \mathbb{N}^*}$ est une suite de Cauchy dans $H^1(D_x(0, \pi))$, d'où par (ii), $(f_N(\cdot, 0))_{N \in \mathbb{N}^*}$ est une suite de Cauchy dans $L^2(D)$. Soit $g(\cdot, 0)$ sa limite dans $L^2(D)$.

Terminologie :

$g(\cdot, 0)$ est appelée la trace de $g \in H^1(D_x(0, \pi))$ sur l'hyperplan $t=0$

Théorème :

Soit une fonction $H^1(D_x(0, \pi))$ et soit $g(\cdot, 0)$ sa trace sur l'hyperplan $t=0$. Alors il existe une constante indépendante de g (A)

$$\|g(\cdot, 0)\|_2^2 \leq C \|g\|_{H^1(D_x(0, \pi))}^2$$

Preuve : Il suffit de passer à la limite $N \rightarrow +\infty$ dans (i)

Deux types d'espaces de Sobolev.

$$(a) H^1(D_x(0, \pi)) \ni g \in L^2(D_x(0, \pi))$$

$$\frac{\partial g}{\partial x_i} = g_{xi} \in L^2(D_x(0, \pi)), \forall i \in \{1, \dots, d\}$$

$$\frac{\partial g}{\partial t} = g_t \in L^2(D_x(0, \pi))$$

de norme

$$\|g\|_{H^1(D_x(0, \pi))}^2 = \|g\|_{L^2(D_x(0, \pi))}^2 + \sum_{i=1}^d \|g_{xi}\|_{L^2(D_x(0, \pi))}^2 + \|g_t\|_{L^2(D_x(0, \pi))}^2$$

On va considérer des problèmes paraboliques du type:

$$(P) \begin{cases} u_{t,x}(x,t) = \operatorname{div}(k(x) \nabla_x u(x,t)) - a(x) u(x,t) + f(x,t) \\ \frac{\partial u(x,t)}{\partial n(x)} = 0, (x,t) \in \partial D \times (0,T) \\ u(x,0) = \phi(x), x \in D. \end{cases} \quad (x,t) \in D \times (0,T)$$

En particulier ($k \equiv 1, a \equiv 0$), on a l'équation de la chaleur

$$(P) \begin{cases} u_t(x,t) = \Delta u(x,t) + f(x,t), (x,t) \in D \times (0,T) \\ u(x,0) = \phi(x), x \in D. \\ \frac{\partial u(x,t)}{\partial n(x)} = 0, (x,t) \in \partial D \times (0,T) \end{cases}$$

Ce type d'équation intervient également en dynamique des populations, et c (phénomène de diffusion)

On peut définir une solution classique de (P) de la façon suivante.

- Données:
- ① $k \in C^1(\bar{D}, \mathbb{R}_*^+)$
 $k(x) \geq \underline{k} > 0, \forall x \in \bar{D}$
 - ② $a \in C(\bar{D}, \mathbb{R})$
 - ③ $f \in C(\bar{D}, [0, T])$
 - ④ $\phi \in C(\bar{D})$.

Définition:

On appelle solution classique de (P) toute fonction $u \in C^{2,1}(\bar{D} \times (0, T)) \cap C^1(\bar{D} \times (0, T)) \cap C(\bar{D} \times [0, T])$ satisfaisant (P) identiquement.

Problème :

Chercher à définir une bonne notion de solution généralisée,
ce pour traiter de ses situations où k, a, f, φ
ne sont pas aussi régulières que ci-dessus

Pour cela, on va commencer à travailler avec des fonctions tests
indépendantes de t .

