Exercice 1 :

1) a) Si les calculs de M^2 et M^3 ne posent pas de problème, faire un raisonnement par l'absurde peut en gêner certains. Le but de celui-ci est de montrer que si l'on considère la propriété comme vraie, alors on aboutit à une contradiction.

$$M^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M^3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{M^3 = 0}$$

Or, si on considère que M^{-1} existe, alors on a :

$$M^3 = 0$$
$$M^{-1}M^3 = M^{-1}0$$
$$M^{-1}MM^2 = 0$$
$$M^2 = 0$$

Or, $\boxed{M^2 \neq 0}$

Par conséquent, M n'est pas inversible.

b) Ayant trouvé que $M^3 = 0$ dans la question précédente, vous vous doutez bien que $M^n = 0$ pour $n \geq 3$, mais il faut le rédiger correctement.

D'après 1.a) on a $M^3 = 0$ donc $M^4 = M^3 M = 0$.

Or, pour $n \geq 3$, on a $M^n = M^{n-3}M^3 = 0$.

Par conséquent :

$$\boxed{M^n = 0 \text{ pour } n \geq 3}$$

c) Attention !! Ne tombez surtout pas dans le piège de faire les calculs avec les matrices sous forme de tableau. Vous allez perdre beaucoup trop de temps et risquez de faire des erreurs. Gardez les calculs sous cette forme car il suffit de développer l'expression pour trouver la réponse.

$$\begin{aligned}(I-M)(I+M+M^2) &= I + M + M^2 - M - M^2 - M^3 \\ &= I - M^3\end{aligned}$$

Or, d'après 1.a) on a $M^3 = 0$ donc :

$$\boxed{(I-M)(I+M+M^2) = I}$$

Par conséquent, $(I-M)$ est inversible et on a :

$$\boxed{(I-M)^{-1} = (I+M+M^2)}$$

d) Attention à la rédaction !! Cette année encore le rapport du jury a constaté que trop d'élèves disent "le" au lieu de "un" polynôme annulateur.

D'après 1.a), on a $M^3 = 0$.

On pose $R(X) = X^3$. On a alors $R(M) = M^3 = 0$.

Par conséquent, $R(X) = X^3$ est bien un polynôme annulateur de M.

c) C'est simplement du cours. A partir du moment où vous avez trouvé un polynôme annulateur, vous savez que les valeurs propres possibles sont racines de ce polynôme.

D'après 1. a) on a $R(X) = X^3$ qui est un polynôme annulateur de M.

Or les valeurs propres possibles de M étant racines de ce polynôme, la seule racine de $R(X)$ est $x = 0$.

Par conséquent, la seule valeur propre possible de M est 0.

2) a) Bien souvent lorsque l'on a une matrice égale à 0 au bout d'une certaine puissance, le sujet invite à utiliser la formule du binôme de Newton. Ici le sujet mentionne clairement la formule mais ce n'est pas toujours le cas donc pensez-y si jamais on vous demande la puissance d'une matrice du type $(A+I)^n$ avec $A^n = 0$ au bout d'un certain moment.

On a $S^n = (M+I)^n$.

Grâce à la formule du binôme de Newton on a :

$$(M+I)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} M^n I^{n-k}$$ formule du binôme de Newton à savoir par cœur !!

$$= \binom{n}{0} M^0 I^n + \binom{n}{1} M I^{n-1} + \binom{n}{2} M^2 I^{n-2} + \ldots + \binom{n}{n} M^n I^0$$

Or, d'après 1. b) on a $M^n = 0$ pour $n \geq 3$ ce qui donne :

$$S^n = I + nM + \binom{n}{2} M^2 = I + nM + \frac{n(n-1)}{2} M^2$$

$$\boxed{S^n = I + nM + \frac{n(n-1)}{2} M^2}$$

b) Vous n'avez qu'à utiliser la formule précédente et sommer la deuxième colonne de I, de nN et de $\frac{n(n-1)}{2}N^2$.

