ESCP 2015

Exercice 1 :

1) a) Beaucoup de candidats sont passés totalement à côté de l'exercice car ils ont cru qu'il fallait primitiver $\frac{e^t}{t}$.

Or, c'est bien $\frac{e^t}{t}dt$ et pas $\frac{e^x}{x}dx$. De plus, juste avant les questions, l'énoncé précise bien que " on ne cherchera pas à calculer l'intégrale qui définit $f(x)$ ".

Il suffisait juste de poser une relation avec $G(t)$.

On a $f(x) = \int_1^x \frac{e^t}{t}\, dt$

$$f(x) = \int_1^x g(t)\, dt = [G(t)]_1^x = G(x) - G(1)$$

$$\boxed{f(x) = G(x) - G(1)}$$

b) Attention !! Ne commencez pas à chercher des théorèmes douteux et surtout faux pour justifier de la dérivabilité de $f(x)$ et pour affirmer que $f'(x) = \frac{e^x}{x}$, même si vous vous doutez que c'est ça le résultat.

Vous venez d'établir une formule pour exprimer $f(x)$, alors utilisez-la.

D'après 1.a) on a $f(x) = G(x) - G(1)$

$$f'(x) = (G(x))' - (G(1))'$$

$$= g(x) - 0 = g(x) = \frac{e^x}{x}$$

$$\boxed{f'(x) = \frac{e^x}{x}}$$

c) Encore une fois utiliser la formule établie en 1. a) vous facilitera grandement la tâche.

Après, un bon élève en maths sait que $\int_a^a f(x)\,dx = 0$.

D'après 1. a) on a $f(x) = G(x) - G(1)$

$$f(1) = G(1) - G(1) = 0$$

$$\boxed{f(1) = 0}$$

2) Premier élément important, il ne faut pas oublier que $x \geq 1$ donc cette question donc il faut construire l'inégalité à partir de cette information.

Ensuite, il faut bien faire attention à ne pas mélanger les t et les x (mettre dt à la fin prend tout son sens dans cet exercice pour savoir quelle variable est primitivée).

On a $x \geq 1$ et e^t est une fonction croissante donc on a :

$$e^t \geq e$$

$$\frac{e^t}{t} \geq \frac{e}{t}$$

⚠ n'oubliez pas le 1 !

$$\int_1^x \frac{e^t}{t}\,dt \geq e\int_1^x \frac{1}{t}\,dt$$

avec ln

Or, $e\int_1^x \frac{1}{t}\,dt = e\left[\ln|t|\right]_1^x = e\ln(x) - e\ln(1) = e\ln(x)$

$$\boxed{f(x) \geq e\ln(x)}$$

b) Il suffit juste d'utiliser l'inégalité précédente.

D'après 2.a) on a $f(x) \geq e\ln(x)$

Or, $\lim\limits_{x \to +\infty} e\ln(x) = +\infty$. Par conséquent :

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty}$$

3) a) Là aussi, il faut bien faire attention à l'intervalle dans lequel on travaille.

Il faut également prendre en compte le fait que $t \leq x$.

On a $x \in [0;1]$ donc :

$$0 \leq t \leq x \leq 1$$

$$e^t \leq e^x$$

$$\frac{e^t}{t} \leq \frac{e^x}{t}$$

$$\int_1^x \frac{e^t}{t}\,dt \leq e^x \int_1^x \frac{1}{t}\,dt$$

$$f(x) \leq e^x \int_1^x \frac{1}{t}\,dt$$

Or, $e^x \int_1^x \frac{1}{t}\,dt = e^x [\ln|t|]_1^x = e^x \ln(x) - e^x \ln(1)$
$= e^x \ln(x)$.

On a donc :

$$\boxed{f(x) \leq e^x \ln(x)}$$

b) D'après 3.a) on a $f(x) \leq e^x \ln(x)$

Or, $\lim\limits_{x \to 0^+} e^x \ln(x) = -\infty$. Par conséquent :

$$\boxed{\lim_{x \to 0^+} f(x) = -\infty}$$

5) Pour dresser votre tableau de variations, vous devez réutiliser toutes les infos précédentes soit : - les limites
- $f(1) = 0$
- $f'(x) = \dfrac{e^x}{x}$

x	0^+		1		$+\infty$
variations de f	$-\infty$	↗	0	↗	$+\infty$
$f'(x)$			$+$		

→ car $\dfrac{e^x}{x} \geq 0$ pour $x \in]0;+\infty[$

5) a) Cette fois-ci, c'est du calcul de dérivée tout simplement, avec la formule $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$.