Soit $v \in C^1(\bar{D})$; multiplions la première équation de (I)
par v , intégrons sur D , on a :

$$\begin{aligned}
 * U_\varepsilon(x, t) v(x) &= \int_D a(x) \operatorname{div}(k(x) \nabla u(x, t)) v(x) dx - \int_D a(x) u(x, t) v(x) dx \\
 &= \int_D dx \left\{ \operatorname{div}(v(x) k(x) \nabla u(x, t)) \right\} + \int_D dx f(x, t) v(x) \\
 &\quad - \langle k(x) \nabla u(x, t), \nabla v(x) \rangle_{\mathbb{R}^d} \\
 &\quad \xrightarrow{\text{Gours}} \\
 &= \int_{\partial D} d v(x) v(x) k(x) \langle \nabla u(x, t), \eta(x) \rangle_{\mathbb{R}^d} \\
 &\quad - \int_D dx \langle k(x) \nabla u(x, t), \nabla v(x) \rangle_{\mathbb{R}^d}
 \end{aligned}$$

On a donc :

$$\begin{aligned}
 \int_D dx u_\varepsilon(x, \tau) v(x) &= - \int_D dx \langle k(x) \nabla u(x, \tau), \nabla v(x) \rangle_{\mathbb{R}^d} \\
 &\quad - \int_D dx a(x) u(x, \tau) v(x) + \int_D dx f(x, \tau) v(x)
 \end{aligned}$$

quel que soit $\tau \in (0, T)$; on intègre alors la relation précédente
relativement à $\tau \in [0, \varepsilon]$.

On obtient :

$$\begin{aligned}
\int_D dx v(x) \int_0^t d\tau u_\tau(x, \tau) &= \int_D dx v(x) u(x, t) - \int_D dx v(x) \phi(x) \\
&= - \int_0^t d\tau \int_D dx \langle k(x) \nabla u(x, \tau), \nabla v(x) \rangle_{\mathbb{R}^d} \\
&\quad - \int_0^t d\tau \int_D dx a(x) u(x, \tau) v(x) \\
&\quad + \int_0^t d\tau \int_D dx f(x, \tau) v(x).
\end{aligned}$$

quel que soit $v \in C^1(\bar{D})$, et $t \in [0, T]$

Soit $v \in H^1(D)$; alors il existe une suite $(v_m)_{m \in \mathbb{N}^*} \subset C^1(\bar{D})$ telle que v_m converge fortement vers v dans $H^1(D)$.

Par ce qui précède, on a :

$$\begin{aligned}
\int_D dx u(x, t) v_m(x) &= \int_D dx \phi(x) v_m(x) - \int_0^t d\tau \int_D dx \langle k(x) \nabla u(x, \tau), \nabla v_m(x) \rangle_{\mathbb{R}^d} \\
&\quad - \int_0^t d\tau \int_D dx a(x) u(x, \tau) v_m(x) \\
&\quad + \int_0^t d\tau \int_D dx f(x, \tau) v_m(x) \\
&\quad (\forall t \in [0, T], m \in \mathbb{N}^*)
\end{aligned}$$

On passe à la limite $m \rightarrow +\infty$ dans ce qui précède ;

On a :

$$\left(\int_D dx \phi(x) (v_m(x) - v(x)) \right) \leq \sup_{x \in \bar{D}} |\phi(x)| \|v_m - v\|_1$$

$$\leq C \sup_{x \in \bar{D}} \|v_m - v\|_{1,2} \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} 0$$

$$\text{i.e. } \lim_{m \rightarrow +\infty} \int_D dx \phi(x) v_m(x) = \int_D dx \phi(x) v(x)$$

$$(ii) \int_D dx |u(x, t)| |v_{u(x)} - v(x)| \leq C \sup_{(x, t) \in D \times [0, T]} |u(x, t)| \|v_m - v\|_{H^1_2} \rightarrow 0$$

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \int_D dx u(x, t) v_{u(x)} = \int_D dx u(x, t) v(x)$$

$$(iii) \sum_{i=1}^d \int_0^t d\tau \int_D dx |v_{xi}(x, \tau)| |v_{m, xi}(x) - v_{xi}(x)|$$

$$\xrightarrow{m \rightarrow +\infty} 0 \quad \text{car } v_{m, xi} \rightarrow v_{xi} \text{ dans } L^2(D), \forall i \in \{1, \dots, d\}$$