D'après 2.a) on a $S^n = I + nN + \frac{n(n-1)}{2}N^2$ donc la $2^{ème}$ colonne de S^n est donnée par le calcul :

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n \\ -n \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{n(n-1)}{2} \\ -n(n-1) \\ \frac{n(n-1)}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n + \frac{n(n-1)}{2} \\ 1 - n - n(n-1) \\ \frac{n(n-1)}{2} \end{pmatrix}$$

3) a) Question récurrente qu'il faut absolument maîtriser ! Il suffit simplement de faire le produit pour obtenir u_{n+1}, v_{n+1} et w_{n+1} tel que le suggère la colonne.

On a $S = N + I = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$S\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3u_n + v_n \\ -3u_n + w_n \\ u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \\ w_{n+1} \end{pmatrix}$$

b) Cette question sera toujours précédée de la précédente tout simplement car elle est nécessaire pour pouvoir établir cette relation par récurrence. Les deux questions étant présentes presque chaque année et le raisonnement étant toujours le même, regardez bien la rédaction pour pouvoir la réutiliser.

Initialisation : pour $n = 0$ on a $\begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{pmatrix} = S^0 \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{pmatrix}$

La propriété est bien vraie pour le premier terme $n = 0$.

Hérédité : Supposons que la propriété soit vraie pour un n entier quelconque, qu'en est-il au rang suivant ?

D'après l'hypothèse de récurrence on a $\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix} = S^n \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{pmatrix}$

et d'après 3.a) on a $\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \\ w_{n-1} \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$

$$S^n \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$$

$$S . S^n \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} v_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$$

$$\boxed{S^{n+1} \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \\ w_{n+1} \end{pmatrix}}$$

Conclusion : Par récurrence, la propriété est bien vraie pour tout n entier au rang suivant.

c) Grâce à la relation précédente, nous pouvons déterminer sans problème u_n, v_n et w_n. Quant à la 2ème partie de la ~~question~~ répartition, nous n'avez qu'à faire la somme.

D'après 3.b) on a $\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix} = S^n \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{pmatrix} = S^n \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

$$= \begin{pmatrix} a & n + \frac{n(n-1)}{2} & b \\ c & 1 - n - n(n-1) & d \\ e & \frac{n(n-1)}{2} & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n + n(n-1) \\ 1 - n - n(n-1) \\ \frac{n(n-1)}{2} \end{pmatrix}$$

On a donc :

$\boxed{u_n = n + \frac{n(n-1)}{2}}$ $\boxed{v_n = 1 - n - n(n-1)}$ et $\boxed{w_n = \frac{n(n-1)}{2}}$

Ainsi, $u_n + v_n + w_n = n + \frac{n(n-1)}{2} + 1 - n - n(n-1) + \frac{n(n-1)}{2}$

$= 1 + \frac{2n(n-1)}{2} - n(n-1)$

$= 1 + n(n-1) - n(n-1)$

$= 1$

On a bien : $\boxed{u_n + v_n + w_n = 1}$

5/a) $V = -MU = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$W = M^2 U = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

b) $P^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

On a $\boxed{P^2 = I}$

Par conséquent, P est inversible et on a :

$\boxed{P^{-1} = P}$

c) $PM = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$PMP = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

On a donc : $J = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Exercice 2 :

1) C'est une simple question de calcul. On vous donne u_1 et v_1 et comment obtenir les termes d'après donc vous n'avez qu'à utiliser les formules.

$$U_2 = \frac{U_1^2}{U_1 + V_1} = \frac{1}{1+2} = \frac{1}{3}$$

$$V_2 = \frac{V_1^2}{U_1 + V_1} = \frac{4}{1+2} = \frac{4}{3}$$

$$\boxed{U_2 = \frac{1}{3}} \quad \text{et} \quad \boxed{V_2 = \frac{4}{3}}$$

$$U_3 = \frac{U_2^2}{U_2 + V_2} = \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^2}{\frac{1}{3} + \frac{4}{3}} = \frac{\frac{1}{9}}{\frac{5}{3}} = \frac{3}{5} \times \frac{1}{9} = \frac{3}{15}$$

$$V_3 = \frac{V_2^2}{U_2 + V_2} = \frac{\left(\frac{4}{3}\right)^2}{\frac{1}{3} + \frac{4}{3}} = \frac{\frac{16}{9}}{\frac{5}{3}} = \frac{3}{5} \times \frac{16}{9} = \frac{16}{15}$$

$$\boxed{U_3 = \frac{3}{15}} \quad \text{et} \quad \boxed{V_3 = \frac{16}{15}}$$

2) Lorsque vous avez une récurrence à faire avec une suite et que le sujet vous donne u_{n+1} comme ici, il faut reconstruire u_{n+1} à partir de u_n dans l'hérédité.

