$$\boxed{P(A) = 1 - \frac{1}{4^n}\binom{2n}{n}}$$

Exercice 3 :

1) C'est du cours, c'est cadeau.

On a $T \sim \mathcal{E}(1)$, on a donc :

$$\boxed{E(T) = 1} \quad \text{et} \quad \boxed{V(T) = 1}$$

Pour rappel, pour $T \sim \mathcal{E}(\lambda)$ on a $E(T) = \frac{1}{\lambda}$ et $V(T) = \frac{1}{\lambda^2}$

A savoir par cœur !!

2) a) Question de densité des plus classiques. On rappelle les critères : - positive
- continue
- $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt = 1$.

Attention pour le calcul de $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt$ ici ! Ne cherchez pas la primitive de $t\,e^{-t}\,dt$. Si on vous a demandé l'espérance d'une loi exponentielle de paramètre 1, c'est pas pour rien !

En effet, $E(T)$ s'écrit $\int_{-\infty}^{+\infty} t\,e^{-t}\,dt$ donc on a directement le résultat grâce à 1).

continuité et signe : - pour $t < 0$ on a $f(t) = 0$ donc $\int_{-\infty}^{0} f(t)\,dt = 0$ et f est continue et positive sur $]-\infty;0[$.

- Pour $f(0)$, on a $f(0) = 0$ donc f est continue et positive en 0.

- Pour $t \geq 0$ on a $f(t) = t e^{-t}$ avec $t \geq 0$ et $e^{-t} \geq 0$

donc f est continue et positive sur $\mathbb{R}$.

Calcul de $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt$: $\int_{-\infty}^{+\infty} t e^{-t}\,dt = 1$ d'après 1) car

$$E(T) = \int_{-\infty}^{+\infty} t e^{-t}\,dt = 1.$$

Conclusion : f est continue et positive sur $\mathbb{R}$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt = 1$.

f est bien une densité de probabilité.

b) Cette fois, le sujet vous précise bien que vous devez utiliser $T \sim \mathcal{E}(1)$.

Mais il faut également penser à la formule de Koenig-Huygens de la variance.

$E(X)$ existe si $\int_{-\infty}^{+\infty} t f(t)\,dt$ converge.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t f(t)\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 e^{-t}\,dt.$$

Or, d'après 1) on a $V(T) = 1$, c'est-à-dire, grâce à la formule de Koenig-Huygens,

$$V(T) = E(T^2) - (E(T))^2$$
$$1 = E(T^2) - 1$$

$$\boxed{E(T^2) = 2}$$

Or, $E(T^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 e^{-t}\,dt$. Par conséquent, on a :

$$\boxed{E(X) = 2}$$

3) Cette fois-ci par contre, vous ne pourrez pas esquiver et être obligé d'utiliser une intégration par parties. On remarquera que $(t)' = 1$ pour le choix de u et v.

On a $P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$.

- Pour $x < 0$, on a $f(t) = 0$.

- Pour $x \geq 0$, on pose $u' = e^{-t}$ $\quad u = -e^{-t}$
$v = t$ $\quad v' = 1$

Grâce à une intégration par parties on a alors :

$$\int_0^x f(t)\,dt = [-t e^{-t}]_0^x + \int_0^x e^{-t}\,dt$$
$$= -x e^{-x} + [-e^{-t}]_0^x$$
$$= -x e^{-x} + (-e^{-x} + 1)$$
$$= 1 - x e^{-x} - e^{-x}$$
$$= 1 - (x+1) e^{-x}$$

On a donc bien :

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - (x+1) e^{-x} \text{ si } x \geq 0 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

5) a) C'est une des rares fois où le sujet n'a pas expliqué ce que représente le min entre plusieurs variables aléatoires, d'où l'importance de connaître par cœur ce que sont les fonctions min et max.

On oubliera pas de mentionner l'indépendance entre X_1 et X_2.