(iv) : Les autres termes se traitent de la même façon

Ceci conduit à la définition suivante de solution généralisée pour (P)
On considère un problème de la forme (P) avec $k \in C^1(\bar{D}, \mathbb{R}^+)$,
 $a \in C(\bar{D}; \mathbb{R})$, $f \in L^2(D \times (0, T))$, $\varphi \in L^2(D)$

Définition: On appelle solution généralisée de (P), ou solution variationnelle, toute fonction $u \in H^{1,0}(D \times (0, T))$ satisfaisant à la relation :

$$\begin{aligned} \int_D dx u(x, t) v(x) &= \int_D dx \varphi(x) v(x) - \int_0^t d\tau \int_D dx \langle k(x) u(x, \tau), \nabla v(x) \rangle_{\mathbb{R}^d} \\ &\quad - \int_0^t d\tau \int_D dx a(x) u(x, \tau) v(x) \\ &\quad + \int_0^t d\tau \int_D dx f(x, \tau) v(x) \end{aligned}$$

quel que soit $t \in [0, T]$, quel que soit $v \in H^1(D)$.

En particulier pour l'équation de la chaleur avec $k \equiv 1$, $a \equiv 0$,
 $\int_D dx u(x, t) v(x) = \int_D dx \varphi(x) v(x) - \int_0^t d\tau \int_D dx \langle \nabla u(x, \tau), \nabla v(x) \rangle_{\mathbb{R}^d}$

$$+ \int_0^t d\tau \int_D dx g(x, \tau) v(x, \tau).$$

Remarques:

- (i) Tous les termes dans les expressions précédentes sont bien définis, i.e: chaque terme est fini.
- (ii) Toute solution classique est généralisée

Dans ce contexte, on a le résultat suivant:

Théorème fondamental:

On considère le problème (P) où $K \in C^1(\bar{D}, \mathbb{R}_*^+)$, $a \in C(\bar{D}, \mathbb{R}_*^+)$, $f \in L^2(D \times (0, T))$, $\varphi \in L^2(D)$.
 Alors, il existe exactement une solution généralisée $u \in H^{1,0}(D \times (0, T))$ de (P); de plus, il existe une constante $C \in \mathbb{R}_*^+$ telle que:

$$\|u\|_{H^{1,0}(D \times (0, T))} \leq C \left\{ \|\varphi\|_2 + \|f\|_{L^2(D \times (0, T))} \right\}$$

Stratégie de la démonstration:

- (1) On procède à une analyse de Fourier de φ et de f .
- (2) On résout ensuite un problème approché, (P_N) , relatif à chaque mode de Fourier de f et φ , par l'intermédiaire de la méthode de séparation de variables;
- (3) On résout ensuite un deuxième problème approché, (P_N) , relatif à la somme d'un nombre fini, N , de modes de Fourier.
- (4) Passer à la limite $N \rightarrow +\infty$ (i.e: une infinité de modes de Fourier).

Démonstration:

(1) On considère le problème aux valeurs propres elliptiques :

$$(P_1) \left\{ \begin{array}{l} \operatorname{div}(k(x) \operatorname{grad} u(x)) - a(x) u(x) = \lambda u(x), x \in D \\ \frac{\partial u(x)}{\partial n(x)} = 0, x \in \partial D. \end{array} \right\}$$

Soient (u_m, λ_m) menr les solutions de ce problème (c.f. chapitre précédent).
Rappelons que les u_m ont été construits de telle façon à former une base orthonormée de $L^2(D)$

$$\text{Alors : } \varphi = \sum_{m=1}^{+\infty} p_m u_m$$

(série fortement convergente dans $L^2(D)$)

$$\text{où } p_m = (\varphi, u_m)_2, \quad \|\varphi\|_2^2 = \sum_{m=1}^{+\infty} |p_m|^2$$

$$\text{Pour } f \in L^2(D \times (0, T)) : \int_{D \times (0, T)} dx dt |f(x, t)|^2 < +\infty$$