Initialisation : pour $n = 1$ on a : - $U_1 = 1$ donc $U_1 > 0$
- $V_1 = 2$ donc $V_1 > 0$

Les propriétés sont donc vraies pour le premier terme $n = 1$.

Hérédité : Supposons que la propriété soit vraie pour un n entier quelconque, qu'en est-il au rang suivant ?

D'après l'hypothèse de récurrence on a : - $U_n > 0$
- $V_n > 0$

et d'après l'énoncé on a : - $u_{n+1} = \frac{U_n^2}{U_n + V_n}$

- $V_{n+1} = \frac{V_n^2}{U_n + V_n}$

$U_n > 0$	$V_n > 0$
$U_n^2 > 0$	$V_n^2 > 0$
$\frac{U_n^2}{U_n+V_n} > 0$	$\frac{V_n^2}{U_n+V_n} > 0$
$\boxed{u_{n+1} > 0}$	$\boxed{V_{n+1} > 0}$

Conclusion : Par récurrence, les propriétés sont vraies pour un n entier quelconque au rang suivant.

3) Pour étudier le sens de variation d'une suite (croissance ou décroissance), le mieux est de faire $u_{n+1} - u_n$.
Si $u_{n+1} - u_n \leq 0$, alors u_n est décroissante.

Quant à la convergence, il faut utiliser à la fois une minoration/majoration et la croissance/décroissance de la suite

NB : on peut aussi faire $\frac{U_n}{U_{n+1}}$ mais en général $u_{n+1}-u_n$ est plus rapide et simple.

Calculons $u_{n+1}-u_n$ et $V_{n+1}-V_n$.

$$U_{n+1}-U_n = \frac{U_n^2}{U_n+V_n} - U_n = \frac{U_n^2 - U_n(U_n+V_n)}{U_n+V_n} = \frac{U_n^2-U_n^2-U_nV_n}{U_n+V_n} = -\frac{U_nV_n}{U_n+V_n}$$

$$V_{n+1}-V_n = \frac{V_n^2}{U_n+V_n} - V_n = \frac{V_n^2 - V_n(U_n+V_n)}{U_n+V_n} = \frac{V_n^2-V_n^2-V_nU_n}{U_n+V_n} = -\frac{U_nV_n}{U_n+V_n}$$

Or, d'après 2.) on a $U_n>0$ et $V_n>0$ donc : $U_n+V_n>0$
$-U_nV_n<0$

ce qui donne $-\frac{U_nV_n}{U_n+V_n}<0$.

On a donc : $\boxed{u_{n+1}-U_n<0}$ et $\boxed{V_{n+1}-V_n<0}$

U_n et V_n sont donc décroissantes.

Or, toujours d'après 2.) on a $U_n>0$ et $V_n>0$ et par théorème, toute suite minorée et décroissante converge.

U_n et V_n sont donc convergentes.

5/a) Il faut bien comprendre qu'une suite constante signifie que l'on a $u_{n+1} = u_n$. Donc ici, vous n'avez qu'à faire le calcul $U_{n+1} - V_{n+1}$ pour vous rendre compte que vous obtenez $U_n - V_n$.

Pour déterminer la relation, il suffit de passer à la limite en calculant $U_1 - V_1$ par exemple pour savoir quelle valeur prendre $u_n - v_n$ pour n'importe quel n.

On a $u_{n+1} - v_{n+1} = \frac{u_n^2}{u_n+v_n} - \frac{v_n^2}{u_n+v_n} = \frac{u_n^2 - v_n^2}{u_n+v_n}$

C'était l'astuce à voir.

Cela n'était pas très difficile puisqu'on cherchait à se débarrasser du $u_n + v_n$ en bas.

$$= \frac{(u_n+v_n)(u_n-v_n)}{(u_n+v_n)} = u_n - v_n$$

On a donc : $\boxed{u_{n+1} - v_{n+1} = u_n - v_n}$

La suite $u_n - v_n$ est donc bien constante.