On pensera à factoriser pour que ce soit plus simple pour la suite

D'après 1.b) on a $f'(x) = \dfrac{e^x}{x}$

$$f''(x) = \frac{e^x x - e^x}{x^2} = \frac{e^x(x-1)}{x^2}$$

$$\boxed{f''(x) = \frac{e^x(x-1)}{x^2}}$$

b) Avoir factorisé $f''(x)$ vous permet de voir directement que le point d'inflexion (là où $f''(x)$ s'annule) est 1.

D'après 5. a) on a $f''(x) = \frac{e^x(x-1)}{x^2}$.

$\boxed{A = 1}$ ou plutôt $A(1, 0)$ car on demande les coordonnées (donc un point graphique).

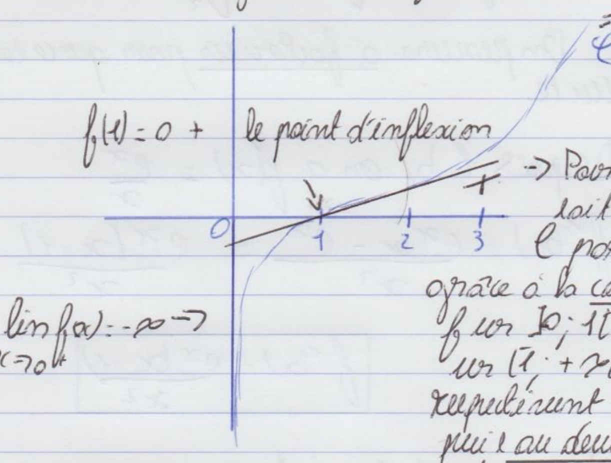
c) Il suffit de connaître la formule $T = f'(A)(x - A) + f(A)$.

D'après 5. b) on a $A = 1$. par conséquent :

$$T = f'(A)(x - A) + f(A)$$
$$= f'(1)(x-1) + f(1)$$ en 1. c) on a vu que $f(1) = 0$
$$= e(x-1)$$

$$\boxed{T = e(x-1)}$$

d) Pour tracer la courbe, aidez-vous non seulement des tableaux de variations mais également de $f''(x)$ et de T.



→ Pour rappel, on sait la position de $\mathcal{C}$ par rapport à T grâce à la concavité de f sur $]0; 1[$ et la convexité sur $]1; +\infty[$ donc respectivement $\mathcal{C}$ est au dessous puis au dessus de la tangente T.

6) a) Lorsque vous avez une question du type $f(a) = a$, il faut mobiliser le théorème de la bijection et l'utiliser correctement, c'est à dire : - dire que f est continue et pourquoi
- f est strictement monotone (donc croissante ou décroissante)
- donner l'intervalle où se fait la bijection.

On a $\int_1^{u_n} \frac{e^t}{t}\,dt = f(u_n)$

Or, d'après 1.b) on sait que f est dérivable donc f est continue sur $]0;+\infty[$.

De plus, d'après le tableau de variations en 5) on sait que f est strictement croissante sur $]0;+\infty[$

f réalise donc une bijection de $]0;+\infty[$ sur $]-\infty;+\infty[$ *.

Par conséquent, il existe bien sur $\mathbb{N}$ un unique réel u_n tel que :

$$\boxed{f(u_n) = n}$$

* $f(]0;+\infty[) = \left]\lim_{x\to 0^+} f(x) ; \lim_{x\to +\infty} f(x)\right[=]-\infty;+\infty[= \mathbb{N}$

b) Le sujet est gentil en vous donnant l'astuce pour pouvoir affirmer que u_n est croissante.

On a $\qquad u_n < u_{n+1}$

Or, puisque, d'après 5.), f est strictement croissante, on a donc :

$$\boxed{f(u_n) < f(u_{n+1})}$$

u_n est donc bien ~~dé~~croissante.

c) D'après 6. b) on a un croissante. Or, un n'a aucune majoration. Par conséquent :

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty}$$

Exercice 2 :

1) a) Il suffit de connaître les propriétés de base des matrices 2x2. si $\Delta = ad - bc = 0$, donc M n'est pas inversible.

