Conception = HEC Paris
Option Economique.

EXERCICE :

Soit n un entier supérieur ou égal à 2 et f un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$.

- On note $Id_{\mathbb{R}^n}$ l'endo identité de $\mathbb{R}^n$ et $0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)}$ l'endomorphisme nul de $\mathbb{R}^n$.
- On pose : $f^0 = Id_{\mathbb{R}^n}$ et $\forall j \in \mathbb{N}$, $f^{j+1} = f \circ f^j$.
- On suppose que f^n est l'endomorphisme nul de $\mathbb{R}^n$:

$\boxed{f^n = 0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)}}$

1) Soit M la matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

a) déterminer le spectre de M.
La matrice M est-elle diagonalisable ?
b) Préciser le rang des matrices M et M^2 respectivement.
c) Quels sont les polynômes annulateurs de M dont le degré est égal à 3 ?

2). $\forall j \in [\![0;n]\!]$, on note F_j l'image de l'endomorphisme f^j et r_j son rang : $F_j = \mathrm{Im}(f^j)$ et $r_j = \dim(F_j)$.
$\forall j \in [\![0;n-1]\!]$, on note g_j la restriction de f à F_j. c.à.d l'application linéaire de F_j dans $\mathbb{R}^n$ définie par : $\forall x \in F_j$, $g_j(x) = f(x)$.

(a) Calculer r_0 et r_n.
(b) Soit $j \in [\![0; n-1]\!]$
(i) Déterminer le rang de g_j.
(ii) Justifier l'égalité : $r_j - r_{j+1} = \dim(\mathrm{Ker}(f) \cap F_j)$.
c) Etablir les inégalités : $n \geq r_0 - r_1 \geq r_1 - r_2 \geq \dots \geq r_{n-1} - r_n$

3) $\forall i \in [\![1,n]\!]$, on pose : $x_i = \mathrm{Card}(\{j \in [\![0;n-1]\!] ; r_j - r_{j+1} = i\})$
(a) Montrer que $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ est un element de $P(n)$
(b) Dans cette question, on suppose que n est égal à 4
(i) Déterminer (x_1, x_2, x_3, x_4) lorsque f est l'endomorphisme de la matrice M dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$

(ii) Trouver l'ensemble $P(4)$ et vérifier que $p(4)=5$

(iii) Mq $\forall (x_1,x_2,x_3,x_4)\in P(4)$, il existe un endo f de $\mathbb{R}^4$ vérifiant *

4) Pour tout couple $(\ell,k)\in(\mathbb{N}^*)^2$, on pose : $Q(\ell,k)=\{(x_1,x_2,\dots,x_k)\in P(k)\,;\ x_1+x_2+\dots+x_k\leq \ell\}$ et $q(\ell,k)=\mathrm{Card}(Q(\ell,k))$.

a) Soit $k\in\mathbb{N}^*$

(i) Trouver l'ensemble $Q(1,k)$.

(ii) Pour tout entier $\ell\geq k$, justifier l'égalité : $Q(\ell,k)=P(k)$

b) Pour tout couple (ℓ,k) d'entiers tels que $k>\ell\geq 2$, établir la relation : $q(\ell,k-\ell)=\mathrm{Card}(\{(x_1,x_2,\dots,x_k)\in P(k)\,;\ x_1+x_2+\dots+x_k=\ell\})$.

c) Soit ℓ un entier supérieur ou égal à 2.

(i) Pour tout $k>\ell$, montrer l'égalité : $q(\ell,k)=q(\ell-1,k)+q(\ell,k$

(ii) Que vaut $q(\ell,\ell)-q(\ell-1,\ell)$?

5).
```
function q = matrix(n)
    q = ones(n,n);
    for L=2 : n
      for K=2 : n
        if(K<L)then q(L,K)=______;
         else if(K==L) then q(L,K)=______;
            else q(L,K)=q(L-1,K)+q(L,K-L);end;
        end;
      end;
    end;
end function.
```

a) Compléter la ligne (5) et (6).

b) Donner un script Scilab permettant de calculer $p(n)$ à partir d'une valeur de n entrée au clavier.

