2. Antilles–Guyane juin 2005

1. **a.** Déterminer suivant les valeurs de l'entier naturel non nul n le reste dans la division euclidienne par 9 de 7^n.

   b. Démontrer alors que $(2005)^{2005} \equiv 7\ (9)$.

2. **a.** Démontrer que pour tout entier naturel non nul n : $(10)^n \equiv 1\ (9)$.

   b. On désigne par N un entier naturel écrit en base dix, on appelle S la somme de ses chiffres.
   Démontrer la relation suivante : $N \equiv S\ (9)$.

   c. En déduire que N est divisible par 9 si et seulement si S est divisible par 9.

3. On suppose que $A = (2005)^{2005}$; on désigne par :
   - B la somme des chiffres de A ;
   - C la somme des chiffres de B ;
   - D la somme des chiffres de C.

   a. Démontrer la relation suivante : $A \equiv D\ (9)$.

   b. Sachant que $2005 < 10000$, démontrer que A s'écrit en numération décimale avec au plus 8 020 chiffres. En déduire que $B \leqslant 72\,180$.

   c. Démontrer que $C \leqslant 45$.

   d. En étudiant la liste des entiers inférieurs à 45, déterminer un majorant de D plus petit que 15.

   e. Démontrer que $D = 7$.

6. La Réunion juin 2005

Dans cet exercice, on pourra utiliser le résultat suivant :
« Étant donnés deux entiers naturels a et b non nuls, si PGCD$(a\ ;\ b) = 1$ alors PGCD$(a^2\ ;\ b^2) = 1$ ».

Une suite (S_n) est définie pour $n > 0$ par $\mathrm{S}_n = \sum_{p=1}^{n} p^3$. On se propose de calculer, pour tout entier naturel non nul n, le plus grand commun diviseur de S_n et S_{n+1}.

1. Démontrer que, pour tout $n > 0$, on a : $\mathrm{S}_n = \left(\dfrac{n(n+1)}{2}\right)^2$.

2. Étude du cas où n est pair. Soit k l'entier naturel non nul tel que $n = 2k$.

   a. Démontrer que PGCD$(\mathrm{S}_{2k}\ ;\ \mathrm{S}_{2k+1}) = (2k+1)^2$PGCD$\left(k^2\ ;\ (k+1)^2\right)$.

   b. Calculer PGCD $(k\ ;\ k+1)$.

   c. Calculer PGCD$(\mathrm{S}_{2k}\ ;\ \mathrm{S}_{2k+1})$.

3. Étude du cas où n est impair. Soit k l'entier naturel non nul tel que $n = 2k+1$.

   a. Démontrer que les entiers $2k+1$ et $2k+3$ sont premiers entre eux.

   b. Calculer PGCD$(\mathrm{S}_{2k+1}\ ;\ \mathrm{S}_{2k+2})$.

4. Déduire des questions précédentes qu'il existe une unique valeur de n, que l'on déterminera, pour laquelle S_n et S_{n+1} sont premiers entre eux.

4. Centres étrangers juin 2005

Partie A

Soit N un entier naturel, impair non premier.

On suppose que $N = a^2 - b^2$ où a et b sont deux entiers naturels.

1. Montrer que a et b n'ont pas la même parité.
2. Montrer que N peut s'écrire comme produit de deux entiers naturels p et q.
3. Quelle est la parité de p et de q ?

Partie B

On admet que 250 507 n'est pas premier.

On se propose de chercher des couples d'entiers naturels $(a\,;\,b)$ vérifiant la relation

$$\text{(E)}: \quad a^2 - 250\,507 = b^2.$$

1. Soit X un entier naturel.
   a. Donner dans un tableau, les restes possibles de X modulo 9 ; puis ceux de X^2 modulo 9.
   b. Sachant que $a^2 - 250507 = b^2$, déterminer les restes possibles modulo 9 de $a^2 - 250507$; en déduire les restes possibles module 9 de a^2.
   c. Montrer que les restes possibles modulo 9 de a sont 1 et 8.
2. Justifier que si le couple $(a\,;\,b)$ vérifie la relation (E), alors $a \geqslant 501$. Montrer qu'il n'existe pas de solution du type $(501\,;\,b)$.
3. On suppose que le couple $(a\,;\,b)$ vérifie la relation (E).
   a. Démontrer que a est congru à 503 ou à 505 modulo 9.
   b. Déterminer le plus petit entier naturel k tel que le couple $(505 + 9k\,;\,b)$ soit solution de (E), puis donner le couple solution correspondant.

Partie C

1. Déduire des parties précédentes une écriture de 250 507 en un produit deux facteurs.
2. Les deux facteurs sont-ils premiers entre eux ?
3. Cette écriture est-elle unique ?

7. Liban juin 2005

1. On considère l'équation (E) :

$$109x - 226y = 1$$

où x et y sont des entiers relatifs.

a. Déterminer le pgcd de 109 et 226. Que peut-on en conclure pour l'équation (E) ?

b. Montrer que l'ensemble de solutions de (E) est l'ensemble des couples de la forme $(141 + 226k,\ 68 + 109k)$, où k appartient à $\mathbb{Z}$.

En déduire qu'il existe un unique entier naturel non nul d inférieur ou égal à 226 et un unique entier naturel non nul e tels que $109d = 1 + 226e$. (On précisera les valeurs des entiers d et e.)

2. Démontrer que 227 est un nombre premier.

3. On note A l'ensemble des 227 entiers naturels a tels que $a \leqslant 226$.

On considère les deux fonctions f et g de A dans A définies de la manière suivante :

à tout entier de A, f associe le reste de la division euclidienne de a^{109} par 227.

à tout entier de A, g associe le reste de la division euclidienne de a^{141} par 227.

a. Vérifier que $g[f(0)] = 0$.

On rappelle le résultat suivant appelé petit théorème de Fermat :

Si p est un nombre premier et a un entier non divisible par p alors $a^{p-1} \equiv 1 \quad$ modulo p.

b. Montrer que, quel que soit l'entier non nul a de A, $a^{226} \equiv 1 \quad [\text{modulo } 227]$.

c. En utilisant **1. b.**, en déduire que, quel que soit l'entier non nul a de A. $g[f(a)] = a$.

Que peut-on dire de $f[(g(a)] = a$?