On a $M = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

$\Delta = ad - bc = 1 \times (-1) - (-1) \times 1 = -1 + 1 = 0$

On a $\boxed{\Delta = 0}$ M n'est pas inversible si $a = b = -1$.

b) En calculant d'abord M^2, on remarque $M^2 = 0$ donc le reste de la question vient tout seul.

$$M^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{M^2 = 0}$$

Pour $n \geq 2$ on a $M^n = M^{n-2} M^2$. Par conséquent :

$$\boxed{M^n = 0 \text{ pour } n \geq 2}$$

2) a) On a $M = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 1 & b \end{pmatrix}$. $\Delta = b - a = a - a = 0$

$\boxed{\Delta = 0}$ M n'est pas inversible si $a = b$

b) Le plus simple est de procéder par récurrence, comme souvent avec des questions du type "pour $n \geq a$"

Initialisation : pour $n=2$ on a $(1+a)\begin{pmatrix} 1 & a \\ 1 & b \end{pmatrix} = (1+a)\begin{pmatrix} 1 & a \\ 1 & a \end{pmatrix}$

⚠ On oublie pas que pour cette question $a=b$ $= \begin{pmatrix} 1+a & a+a^2 \\ 1+a & a+a^2 \end{pmatrix}$

Or, $M^2 = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 1 & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & a \\ 1 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+a & a+ab \\ 1+b & a+b^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+a & a+a^2 \\ 1+a & a+a^2 \end{pmatrix}$

$M^2 = (1+a)M$ ⇒ ce sera utile pour l'hérédité.

La propriété est bien vraie pour le premier terme $n=2$.

Hérédité : Supposons que la propriété soit vraie pour un n entier quelconque, qu'en est-il au rang suivant ?

D'après l'hypothèse de récurrence on a $(1+a)^{n-1}M = M^n$

et on a $M^2 = (1+a)M$.

$$M^n = (1+a)^{n-1}M$$
$$M \cdot M^n = (1+a)^{n-1}M^2$$
$$M^{n+1} = (1+a)^{n-1}(1+a)M$$
$$\boxed{M^{n+1} = (1+a)^n M}$$

Conclusion : Par récurrence, la propriété est bien vraie pour tout n entier au rang suivant !

3) D'après 2.a) on a M non inversible si $a=b$ car $\Delta = 0$.

Par conséquent, si $a \neq b$, on a $\Delta = b-a \neq 0$.

donc M sera inversible.

5) a) Cette question peut paraître compliquée pour un élève peu habile en maths mais il suffit pourtant d'écrire les lois de X et Y sous forme de somme et d'utiliser l'indépendance pour trouver l'égalité demandée.

On a $P(X=Y) = \sum_{k=1}^{+\infty} P(X=k) \cap \sum_{k=1}^{+\infty} P(Y=k)$

Or, X et Y sont indépendantes donc on a :

$$P(X=Y) = \sum_{k=1}^{+\infty} P(X=k) \times \sum_{k=1}^{+\infty} P(Y=k)$$

$$\boxed{P(X=Y) = \sum_{k=1}^{+\infty} P(X=k) \times P(Y=k)}$$

b) Il faut déjà comprendre, entre p et q, quelle variable sous-le droit de sortir de la somme, en l'occurrence ici c'est p car q dépend de k comme la somme.

Ensuite il faut connaître ses propriétés de base sur les puissances pour savoir que $q^{ab} = (q^a)^b$

De cette manière, nous pouvons obtenir le terme général d'une série géométrique de raison q avec $0<q<1$ qui donne $\sum q = \frac{1}{1-q}$.

$$\sum_{k=1}^{+\infty} p^2 q^{2k-2} = p^2 \sum_{k=1}^{+\infty} q^{2k-2}$$
$$= p^2 \sum_{k=1}^{+\infty} (q^2)^{k-2}$$