C'est ça la déf de min

On a $Z = \min(X_1, X_2)$
$= P(X_1 > x) \cap P(X_2 > x)$

Or, X_1 et X_2 sont indépendantes donc :

$$\boxed{P(Z > x) = P(X_1 > x) \times P(X_2 > x)}$$

b) Il ne faut pas oublier que $H_n(x)$ est donnée par $P(Z \leq x)$ soit $1 - P(Z > x)$.

D'après 5.a) on a $P(Z > x) = P(X_1 > x) \times P(X_2 > x)$

$$= (1 - P(X_1 \leq x)) \times (1 - P(X_2 \leq x))$$

$$= (1 - (1 - (x+1)e^{-x}))(1 - (1 - (x+1)e^{-x}))$$

$$= (x+1)e^{-x} \times (x+1)e^{-x}$$

$$= (x+1)^2 e^{-2x}$$

Or, $P(Z \leq x) = 1 - P(Z > x)$ donc :

$$P(Z \leq x) = 1 - (x+1)^2 e^{-2x}$$

Ainsi on a :

$$H(x) = \begin{cases} 1 - (x+1)^2 e^{-2x} & \text{si } x \geq 0. \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

c) Maintenant que vous avez la fonction de répartition de H, vous n'avez plus qu'à la dériver pour obtenir la densité. C'est le raisonnement inverse de la question 3.).

D'après 5. b) on a $H(x) = \begin{cases} 1 - (x+1)^2 e^{-2x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

c'est la forme $(UV)' = U'V + UV'$

$$H'(x) = -(x^2 + 2x + 1)e^{-2x}$$
$$= -((2x+2)e^{-2x} - 2(x^2 + 2x + 1)e^{-2x})$$
$$= -(2xe^{-2x} + 2e^{-2x} - 2x^2e^{-2x} - 4xe^{-x^2} - 2e^{-2x})$$
$$= -(2x(-x-1)e^{-2x})$$
$$= -(-2x(x+1)e^{-2x})$$
$$= 2x(x+1)e^{-2x}$$

On a donc bien : $h(x) = \begin{cases} 2x(x+1)e^{-x^2} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

5) a) La question est un simple calcul de dérivée de la forme $(UV)' = U'V + UV'$ mais les calculs sont longs et lourds donc il faut y aller avec prudence pour éviter les erreurs de calcul.

$$g(x) = -\left(x^3 + \frac{5}{2}x^2 + \frac{5}{2}x + \frac{5}{4}\right)e^{-2x}$$

$$g'(x) = -\left(3x^2 + \frac{10}{2}x + \frac{5}{2}\right)e^{-2x} - 2\left(x^3 + \frac{5}{2}x^2 + \frac{5}{2}x + \frac{5}{4}\right)e^{-2x}$$

$$= -\left(3x^2 + \frac{10}{2}x + \frac{5}{2} - 2x^3 - \frac{10}{2}x^2 - \frac{10}{2}x - \frac{10}{4}\right)e^{-2x}$$

$$= -\left(-2x^2 - 2x^3\right)e^{-2x}$$

$$= 2x^2(1+x)e^{-2x}$$

$$\boxed{g'(x) = 2x^2(1+x)e^{-2x}}$$

b) $E(Z)$ existe si et seulement si $\int_{-\infty}^{+\infty} x h(x)\,dx$ converge.

Pour $x < 0$ on a $h(x) = 0$ donc $\int_{-\infty}^{0} x h(x)\,dx = 0$.

$$\int_0^{+\infty} x h(x)\,dx = \int_0^{+\infty} 2x^2(1+x)e^{-2x} = \int_0^{+\infty} g'(x) = [g(x)]_0^A$$

$$= \left[-\left(x^3 + \frac{5}{2}x^2 + \frac{5}{2}x + \frac{5}{4}\right)e^{-2x}\right]_0^A$$

$$= -\left(A^3 + \frac{5}{2}A^2 + \frac{5}{2}A + \frac{5}{4}\right)e^{-2A} + \frac{5}{4}$$

Or $\lim_{A \to +\infty} e^{-2A} = 0$ donc $\lim_{A \to +\infty} -\left(A^3 + \frac{5}{2}A^2 + \frac{5}{2}A + \frac{5}{4}\right)e^{-2A} = 0$.