PROBLÈME:

Dans tout le problème:

- toutes les variables aleatoires introduites sont supposées définies sur un même espace probabilisé (Ω, A, P);
- On note n un entier supérieur ou égal à 2.

L'objet du problème est l'étude de sommes de variables aleatoires suivant une loi de Bernoulli de même paramètre mais qui ne sont pas nécessairement indépendantes. Les parties II et III sont independantes de la partie I.

Partie I - Valeurs possibles du coefficient de correlation linéaire dans divers schema de Bernoulli

Dans cette partie on considère des variables aléatoires $X_1, X_2, \dots, X_n$ suivant chacune la même loi de Bernoulli de paramètre p avec $0<p<1$, c'est-à-dire:

$\forall k \in [\![1;n]\!]$, $P([X_k=1])=p$ et $P([X_k=0])=1-p$

On suppose que pour tout couple $(k,\ell) \in [\![1,n]\!]^2$ avec $k \neq \ell$, le coefficient de corrélation linéaire des variables aleatoires X_k et X_ℓ est le même; on note r ce coefficient. On a donc:

$$\forall (k,\ell) \in [\![1,n]\!]^2, \quad \frac{Cov(X_k, X_\ell)}{\sqrt{V(X_k)V(X_\ell)}} = \begin{cases} 1 \text{ si } k=\ell \\ r \text{ si } k \neq \ell. \end{cases}$$

1) a) Dans ces deux cas (i) et (ii) suivants, calculer la valeur de r et exprimer la variance de la variable aleatoire $\sum_{k=1}^{n} X_k$ en fonction de n et p.

(i) Les variables aleatoires $X_1, X_2, \dots, X_n$ sont mutuellement independantes.

(ii) Les variables aléatoires $X_1, X_2, \dots, X_n$ sont toutes égales

De plus, préciser la loi de $\sum_{k=1}^{n} X_k$ dans chacun des deux cas précédents.

b) Mq : $\forall k \in [1;n]$, la variance de la variable aléatoire $\sum_{i=1}^{k} X_i$ est donné par la formule :

$$V\left(\sum_{i=1}^{k} X_i\right) = kp(1-p)(1+(k-1)r).$$

c) En déduire que le coefficient r est au moins égal à $-\frac{1}{n-1}$

2) On suppose dans cette question que n est égal à 2

(a) Mq r est égal à -1 si et seulement si on a :

$$P([X_1=0]\cap[X_2=1]) = p(2p-1)$$

(b) Que vaut alors $P([X_1=0]\cap[X_2=0])$?

(c) En déduire que r ne peut être égal à -1 que lorsque $p=\frac{1}{2}$ et $P([X_1+X_2=1])=1$

3. On suppose dans cette question que n est supérieur ou égal à 3 et que $P([\sum_{k=1}^{n} X_k = 1]) = 1$

(a) Exprimer les valeurs de p et r en fonction de n

(b) Déterminer les n-uplets $(x_1, x_2, --, x_n) \in \{0,1\}^n$ pour lesquels la probabilité $P(\bigcap_{k=1}^{n}[X_k = x_k])$ est strictement positive et la calculer.

Partie II : lois bêta-binomiales.

1. Soit $(x,y)\in\mathbb{R}^2$.

(a) justifier que l'intégrale $\int_0^{1/2} t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,dt$ est convergente si et seulement si $x>0$.

