Corrigé ESCP 2016

## Exercice 1

1) A) Comme souvent, l'exercice de matrice commence par de simples calculs. Le but est de pouvoir **réutiliser les résultats** dans les questions suivantes, celle d'après commençant d'ailleurs par « En déduire ».

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

$$A^3 - A^2 - 2A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{A^3 - A^2 - 2A = 0}$$

B) Attention ! Gros piège dans la rédaction ! Depuis que la notion de polynôme annulateur est au programme des prépas ECT, les rapports du jury déplorent que de nombreux candidats écrivent « le polynôme annulateur » au lieu de « un ». Il faut bien penser à ce détail pour ne pas perdre bêtement sur une question aussi facile.

D'après 1.a) on a $A^3 - A^2 - 2A = 0$ . On pose $R(X) = X^3 - X^2 - 2X$.
Ainsi on obtient :

$$R(A) = A^3 - A^2 - 2A = 0$$

$R(X) = X^3 - X^2 - 2X$ est donc **un** polynôme annulateur non nul de la matrice A.

C) Pour l'instant, l'exercice est très simple pour mettre en confiance même les candidats les plus faibles en maths. Pour déterminer les valeurs propres de à partir de un de ses polynômes annulateurs, il suffit d'en trouver les racines.

On a :

$$\begin{aligned} R(X) &= X^3 - X^2 - 2X \\ &= X(X^2 - X - 2) \end{aligned}$$

La première racine de R est donc $\boxed{X = 0}$.
Calculons maintenant les racines de $X^2 - X - 2$ avec la méthode du discriminant.

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 * 1 * (-2) = 1 + 8 = 9$$

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1+3}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

$$\boxed{x_1 = 2}$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1-3}{2} = \frac{-2}{2} = -1$$

$$\boxed{x_2 = -1}$$

Les racines de R sont donc 0, -1 et 2.

D) **Petite astuce** pour vérifier vos résultats concernant les valeurs propres possibles de la matrice. Bien souvent, plus loin dans l'exercice, le sujet pose une matrice D. Cette matrice D est une matrice diagonale (d'où le D) contenant les valeurs propres possibles de la matrice donc vous n'aurez qu'à regarder cette matrice pour vérifier que vous ne faîtes pas de conneries.

Les valeurs propres possibles de la matrice A correspondent aux racines de R.

Les valeurs propres possibles de A sont donc -1, 0 et 2.

2)A) Ici, le sujet est gentil avec vous et demande simplement de vérifier que les vecteurs indiqués sont bien des vecteurs propres de A. Vous n'avez alors plus qu'à vérifier que l'on retrouve la formule définissant un vecteur propre, c'est-à-dire $AX = \gamma X$. **Attention** cependant, là aussi beaucoup de candidats perdent des points bêtement sur la rédaction. Il ne faut pas oublier de préciser que le vecteur propre est un vecteur non nul.

Petite astuce au cas où le sujet ne les donne pas directement. Comme pour les valeurs propres, le sujet va poser plus loin une matrice P dîtes de passage (d'où le P) constituée des vecteurs propres de la matrice. Si jamais vous ne les trouver pas, vous pouvez juste jeter un coup d'œil plus loin pour avoir la solution.

$$AU_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

On a $AU_1 = -U_1$. On a donc bien $U_1 \neq 0$ qui est un vecteur propre de A de valeur propre associée $\gamma_1 = -1$.

$$AU_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

On a $AU_2 = 0U_2$. On a donc bien $U_2 \neq 0$ qui est un vecteur propre de A de valeur propre associée $\gamma_2 = 0$.

$$AU_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

On a $AU_3 = 2U_3$. On a donc bien $U_3 \neq 0$ qui est un vecteur propre de A de valeur propre associée $\gamma_3 = 2$.