Par Fubini:

$$\int_0^T dt \int_D dx |f(x, t)|^2 < +\infty$$

Ceci implique qu'on : $\int_D dx |f(x, t)|^2 < +\infty$ pour presque tous les $t \in (0, T)$

Ceci signifie $f(\cdot, t) \in L^2(D)$ pour presque tous les $t \in (0, T)$.

$$\text{Donc } f(\cdot, t) = \sum_{m=1}^{\infty} f_m(t) u_m(x) \text{ où } f_m(t) = (f(\cdot, t), u_m)_2, \\ \|f(\cdot, t)\|_2^2 = \sum_{m=1}^{\infty} |f_m(t)|^2$$

Ceci implique par intégration de cette dernière relation par rapport à t que :

$$\begin{aligned} \|g\|_{L^2(D \times (0, T))}^2 &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_0^T dt |g_n(t)|^2 \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \|g_n\|_{L^2(0, T)}^2 \text{ (en particulier } g_n \in L^2(0, T)) \end{aligned}$$

(2) On considère le problème (P_n) plus simple, pour chaque mode de Fourier:

$$(P_n) \begin{cases} U_t(x, t) = \operatorname{div}(k(x) \nabla u(x, t)) - a(x) u(x, t) + g_n(t) U_n(x), (x, t) \in D \times (0, T) \\ U(x, 0) = \varphi_n U_n(x), x \in D. \\ \frac{\partial u(x, t)}{\partial n(x)} = 0, (x, t) \in \partial D \times (0, T) \end{cases}$$

↙ même mode de Fourier:

Dans le but de résoudre le problème (P_n) , on considère le problème:

$$(T) \begin{cases} w'_n(t) - \lambda_n w_n(t) = g_n(t), t \in (0, T) \\ w_n(0) = \varphi_n \end{cases}$$

où λ_n est la valeur propre du problème (PA)

On aura besoin du résultat suivant relatif à (T)

Lemma:

La solution de (T) s'écrit:

$$w_n(t) = \varphi_n e^{\lambda_n t} + \int_0^t d\tau e^{\lambda_n(t-\tau)} g_n(\tau)$$

On a: $w_n(t) \in H^1(0, T) \subseteq C([0, T])$ et l'équation de (T) est satisfaite pour presque tous les $t \in (0, T)$

Preuve: méthode de la variation des constantes.

On a donc à disposition deux problèmes, l'un, (PA) relatif à la variable spatiale $x \in D$ et l'autre, (T) relatif à la variable temporelle.

$$(P_1) \left\{ \begin{array}{l} \operatorname{div} (K(x) \nabla u_m) - a(x) u_m = \lambda_m u_m, x \in D \\ \frac{\partial u_m}{\partial n} = 0, x \in \partial D \end{array} \right\} \quad \left(\begin{array}{l} \rightarrow (\lambda_m, u_m) \\ \text{où } \lambda_m \rightarrow -\infty \\ m \rightarrow +\infty \end{array} \right)$$

et

$$(T) \left\{ \begin{array}{l} W_m'(t) - \lambda_m W_m(t) = f_m(t), t \in (0, \pi) \\ W_m(0) = \varphi_m \end{array} \right\} \quad \text{où } \lambda_m \text{ est la valeur propre du problème } (P_1).$$

On cherche alors une solution de (P_m) sous la forme :

$$u_m(x, t) = \underbrace{U_m(x)}_{\substack{\downarrow \\ \text{solution} \\ \text{de } (P_1)}} \underbrace{W_m(t)}_{\substack{\downarrow \\ \text{solution du} \\ \text{problème } (T)}} = (U_m \otimes W_m)(x, t)$$

Le résultat est le suivant :

Proposition :

Sous les hypothèses données plus haut, les u_m sont solutions généralisées de (P_m) , quel que soit $m \in \mathbb{N}$.

Preuve :

(i) $U_m \in H^{1,0}(D \times (0, \pi))$: la mesurabilité en (x, t) est claire à cause des propriétés des U_m et des W_m .