Par changement d'indice, on reconnaît donc le terme général d'une série géométrique de raison q avec $0<q<1$, ce qui donne :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} p^2 q^{2k-2} = \frac{p^2}{1-q^2}$$
$$= \frac{p^2}{1-(1-p)^2}$$
$$= \frac{p^2}{1-(1-2p+p^2)}$$
$$= \frac{p^2}{2p-p^2}$$
$$= \frac{p^2}{p(2-p)} = \frac{p}{2-p} = \frac{p}{2-(1-q)}$$
$$= \frac{p}{1+q}$$

$$\boxed{\sum_{k=1}^{+\infty} p^2 q^{2k-2} = \frac{p}{1+q}}$$

c) A étant l'évènement "M est inversible", on a donc $1 - P(X=Y) = P(A)$ car on a vu que M n'est inversible que si a et b étaient différents !

Il faut donc arriver à faire le lien entre $P(X=Y)$ et le calcul précédent.

D'après 3) M est inversible si et seulement si $X \neq Y$ donc

$$P(A) = 1 - P(X=Y)$$
$$= 1 - \sum_{k=1}^{+\infty} P(X=k) \times P(Y=k)$$
$$= 1 - \sum_{k=1}^{+\infty} p(1-p)^{k-1} \times p(1-p)^{k-1}$$
$$= 1 - \sum_{k=1}^{+\infty} p^2 q^{k-1} \times q^{k-1}$$
$$= 1 - \sum_{k=1}^{+\infty} p^2 q^{2k-2}$$
$$= 1 - \frac{p}{1+q} = \frac{1+q-p}{1+q} = \frac{1+q-(1-q)}{1+q} = \frac{2q}{1+q}$$

$$\boxed{P(A) = \frac{2q}{1+q}}$$

5) a) Il suffit de connaître la formule du binôme de Newton.

Pour $(x+1)^{2n}$, le $2n$ ne doit pas vous gêner. Vous gardez la même formule en remplaçant n par $2n$.

Grâce à la formule du binôme de newton on a :

$(x+1)^n = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} x^k 1^{n-k}$ soit

$$\boxed{(x+1)^n = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} x^k}$$

De même, on a : $(x+1)^{2n} = \sum_{k=1}^{2n} \binom{2n}{k} x^k 1^{2n-k}$ soit

$$\boxed{(x+1)^{2n} = \sum_{k=1}^{2n} \binom{2n}{k} x^k}$$

b) On a $(x+1)^{2n} = (x+1)^n (x+1)^n$ soit

$$\sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{i} x^i$$

$\binom{2n}{n}$ est le coefficient de x^n dans le polynôme $\sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} x^k$;

dans le membre de droite de l'égalité le terme de degré n est obtenu comme somme des termes $\binom{n}{k} x^k \binom{n}{i} x^i$ avec $k+i=n$

donc on a : $\binom{2n}{n} = \sum_{k+i=n} \binom{n}{k}\binom{n}{i} = \sum_{0}^{n} \binom{n}{k}\binom{n}{n-k}$

$$\boxed{\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{n}{n-k}}$$

c) On conduit le même raisonnement dans la question 4.).

On a $P(X=Y) = \sum_{k=0}^{n} P(X=k) \cap \sum_{k=0}^{n} P(Y=k)$

Or, puisque X et Y sont indépendantes on a :

$$
\begin{aligned}
P(X=Y) &= \sum_{k=0}^{n} P(X=k) \times P(Y=k) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^{k}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-k} \times \binom{n}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^{k}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{n} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^{2}\left(\frac{1}{2^2}\right)^{n} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^{2}\left(\frac{1}{4}\right)^{n} \\
&= \left(\frac{1}{4}\right)^{n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^{2} \\
&= \frac{1}{4^n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{n}{n-k} \\
&= \frac{1}{4^n}\binom{2n}{n}
\end{aligned}
$$

$$\boxed{P(X=Y) = \frac{1}{4^n}\binom{2n}{n}}$$

d) Les questions précédentes étaient assez complexes donc même si vous n'y êtes pas arrivés, vous pouvez toujours trouver P(A) car le sujet donne P(X=Y) cette fois.

$$
\begin{aligned}
\text{On a } P(A) &= 1 - P(X=Y) \\
&= 1 - \frac{4}{n}\binom{2n}{n}
\end{aligned}
$$