A ne pas oublier !

Par la relation de Chasles on a alors : $\boxed{E(Z) = \frac{5}{4}}$

6) a) Il faut bien comprendre concrètement ce que représente min et max pour aborder la question.

On a Z qui représente la plus petite valeur de x entre X_1 et X_2 et W la plus grande.

Or, peu importe laquelle de X_1 et X_2 est la plus grande et la plus petite, si on additionne X_1 et X_2, on additionne alors le max entre X_1 et X_2 et le min entre X_1 et X_2, soit W et Z.

On a $Z = \min(X_1, X_2)$ et $W = \max(X_1, X_2)$.

Dès lors, peu importe que $X_1 < X_2$ ou $X_2 < X_1$, on a :

$$\boxed{Z + W = X_1 + X_2}$$

b) Vous n'avez qu'à utiliser la relation précédente. N'oubliez pas la linéarité de l'espérance.

D'après 6.a) on a $Z + W = X_1 + X_2$

Par conséquent : $\boxed{W = X_1 + X_2 - Z}$

$$\begin{aligned}
E(W) &= E(X_1 + X_2 - Z) \\
&= E(X_1) + E(X_2) - E(Z) \quad \text{par \underline{linéarité de l'espérance}} \\
&= 2 + 2 - \frac{5}{4} \\
&= 4 - \frac{5}{4} \\
&= \frac{16 - 5}{4} = \frac{11}{4}
\end{aligned}$$

$$\boxed{E(W) = \frac{11}{4}}$$

c) Là par contre, il faut bien penser à distinguer les cas où $X_1 < X_2$ et $X_2 < X_1$.
Il faut également prendre en compte le fait que il y a les valeurs

obtenir

- si $X_1 < X_2$, on a $|X_1 - X_2| = Z - W$

car $Z = \min(X_1, X_2) = X_1$ et $W = \max(X_1, X_2) = X_2$.

Or $|X_1 - X_2| = X_2 - X_1$ car $X_1 - X_2 \leq 0$. On a donc

$$\boxed{|X_1 - X_2| = W - Z}$$

- si $X_2 < X_1$, on a $|X_1 - X_2| = W - Z$.

car $Z = \min(X_1, X_2) = X_2$ et $W = \max(X_1, X_2) = X_2$.

Or $|X_1 - X_2| = X_1 - X_2$ car $X_1 - X_2 \geq 0$. On a donc

$$\boxed{|X_1 - X_2| = W - Z}$$

Dans les deux cas on a donc :

$$\boxed{|X_1 - X_2| = W - Z}$$

d) $E(|X_1 - X_2|) = E(W - Z)$
$= E(W) - E(Z)$ par linéarité de l'espérance
$= \frac{11}{4} - \frac{5}{4}$
$= \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$

$$\boxed{E(|X_1 - X_2|) = \frac{3}{2}}$$

Exercice 4 :

1) $X_0 = \begin{pmatrix} u_2 \\ u_1 \\ u_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $X_1 = \begin{pmatrix} u_3 \\ u_2 \\ u_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\times 1 - \frac{5}{4}\times 0 + \frac{1}{4}\times 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

2)a) Question incontournable qu'il faut absolument maîtriser.
Le simple fait de faire le produit AX_n donne X_{n+1}, comme toujours dans cette question.

$$AX_n = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 10 & -5 & 1 \\ 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} U_{n+2} \\ U_{n+1} \\ U_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2U_{n+2} - \frac{5}{5}U_{n+1} + \frac{1}{5}U_n \\ U_{n+2} \\ U_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_{n+3} \\ U_{n+2} \\ U_{n+1} \end{pmatrix}$$

On a donc bien : $\boxed{X_{n+1} = AX_n}$

b) Et comme à chaque fois après vous avoir demandé de montrer que $X_{n+1} = AX_n$, le sujet vous demande de montrer que $X_n = A^n X_0$, car la question précédente est indispensable pour effectuer la récurrence.