Par ailleurs :

$$\int_{D \times (0, \pi)} dx dt |U_m(x, t)|^2 = \underbrace{\int_D dx |U_m(x)|^2}_{\equiv 1} \times \int_0^\pi dt |W_m(t)|^2 < +\infty$$

$$\int_{D \times (0, \pi)} dx dt |u_{m, x_i}(x, t)|^2 = \underbrace{\int_D dx |u_{m, x_i}(x)|^2}_{< +\infty} \times \underbrace{\int_0^\pi dt |W_m(t)|^2}_{< +\infty} \quad \forall i \in \{1, \dots, d\}$$

(car $U_m \in H^1(D)$)

(ii) I s'agit de vérifier que :

$$\int_D dx \, U_m(x, t) v(x) = \lim_{\tau \rightarrow t} \int_D dx \, U_m(x, \tau) v(x) - \int_0^t d\tau \int_D dx \, \langle h(x) \nabla U_m(x, \tau) \rangle v(x) \\ - \int_0^t d\tau \int_D dx \, h(x) U_m(x, \tau) v(x) + \int_0^t d\tau \int_D dx \, f_m(\tau) U_m(x, \tau) v(x)$$

quel que soit $v \in H^1(D)$ et $m \in \mathbb{N}^*$.

Ceci revient, par définition de U_m , à vérifier que :

$$W_m(t) \int_D dx \, U_m(x, \tau) v(x) = \lim_{\tau \rightarrow t} \int_D dx \, U_m(x, \tau) v(x) - \int_0^t d\tau \int_D dx \, \langle h(x) \nabla U_m(x, \tau) \rangle v(x) \\ + \int_0^t d\tau \int_D dx \, h(x) U_m(x, \tau) v(x) - \int_0^t d\tau W_m(\tau) \int_D dx \, h(x) U_m(x, \tau) v(x) \\ + \int_0^t d\tau f_m(\tau) \int_D dx \, U_m(x, \tau) v(x)$$

$$(v \in H^1(D), m \in \mathbb{N}^*)$$

Mais, par le problème (7), on a :

$$W_m'(\tau) = \lambda_m W_m(\tau) + f_m(\tau),$$

Intégrons cette relation pour $\tau \in (0, t)$:

$$\int_0^t d\tau W_m'(\tau) = W_m(t) - W_m(0) = \lambda_m \int_0^t d\tau W_m(\tau) + \int_0^t d\tau f_m(\tau)$$

ie:

$$w_m(t) = \varphi_m + \lambda_m \int_0^t d\tau w_m(\tau) + \int_0^t d\tau f_m(\tau)$$

Substituons cette dernière relation dans le membre de gauche de $\circledast$
On obtient:

$$\begin{aligned} w_m(t) &= \int_{\mathcal{D}} dhc \, U_m(hc) \, \psi(hc) = \varphi_m \int_{\mathcal{D}} dhc \, U_m(hc) \, \psi(hc) \\ &+ \lambda_m \int_0^t d\tau w_m(\tau) \int_{\mathcal{D}} dhc \, U_m(hc) \, \psi(hc) \\ &+ \int_0^t d\tau f_m(\tau) \int_{\mathcal{D}} dhc \, U_m(hc) \, \psi(hc). \end{aligned}$$

En comparant $\circledast$ et $\circledast\circledast$,
tout revient à vérifier que:

$$\begin{aligned} \lambda_m \int_0^t d\tau w_m(\tau) \int_{\mathcal{D}} dhc \, U_m(hc) \, \psi(hc) &= - \int_0^t d\tau w_m(\tau) \int_{\mathcal{D}} dhc \, \langle k(hc) \nabla U_m(hc), \nabla \psi(hc) \rangle \\ &- \int_0^t d\tau w_m(\tau) \int_{\mathcal{D}} dhc \, a(hc) U_m(hc) \, \psi(hc) \end{aligned}$$

pour chaque $v \in H^1(\mathcal{D})$, $m \in \mathbb{N}^*$.