En passant à la limite on a donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n - v_n = l - l'$

Or, puisque $u_n - v_n$ est constante, on a partout n $u_n - v_n = u_1 - v_1 = 1 - 2 = -1$

On a donc : $\boxed{l - l' = -1}$ ce qui donne

$\boxed{l = l' - 1}$ et $\boxed{l' = l + 1}$

b) <u>Attention erreur d'énoncé !!</u> Il faut trouver <u>$ll' = 0$</u> et non pas $ll' = -1$. Les candidats qui avaient trouvé le bon résultat ont eu un bonus de +5 sur l'exercice, un joli cadeau bien mérité. Cette erreur d'énoncé est particulièrement regrettable car elle a induit en erreur de nombreux candidats alors que la question était très facile compte tenu du fait que l'énoncé donne la relation à utiliser. Cependant, la question a été annulée pour ne pas les pénaliser.

$u_{n+1} = \frac{u_n^2}{u_n+v_n}$ donc $u_n^2 = u_{n+1}(u_n+v_n)$

On a $u_{n+1}(u_n+v_n) = u_n^2$.

En passant à la limite on a donc : $l(l+l') = l^2$

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

$l^2 + ll' = l^2$

$ll' = 0$

On a donc bien $\boxed{l l' = 0}$

c) Il faut réutiliser la relation précédente tout en remarquant certains points : - si $ll' = 0$ alors soit on a $l = 0$, soit on a $l' = 0$.
- la relation que vous avez déterminé en 4.a) doit vous permettre de donner une expression de l' et l.
- il faut toujours garder en tête que U_n et V_n sont strictement positives donc on ne peut pas avoir l ou l' négatif.

D'après 4.b) on a $l l' = 0$ et d'après 4.a), $l = l' - 1$.

On a donc :
$$l l' = 0$$
$$(l' - 1) l' = 0$$
$$l'^2 - l' = 0$$
$$l'^2 = l'$$

Par conséquent, on a soit $l' = -1$, soit $l' = 1$.

Or, puisque $V_n > 0$ d'après 2.), on a donc : $\boxed{l' = 1}$

Ainsi, puisque $l l' = 0$, on en déduit donc que $\boxed{l = 0}$

5) a.) Toute la fin de l'exercice sera consacrée à Scilab. On commence doucement avec un simple programme à compléter dans lequel il faut bien faire attention à la rédaction des commandes scilab.

```
(1) n = input('entrer la valeur de n : ')
(2) u = 1
(3) v = 2
(4) for k = 2 : n
(5)     a = u
(6)     u = u ^ 2 / (u + v)
(7)     v = v ^ 2 / (u + v)
(8) end
```

il suffit de réécrire les formules de u_{n+1} et V_{n+1}.

(9) disp(u)
(10) disp(V)

6) a) Comme d'habitude après vous avoir demandé de compléter un programme assez simple, le sujet vous demande ensuite de lire et comprendre un autre programme.

Si le contenu de x ne pose pas de problème, celui de y nécessite cependant de savoir que la commande "cumsum" correspond à la somme partielle des x.

x contient $u_1, u_2, \ldots, u_n$ donc x contient les n premiers termes de u_n.

y contient $\sum_{i=1}^{1} u_i, \sum_{i=1}^{2} u_i, \ldots, \sum_{i=1}^{n}$ soit les n premières sommes partielles de u_n.

b) On constate que $\sum_{i=1}^{n} u_i$ est majorée par 1,5 donc la série $\sum u_n$ est convergente car la suite des sommes partielles est majorée.

Exercice 3 :

1) Le grand classique ! Souvenez-vous bien des 3 critères : - positif
- continue
- $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$ → N'oubliez pas la relation de Chasles !

Continuité et signe : - Pour $x < -1$ ou $x > 1$ on a $f(x) = 0$

donc $f(x)$ est positive et continue sur $]-\infty; -1]$ et $[1; +\infty[$.

- Pour $-1 \leq x \leq 0$ on a $f(x) = \frac{1-a}{2}$ avec $-\frac{1}{2} \leq a \leq \frac{1}{2}$

donc $f(x)$ est continue et positive sur $]-1; 0[$.