Initialisation : pour $n = 0$ on a $A^0 X_0 = X_0$
$I X_0 = X_0$
$X_0 = X_0$

La propriété est bien vraie pour le premier terme $n = 0$.

Hérédité : Supposons que la propriété soit vraie pour un n entier quelconque, qu'en est-il au rang suivant ?

D'après l'hypothèse de récurrence on a $X_n = A^n X_0$ et d'après 2.a) on a $X_{n+1} = AX_n$.

$$X_n = A^n X_0$$
$$AX_n = A.A^n X_0$$

$$\boxed{X_{n+1} = A^{n+1} X_0}$$

Conclusion : Par récurrence, la propriété est bien vraie pour tout n entier au rang suivant.

3) a) $PQ = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 16 & -16 & 4 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

On a $\boxed{PQ = 4I}$

ce qui donne : $P\frac{1}{4}Q = I$.

Par conséquent, P est inversible et on a :

$$\boxed{P^{-1} = \frac{1}{4}Q}$$

b) $PT = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 3 \\ 1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

$AP = \begin{pmatrix} 2 & -\frac{5}{4} & \frac{1}{4} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 3 \\ 1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

On a $\boxed{AP = PT}$ cette relation était prévisible ! Si vous ne la trouvez pas, c'est qu'il y a une erreur de calcul.

On en déduit la relation : $AP = PT$
$APP^{-1} = PTP^{-1}$

$$\boxed{A = PTP^{-1}}$$

⚠ la récurrence qui suit est à connaître par cœur !!

__Initialisation__ pour $n = 0$ on a
$A^0 = PT^0P^{-1}$
$I = PIP^{-1}$
$= PP^{-1}$
$= I$

La propriété est bien vraie pour le premier terme $n = 0$.

Hérédité : Supposons que la propriété soit vraie pour un n entier quelconque, qu'en est-il au rang suivant ?

D'après l'hypothèse de récurrence on a $A^n = PT^nP^{-1}$ et on sait que $A = PTP^{-1}$.

$$A^n = PT^nP^{-1}$$
$$A.A^n = APT^nP^{-1}$$
$$A^{n+1} = PTP^{-1}PT^nP^{-1}$$
$$A^{n+1} = PT.T^nP^{-1}$$

$$\boxed{A^{n+1} = PT^{n+1}P^{-1}}$$

Conclusion : Par récurrence, la propriété est bien vraie pour tout n entier au rang suivant.

5/a) On a $N = T - D = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{N^2 = 0}$$

il est assez évident que dans une question du type " Déterminer N^h pour $h \geq a$ ", la matrice deviendra nulle pour une certaine puissance.

Or, pour $h \geq 2$ on a $N^h = N^{h-2}N^2 = 0$

On a donc : $\boxed{N^h = 0 \text{ pour } h \geq 2}$

b) $DN = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$ND = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\boxed{DN = ND}$ → Si on nous demande de vérifier cela, ce n'est pas pour rien. Cela peut en effet être utile dans la <u>formule du binôme de Newton</u> par exemple.

On a $N = T - D$ donc :

$$\boxed{T = N + D}$$

Grâce à <u>la formule du binôme de Newton</u> on a :

$$T^n = (N+D)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} N^k D^{n-k}$$

$$= \binom{n}{0} N^0 D^n + \binom{n}{1} N D^{n-1} + \binom{n}{2} N^2 D^{n-2} + \dots + \binom{n}{n} N^n D^0$$

Or, d'après 5. a) on a $N^k = 0$ pour $k \geq 2$ donc :

$T^n = D^n + n N D^{n-1}$. Or, D est une matrice diagonale donc on a :

$$T^n = \left(\frac{1}{2}\right)^n\begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + n\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2^{n-1} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^n\begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & n\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \left(\frac{1}{2}\right)^n\begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2n\left(\frac{1}{2}\right)^n \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^n \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \left(\frac{1}{2}\right)^n \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2n \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \left(\frac{1}{2}\right)^n \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On a donc bien :

$$T^n = \left(\frac{1}{2}\right)^n \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

c) Les calculs sont longs et lourds donc allez-y par étape pour éviter les erreurs de calcul.