Ceci revient encore à vérifier que:

$$\begin{aligned} \int_0^t d\tau w_m(\tau) \left\{ \lambda_m \int_{\mathcal{D}} dhc \, U_m(hc) \, \psi(hc) + \int_{\mathcal{D}} dhc \, \langle k(hc) \nabla U_m(hc), \nabla \psi(hc) \rangle_{\mathbb{R}^d} \right. \\ \left. + \int_{\mathcal{D}} dhc \, a(hc) U_m(hc) \, \psi(hc) \right\} = 0 \end{aligned}$$

$\equiv 0$ par solution de (P_A)

puisque (U_m, λ_m) satisfont (P_A) .

(3) Considérons maintenant le problème (P_N) , $N \in \mathbb{N}^*$,
donné par:

$$(P_N) \begin{cases} U_h(x, t) = \operatorname{div}(k_h \nabla u_h(x, t)) - a_h(x) U_h(x, t) + \sum_{m=1}^N f_m(t) U_m(x, t) \\ U_h(x, 0) = \sum_{m=1}^N \phi_m U_m(x, 0), \quad x \in D. \\ \frac{\partial U_h(x, t)}{\partial \nu_h} = 0, \quad (x, t) \in \partial D \times (0, T) \end{cases}$$

Proposition:

Sous les hypothèses données ci-dessus,
les fonctions $U_N(x, t) = \sum_{m=1}^N U_m(x, t) W_m(t)$
sont solutions généralisées du problème (P_N) .

Preuve: Par la solution du problème (P_m) , on a:

$$\begin{aligned} W_m(t) \int_D \operatorname{div}(k_h \nabla u_h) v_h &= \phi_m \int_D \operatorname{div}(k_h \nabla u_h) v_h - \int_0^t d\tau W_m(\tau) \int_D \operatorname{div}(k_h \nabla u_h(\tau)) v_h \\ &\quad - \int_0^t d\tau W_m(\tau) \int_D a_h(x) U_h(x, \tau) v_h \\ &\quad + \int_0^t d\tau f_m(\tau) \int_D U_h(x, \tau) v_h. \end{aligned}$$

Il suffit alors de sommer cette relation sur $m \in \{1, \dots, N\}$. On obtient:

$$\begin{aligned} \int_D \operatorname{div}(k_h \nabla U_N(x, t)) v_h &= \int_D \operatorname{div}(k_h \nabla U_h(x, 0)) v_h - \int_0^t d\tau \int_D \operatorname{div}(k_h \nabla U_h(x, \tau)) v_h \\ &\quad - \int_0^t d\tau \int_D a_h(x) U_N(x, \tau) v_h \\ &\quad + \int_0^t d\tau \int_D f_h(x, \tau) v_h \end{aligned}$$

quel que soit $v \in H^1(\mathbb{D})$, $N \in \mathbb{N}^*$, où nous avons posé :

$$\varphi_N(hc) = \sum_{m=1}^N \varphi_m(hc), \quad f_N(hc, t) = \sum_{m=1}^N f_m(t) \varphi_m(hc).$$

Idee: Comme les expressions précédentes définissent les sommes partielles des développements de Fourier de φ et $f_0(t)$, on peut espérer obtenir une solution du problème original (P) en faisant $N \rightarrow +\infty$. Pour cela, le résultat suivant est essentiel.

Proposition:

Sous les hypothèses données plus haut, la suite $(U_N)_{N \in \mathbb{N}^*}$ est une suite de Cauchy dans $H^{1,0}(\mathbb{D}_x(0,T))$.

Démonstration:

Soient $M, N \in \mathbb{N}^*$, avec $N > M$.