(b) Pour tout réel ε tel que $0<\varepsilon<\frac{1}{2}$, établir à l'aide du changement de variable affine, l'égalité :

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1-\varepsilon} t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,dt = \int_{\varepsilon}^{\frac{1}{2}} t^{y-1}(1-t)^{x-1}\,dt.$$

(c) En déduire que l'intégrale $\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,dt$ est convergente si et seulement si $x>0$ et $y>0$

Dans toute la suite du problème, on pose :
$\forall (x,y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2,\ B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,dt$

5. Soit x et y des réels strictement positifs.
a) À l'aide d'une intégration par parties, établir la relation : $B(x+1,y) = \frac{x}{y} \times B(x,y+1)$.
b) En déduire l'égalité : $B(x,y+1) = \frac{y}{x+y} \times B(x,y)$.

6) Pour tout réel z, soit $((z)^{[m]})_{m\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :
$(z)^{[0]} = 1$ et $\forall m \in \mathbb{N},\ (z)^{[m+1]} = (z+m)\times(z)^{[m]}$.
(par exemple, $\forall m \in \mathbb{N}$, on a : $(1)^{[m]} = m!$).

Établir pour tout $(x,y)\in(\mathbb{R}_+^*)^2$ et pour tout couple (k,ℓ) d'entiers tels que $0 \le k \le \ell$, la relation :
$$B(x+k, y+\ell-k) = \frac{(x)^{[k]} \times (y)^{[\ell-k]}}{(x+y)^{[\ell]}} \times B(x,y)$$

7. Soit a et b des réels strictement positifs.
Pour tout $k \in [0;n]$, on pose : $p_k = \binom{n}{k}\frac{(a)^{[k]} \times (b)^{[n-k]}}{(a+b)^{[n]}}$

a) À l'aide de la relation obtenue dans la q° 6, mq $\sum_{k=0}^{n} p_k = 1$.

On dit qu'une variable aléatoire S suit la loi bêta-binomiale $B(n;a,b)$ si $S(\Omega) = [\![0,n]\!]$ et si :
$$\forall k \in [\![0,n]\!],\ P([S=k]) = \binom{n}{k}\frac{(a)^{[k]} \times (b)^{[n-k]}}{(a+b)^{[n]}}$$

b) Reconnaître la loi $B(n;1,1)$
c) Mq l'espérance d'une variable aléatoire S qui suit la loi $B(n;a,b)$ est égale à $\frac{na}{a+b}$

Partie III - Un modèle possible dans le cas n=2

Soit a et b des réels strictements positifs et X_1, X_2 deux variables aléatoires à valeur dans $\{0;1\}$ telles que : $\forall (x_1,x_2)\in\{0,1\}^2$,
$$P([X_1 = x_1]\cap[X_2 = x_2]) = \frac{B(a+x_1+x_2,\ b+2-x_1-x_2)}{B(a,b)}.$$

8) a). Mq les deux variables aleatoires X_1 et X_2 suivent la même loi de Bernoulli.

b) Mq la variable aleatoire X_1+X_2 suit la loi bêta-binomiale $B(2;a,b)$.

c) Etablir la relation : $P_{[X_1=1]}([X_2=1]) = \frac{a+1}{a+b+1}$

9) La fonction Scilab effectue une simulation des deux variables aleatoires X_1 et X_2 qu'elle place dans un vecteur ligne à deux composantes.

```
(1) function x=randbetabin(a,b)
(2)         x=zeros(1,2);
(3)         u=(a+b)*rand();
(4)         v=(a+b+1)*rand();
(5)              if (u<a) then x(1,1)=1; if....then x(1,2)=1; end;
(6)              else if.... then x(1,2)=1; end;
(7)           end;
(8) end function.
```

(a) Préciser la loi simulée par la variable u de la ligne (3)

(b) Compléter les lignes (5) et (6)

10) a) Calculer le coeff de corrélation linéaire X_1 et X_2

b) Soit (p,r) un couple de réels vérifiant $0<p<1$ et $0<r<1$.
Expliquer comment utiliser la fonction randbetabin pour simuler deux variables aléatoires suivant une même loi de Bernoulli de paramètre p et dont le coefficient de corrélation linéaire est égale à r.