B) Certains candidats, dès qu'ils voient « calculer l'inverse de P », se mettent à appliquer la méthode du pivot de Gauss. **Ne faîtes pas ça !!** Non seulement vous allez perdre énormément de temps, mais en plus vous allez sûrement vous tromper, sans parler du fait que vous montrez au correcteur que vous ne comprenez pas l'enchaînement logique du questionnement.

Ici, on vous demande d'abord de calculer PQ avant **d'en déduire** l'inverse de P. C'est donc que le calcul de PQ va vous donner une relation à réutiliser pour déterminer l'inverse de P.

$$PQ = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 3 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{PQ = 6I}$$

On a alors :

$$\frac{1}{6}PQ = I$$

Par conséquent, P est inversible et on a :

$$\boxed{P^{-1} = \frac{1}{6}Q}$$

C) Dans cette question, l'exercice vérifie enfin si le candidat comprend, ou même connaît, le principe de diagonalisation d'une matrice.

Pour rappel, cette démarche consiste à déterminer une relation, **la fameuse $A^n = PD^nP^{-1}$** que vous voyez dans tous les exercices de matrice, pour obtenir facilement la n-ième puissance d'une matrice, la matrice D étant une matrice diagonale donc il suffit de mettre à la n-ième puissance les coefficients sur la diagonale.

Ainsi, pour pouvoir affirmer qu'une matrice est diagonalisable, il faut **la relation $A = PDP^{-1}$**, le problème étant souvent de savoir si P est inversible ou non.

$$AP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$PD = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{AP = PD}$$

Or, en 2.b) on a vu que $P^{-1}$ existe donc :

$$APP^{-1} = PDP^{-1}$$

$$\boxed{A = PDP^{-1}}$$

La matrice A est diagonalisable.

3)A) C'est **LA** récurrence que vous ne pouvez pas louper, tout simplement parce qu'en plus de tomber chaque année, sa rédaction est quasiment toujours la même **MOT POUR MOT**. Après avoir vu une fois la correction, vous êtes donc normalement capable de refaire parfaitement cette question sur un autre exercice.

Si vous avez vraiment du mal et que, après plusieurs essais, vous ne comprenez toujours pas le raisonnement, ben **apprenez là par cœur**, ce sont des points gagnés facilement et à coup sûr.

Faîtes attention pour l'initialisation à bien commencer **au n demandé**. Ce n'est pas toujours 0. En l'occurrence ici, c'était 1, et le rapport du jury fait mention de nombreux candidats ayant commencé pour n = 0.

**Initialisation :** pour n = 1 on a $A = PD^1P^{-1} = PDP^{-1}$ce qui correspond à la relation trouvée en 2.c).

La propriété est bien vraie pour le premier terme n = 1.

**Hérédité :** Supposons que la propriété soit vraie pour un n entier quelconque, qu'en est-il au rang suivant ?

D'après l'hypothèse de récurrence on a $A^n = PD^nP^{-1}$ et d'après 2.c) on a $A = PDP^{-1}$.

$$A^n = PD^nP^{-1}$$

$$A * A^n = APD^nP^{-1}$$

$$A^{n+1} = PDP^{-1}PD^nP^{-1}$$

$$A^{n+1} = PDD^nP^{-1}$$

$$\boxed{A^{n+1} = PD^{n+1}P^{-1}}$$

**Conclusion :** Par récurrence, la propriété est bien vraie pour tout n entier au rang suivant.

B) Bon là, c'est la partie bien chiante de l'exercice mais vous ne pouvez pas y échapper car c'est le **but final de l'exercice** : déterminer une matrice qui permette d'obtenir rapidement sa puissance n-ième.