On a :

$$U_N(x, t) - U_M(x, t) = \sum_{m=M+1}^N U_m(hc) W_m(t)$$

A $t \in (0, T)$ fixé, on estime cette différence dans $H^1(\mathbb{D})$ on a :

$$\|U_M(\cdot, t) - U_N(\cdot, t)\|_{1,2,\text{gh}}^2 = \left(\sum_{m=M+1}^N U_m(\cdot) W_m(t), \sum_{m=M+1}^N U_m(\cdot) W_m(t) \right)_{1,2,\text{gh}}$$

$$= \sum_{m,m'=M+1}^N W_m(t) W_{m'}(t) (U_m, U_{m'})_{1,2,\text{gh}}$$

$$= \sum_{m,m'=M+1}^N W_m(t) W_{m'}(t) |1_m|^{\frac{1}{2}} |1_{m'}|^{\frac{1}{2}} \underbrace{\left(\frac{U_m}{|1_m|^{\frac{1}{2}}}, \frac{U_{m'}}{|1_{m'}|^{\frac{1}{2}}} \right)}_{\equiv S_{m,m'}}$$

$$= \sum_{m=M+1}^N |W_m(t)|^2 \underbrace{|1_m|}_{\rightarrow +\infty!}$$

Il s'agit de contrôler la divergence $|1_m| \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} +\infty$

On a donc:

$$\|U_N(\cdot, t) - U_M(\cdot, t)\|_{1,2,a,h}^2 = \sum_{n=M+1}^N |W_n(t)|^2 |1_n|$$

où $W_n(t) = \varphi_n e^{1_n t} + \int_0^t d\sigma e^{1_n(t-\sigma)} f_n(\sigma).$

Donc:

$$\begin{aligned} |W_n(t)| &\leq |\varphi_n| e^{1_n t} + \left(\int_0^t d\sigma e^{21_n(t-\sigma)} \right)^{1/2} \left(\int_0^t d\sigma |f_n(\sigma)|^2 \right)^{1/2} \\ &\leq |\varphi_n| e^{1_n t} + \|f_n\|_{L^2(0,T)} \left(\int_0^t d\sigma e^{21_n(t-\sigma)} \right)^{1/2} \end{aligned}$$

On a donc:

$$|W_n(t)|^2 \leq 2|\varphi_n|^2 e^{21_n t} + 2\|f_n\|_{L^2(0,T)}^2 \int_0^t d\sigma e^{21_n(t-\sigma)}$$

Mais:

$$\begin{aligned} \int_0^t d\sigma e^{21_n(t-\sigma)} &= e^{21_n t} \int_0^t d\sigma e^{-21_n \sigma} = e^{21_n t} \left[\frac{e^{-21_n \sigma}}{-21_n} \right]_0^t \\ &= e^{21_n t} \left[\frac{e^{-21_n t} - 1}{-21_n} \right] = \frac{1 - e^{-21_n t}}{2|1_n|} \\ &\leq \frac{1}{2|1_n|} \end{aligned}$$

On obtient:

$$|W_n(t)|^2 \leq 2|\varphi_n|^2 e^{21_n t} + \frac{\|f_n\|_{L^2(0,T)}^2}{|1_n|}$$

ie: $|W_n(t)|^2 |1_n| \leq 2|\varphi_n|^2 |1_n| e^{21_n t} + \|f_n\|_{L^2(0,T)}^2$

On obtient donc: $\|U_N(\cdot, t) - U_M(\cdot, t)\|_{1,2,a,h}^2 \leq 2 \sum_{n=M+1}^N |\varphi_n|^2 |1_n| + \sum_{n=M+1}^N \|f_n\|_{L^2(0,T)}^2$

$$\|U_N(\cdot, t) - U_M(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2$$

$$\leq 2 \sum_{m=M+1}^N |\varphi_m|^2 |\lambda_m| e^{2\lambda_m t} + \sum_{m=M+1}^N \|\varphi_m\|_{L^2(0, T)}^2$$