D'après 3.b) on a $A^n = PT^nP^{-1}$

$$PT^n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix} \left(\frac{1}{2}\right)^n \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \left(\frac{1}{2}\right)^n \begin{pmatrix} 2^n & 1 & 2n+4 \\ 2^n & 2 & 4n+4 \\ 2^n & 4 & 8n \end{pmatrix}$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^n \begin{pmatrix} 2^n & 1 & 2(n+2) \\ 2^n & 2 & 4(n+1) \\ 2^n & 4 & 8n \end{pmatrix}$$

$A^n = PT^nP^{-1} = PT^n \frac{1}{4} Q$ d'après 3.a)

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^n \begin{pmatrix} 2^n & 1 & 2(n+2) \\ 2^n & 2 & 4(n+1) \\ 2^n & 4 & 8n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -4 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^n \begin{pmatrix} 2^n \times 4 - 1 - (n+2) & -4\times 2^n + 1 + \frac{3}{2}(n+2) & 2^n - \frac{1}{2}(n+2) \\ 2^n \times 4 - 2 - 2(n+1) & -4\times 2^n + 2 + 3(n+1) & 2^n - (n+1) \\ 2^n \times 4 - 4 - 4n & -4\times 2^n + 4 + 6n & 2^n - 2n \end{pmatrix}$$

$$A^n = \left(\frac{1}{2}\right)^n \begin{pmatrix} 4\times 2^n - n - 3 & -4\times 2^n + \frac{3}{2}n + 4 & 2^n - \frac{1}{2}n - 1 \\ 4\times 2^n - 2n - 4 & -4\times 2^n + 3n + 5 & 2^n - n - 1 \\ 4\times 2^n - 4n - 4 & -4\times 2^n + 6n + 4 & 2^n - 2n \end{pmatrix}$$

5) a) D'après 2.b) on a $X_n = A^n X_0$.

$$X_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n \begin{pmatrix} 5\times 2^n - n - 3 & -5\times 2^n + \frac{3}{2}n + 5 & 2^n - \frac{1}{2}n - 1 \\ 5\times 2^n - 2n - 5 & -5\times 2^n + 3n + 5 & 2^n - n - 1 \\ 5\times 2^n - 5n - 5 & -5\times 2^n + 6n + 5 & 2^n - 2n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^n \begin{pmatrix} 5\times 2^n - n - 3 \\ 5\times 2^n - 2n - 5 \\ 5\times 2^n - 5n - 5 \end{pmatrix}$$

On a donc : $\boxed{u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n (5\times 2^n - 5n - 5)}$

b) <u>Attention !!</u> Ne tombez pas dans le piège de dire que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$ car $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$. Certes, c'est vrai, et vous aurez besoin de cette info pour déterminer la limite, mais il faut garder en tête que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n \neq 0$ car $\underline{\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n \neq \lim\limits_{n \to +\infty} n \left(\frac{1}{2}\right)^n}$.

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = \lim_{n \to +\infty} 5 \times \frac{2^n}{2^n} - 5n\frac{1}{2^n} - 5 \times \frac{1}{2^n}$$

$$= \lim_{n \to +\infty} 5 - \frac{5n}{2^n} - \frac{5}{2^n}$$

Or, puisque $-1 < \frac{1}{2} < 1$, $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{2^n} = 0$.

il faut trouver une façon de l'écrire qui permette d'en déterminer la limite.

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{n}{2^n} = \lim_{n \to +\infty} \frac{e^{\ln(n)}}{e^{n\ln(2)}} = \lim_{n \to +\infty} e^{\ln(n) - n\ln(2)}$$

$$= \lim_{n \to +\infty} e^{n\left(\frac{\ln(2)}{n} - \ln(2)\right)} = 0.$$

Ainsi, on a $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 5}$