Les calculs ne sont pas difficiles mais lourds comme jamais donc faut être patient et y aller doucement. Vous venez de démontrer **que $A^n = PD^nP^{-1}$** donc pour expliciter $A^n$, **il suffit de faire les calculs.**

Tout d'abord, D est une matrice diagonale donc :

$$\boxed{D^n = \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}}$$

D'après 2.b) on a $P^{-1} = \frac{1}{6}Q$ donc $P^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 3 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

$$D^nP^{-1} = \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 3 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-1)^n * \frac{1}{3} & (-1)^n * \frac{1}{3} & (-1)^n * -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 2^n * \frac{1}{6} & 2^n * \frac{1}{6} & 2^n * \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$A^n = PD^nP^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} (-1)^n * \frac{1}{3} & (-1)^n * \frac{1}{3} & (-1)^n * -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 2^n * \frac{1}{6} & 2^n * \frac{1}{6} & 2^n * \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} (-1)^n * \frac{1}{3} + 2^n * \frac{1}{6} & (-1)^n * \frac{1}{3} + 2^n * \frac{1}{6} & (-1)^n * -\frac{1}{3} + 2^n * \frac{1}{3} \\ (-1)^n * \frac{1}{3} + 2^n * \frac{1}{6} & (-1)^n * \frac{1}{3} + 2^n * \frac{1}{6} & (-1)^n * -\frac{1}{3} + 2^n * \frac{1}{3} \\ (-1)^n * -\frac{1}{3} + 2^{n+1} * \frac{1}{6} & (-1)^n * -\frac{1}{3} + 2^{n+1} * \frac{1}{6} & (-1)^n * \frac{1}{3} + 2^{n+1} * \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

4)A) Déjà, sur la première partie de la question, il y a deux types de candidats : ceux qui vont faire les calculs, c'est-à-dire la majorité, et ceux qui sont à l'aise en maths. Faire les calculs n'est pas faux, vous trouverez bien l'égalité, mais vous allez perdre beaucoup de temps, et cela ne sera sûrement pas valorisé par le correcteur.

Vous venez de **démontrer la relation $A^n = PD^nP^{-1}$**, alors pourquoi ne pas l'utiliser quand vous en avez l'occasion ? Vous aurez répondu à la question en seulement quelques secondes.

Ensuite, pour la deuxième partie de la question, il faut encore une fois remarquer qu'elle commence par « en déduire » donc cela doit vous guider. De même, on vous donne **M = I -2A+5A²** et on vous demande **une égalité avec MP** dedans, donc la solution se trouve forcément en multipliant M par P par la droite.

D'après 3.a) on a :

$$A^n = PD^nP^{-1}$$

$$A^nP = PD^nP^{-1}P$$

$$A^nP = PD^n$$

ce qui donne :

$$\boxed{A^2P = PD^2}$$

De même, on a AP=PD, résultat déjà démontré en 2.c). On a donc :

$$M = I - 2A + 5A^2$$

$$MP = (I - 2A + 5A^2)P$$

$$MP = P - 2AP + 5A^2P$$

$$MP = P - 2PD + 5PD^2$$

$$\boxed{MP = P(I - 2D + 5D^2)}$$

B) On vous demande encore si la matrice est diagonalisable donc il faut garder en tête qu'une matrice diagonalisable vérifie la relation $A = PDP^{-1}$, avec D qui est une matrice diagonale.

Le sujet vous donne un coup de pouce en vous disant que vous trouvez une formule qui ressemble à $M = PDP^{-1}$, vous devez utiliser la relation précédente. On sait déjà que $P^{-1}$ existe donc il faut vérifier si le calcul au milieu de la relation est bien une matrice diagonale. Si oui, M est diagonalisable et ses valeurs propres seront les valeurs des coefficients sur la diagonale.

D'après 4.b) on a :

$$MP = P(I - 2D + 5D^2)$$

$$MPP^{-1} = P(I - 2D + 5D^2)P^{-1}$$

$$\boxed{M = P(I - 2D + 5D^2)P^{-1}}$$

En posant $D' = I - 2D + 5D^2$, M est diagonalisable si D' est une matrice diagonale.

$$D' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 17 \end{pmatrix}$$

M est donc diagonalisable et ses valeurs propres sont 8, 1 et 17.