Par intégration sur $L^2(0, T)$, on a:

$$\|U_N - U_M\|_{H^{1,0}(\mathbb{D}_x(0, T))_{a,k}}^2 \leq 2 \sum_{m=M+1}^N |\varphi_m|^2 |\lambda_m| \int_0^T dt e^{2\lambda_m t}$$

$$+ T \sum_{m=M+1}^N \|\varphi_m\|_{L^2(0, T)}^2$$

$$\leq C \left\{ \sum_{m=M+1}^N |\varphi_m|^2 |\lambda_m| \int_0^T dt e^{2\lambda_m t} + \sum_{m=M+1}^N \|\varphi_m\|_{L^2(0, T)}^2 \right\}$$

$$= \left[\frac{e^{2\lambda_m t}}{2\lambda_m} \right]_0^T$$

$$= \frac{e^{2\lambda_m T} - 1}{2\lambda_m}$$

$$= \frac{1 - e^{2\lambda_m T}}{2|\lambda_m|} \leq \frac{1}{2|\lambda_m|}$$

$$\leq C \left\{ \sum_{m=M+1}^N |\varphi_m|^2 + \sum_{m=M+1}^N \|\varphi_m\|_{L^2(0, T)}^2 \right\}$$

$$\xrightarrow{M, N \rightarrow +\infty} 0$$

Soit $U_s \equiv \lim_{N \rightarrow +\infty} U_N$ dans $H^{1,0}(\mathbb{D}_x(0, T))$. on montre que, en prenant la limite $N \rightarrow +\infty$ dans $(\mathcal{I}_N)$, dont U_N est solution généralisée, U_s est solution généralisée de $(\mathcal{I})$ (exercice).

Pour l'unicité, cf: exercices.

Par ailleurs, en répétant le même type d'estimation que ci-dessus, on peut montrer qu'il existe $C \in \mathbb{R}_+^*$ telle que:

$$\|U_N\|_{H^{1,0}(\mathbb{D}_x(0, T))_{a,k}}^2 \leq C \left\{ \|\varphi\|_2^2 + \|\varphi\|_{L^2(\mathbb{D}_x(0, T))}^2 \right\}$$

$$\leq C \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} |p_m|^2 + \sum_{m=1}^{\infty} \|g_m\|^2_{L^2(0,T)} \right\} = C \left\{ \|\varphi\|_2^2 + \|g\|_{L^2(D_x(0,T))}^2 \right\}$$

quel que soit $N \in \mathbb{N}^*$

Faisant $N \rightarrow +\infty$, on a :

$$\|v\|_{H^{1,0}(D_x(0,T))}^2 \leq C \left\{ \|\varphi\|_2^2 + \|g\|_{L^2(D_x(0,T))}^2 \right\}$$

et donc a fortiori :

$$\|v\|_{H^{1,0}(D_x(0,T))}^2 \leq C \left\{ \|\varphi\|_2^2 + \|g\|_{L^2(D_x(0,T))}^2 \right\}$$

Terminologie :

Des solutions généralisées (ou variationnelles) de (E) faisant intervenir des fonctions tests indépendantes de t seront appelées solution de type I.

On peut également définir une notion des solution généralisée variationnelle de type (II) en faisant intervenir des fonctions tests dépendant de (x, t)

Définition :

On appelle solution (généralisée, variationnelle) de type (II) toute fonction $u \in H^{1,0}(D_x(0,T))$ satisfaisant à la relation :

$$\int_D dx \, u(x, t) v(x, t) = \int_D dx \, \psi(x) v(x, 0) - \int_0^t d\tau \int_D dx \, \langle K(x) \nabla u(x, \tau), \nabla v(x, \tau) \rangle$$

$$- \int_0^t d\tau \int_D dx \, a(x) u(x, \tau) v(x, \tau) + \int_0^t d\tau \int_D dx \, g(x, \tau) v(x, \tau)$$

quel que soient $v \in H^1(D \times (0, \pi))$, $t \in (0, \pi)$

Remarque: Toute solution de type (II) est solution de type (I); car $H^1(D) \subseteq H^1(D \times (0, \pi))$

Inversement, on peut montrer que toute solution de type (I) est également solution de type (II).
(Exercice)