**Conclusion sur l'exercice :** L'exo sur les matrices sera le plus facile des quatre, c'est un échauffement pour la suite. Beaucoup de questions sont juste là pour éviter des feuilles blanches. Par conséquent, c'est un moyen pour vous de gratter plein de points avant de passer aux choses sérieuses. Ne ratez surtout pas les récurrences, c'est toujours le même principe, et prenez bien à réutiliser les résultats ou formules démontrés auparavant. Faîtes également attention à la rédaction, ce serait bête de perdre des points de cette manière alors que vous connaissez la réponse.

Pour ceux qui visent une très bonne note, cet exercice doit être réalisé parfaitement, ce qui ne devrez pas être difficile. Tout l'enjeu est de le faire le plus vite possible pour avoir plus de temps à consacrer à la suite du sujet où des questions beaucoup plus dures vous attendent.

**Exercice 2**

1) Tu viens de finir l'exo 1, tu t'en es pas mal sorti, voire très bien, tu commences à prendre la confiance et là d'un seul coup, un programme scilab sauvage apparaît. Fuite impossible ! Pas la peine de paniquer, les questions scilab sont très simples. Elles ne demanderont jamais d'écrire un programme en entier mais simplement **de compléter** quelques lignes où alors juste **de comprendre** la commande qu'exécute le programme.

   Dès lors, la connaissance **des commandes les plus basiques et des règles de rédaction** sont largement suffisantes pour passer les questions sans problèmes.

   Ici, le piège était d'écrire ln au lieu **de log** car la commande sur scilab est bien log.

```
n = input('entrer la valeur de n')

u = 1

for k = 1 : n

u = log(1+u^2)

end

disp(u)
```

2A) Ce genre de récurrence tombe très souvent dans les exercices d'analyse et encore une fois, le raisonnement est toujours le même. Lorsque la question consiste à démontrer un encadrement du **type** $\boldsymbol{a \leq u_n \leq b}$, et que dans l'énoncé on vous donne $u_{n+1}$, il suffit **de reconstruire** à partir de $u_n$ $u_{n+1}$ dans l'hérédité pour démontrer par récurrence. L'initialisation, elle, consiste simplement à **utiliser u0** donné par l'énoncé.

**Initialisation :** pour n = 0 on a $0 \leq u_0 \leq 1$ soit $0 \leq 1 \leq 1$. La propriété est vraie pour le premier terme n =0

**Hérédité :** Supposons que la propriété soit vraie pour un n entier quelconque, qu'en est-il au rang suivant ?

D'après l'hypothèse de récurrence on a $0 \leq u_n \leq 1$ et d'après l'énoncé on a $u_{n+1} = \ln(1 + u_n^2)$

$$0 \leq u_n \leq 1$$

$$0 \leq {u_n}^2 \leq 1$$

$$1 \leq 1 + {u_n}^2 \leq 2$$

$$\ln(1) \leq \ln(1 + u_n^2) \leq \ln(2)$$

$$\ln(1) \leq u_{n+1} \leq \ln(2) \leq 1$$

$$\boxed{0 \leq u_{n+1} \leq 1}$$

**Conclusion :** Par récurrence, la propriété est vraie pour tout n entier au rang suivant.

3)A) Dans tous les exercices d'analyse, il y aura un moment où il faudra faire une étude de fonction plus ou moins complète. Cela fait partie des questions faciles à ne pas rater car cela ne dépend que de vous **de connaître vos dérivés**. Faîtes toujours attention à **l'intervalle de définition** !

$$f(x) = \ln(1 + x^2) - x$$

$$f'(x) = \frac{2x}{1 + x^2} - 1$$

Pour $x \in [0; 1]$, on a donc $f'(x) \leq 0$ ce qui nous permet de construire le tableau de variations suivant :

| x | 0 | 1 |
|---|---|---|
| Variations de f | 0 | $\boxed{\ln(2) - 1}$ |
| F'(x) | - | |

Or, $\ln(2) - 1 \leq 0$ donc pour $x \in [0; 1]$, on a donc $\boxed{f(x) \leq 0}$

b) Encore une fois, la question commence par « en déduire » donc l'élément clé qui vous permette de répondre à la question se trouve dans la **précédente**, c'est-à-dire ici **le signe de f(x).** Dans les exercices d'analyse, la clé de la réussite est de parvenir à **réutiliser les résultats** trouvés auparavant.

D'après 3.a) on a :

$$f(x) \leq 0$$

$$\ln(1 + x^2) - x \leq 0$$

On pose $x = u_n$ ce qui donne

$$\ln(1 + un^2) - u_n \leq 0$$

$$u_{n+1} - u_n \leq 0$$

$$\boxed{u_{n+1} \leq u_n}$$

Un est donc décroissante.

C) Dans un exercice qui parle de suite, la question de sa convergence est inévitable. Deux théorèmes peuvent alors vous permettre de conclure la convergence de la suite :

- une suite minorée et décroissante converge

- une suite majorée et croissante converge.

Sachant que la minoration/majoration et le sens de variation a été déterminé dans les questions précédentes, vous n'avez que deux phrases à apprendre pour gagner quelques points de plus.

D'après 2.c), on a $0 \leq u_n \leq 1$ donc $u_n$ est minorée par 0. D'après 3.c), un est décroissante.

Or, par théorème, toute suite décroissante et minorée converge. Par conséquent, $u_n$ est convergente.

4)A) L'idée ici est de reproduire le raisonnement conduit en 3.a) pour déterminer le signe de f. En effet, on peut très bien poser une fonction g(x) = ln(1+x)-x et étudier son signe. Le rapport du jury précise qu'il y avait une autre façon de répondre à la question, mais celle-là me paraît beaucoup plus simple et était également acceptée.

Posons $g(x) = \ln(1 + x) - x$

$g'(x) = \frac{1}{1+x} - 1$ donc on a, pour $x \in [0; 1]$, $g'(x) \leq 0$

On en déduit le tableau de variations suivant :

| x | 0 | 1 |
|---|---|---|
| Variations de g | 0 ↘ | $\boxed{\ln(2) - 1}$ |
| g'(x) | - | |

Pour $x \in [0; 1]$, on a donc :

$$g(x) \leq 0$$

$$\ln(1 + x) - x \leq 0$$

$$\boxed{\ln(1 + x) \leq x}$$

B) Je le répète, mais la clé pour réussir l'exercice d'analyse, c'est de réutiliser les résultats trouvés auparavant. En l'occurrence ici, l'inégalité établie dans la question précédente doit directement être réutilisée.

D'après 4.a) on a :

$$\ln(1 + x) \leq x$$

On pose $x = {u_n}^2$ ce qui donne :

$$\ln(1 + u_n^2) \leq u_n^2$$

$$\boxed{u_{n+1} \leq {u_n}^2}$$

C) Cette question peut être difficile à aborder, surtout si on ne comprend pas qu'il faut démontrer le résultat par récurrence, ce qui a été le cas de nombreux candidats car cela n'est pas explicité, comme souvent dans les exercices d'analyse, par le sujet.

Lorsqu'il est écrit de vérifier une inégalité « pour tout n entier ≥ 1 », essayez de démontrer par récurrence au brouillon car c'est souvent la démarche à adopter. En ayant cela en tête, la question devient alors beaucoup plus claire.

**Initialisation :** Pour n = 1 on a $u_1 \leq \ln(2)$

Or, $u_1 = \ln(1+1) = \ln(2)$

La propriété est vraie pour le premier terme n = 1.

**Hérédité :** Supposons que la propriété soit vraie pour un n entier quelconque, qu'en est-il au rang suivant ?

D'après l'hypothèse de récurrence on a $u_n \leq (\ln(2))^n$ et d'après 4.b) on a $u_{n+1} \leq {u_n}^2$.

$$u_n \leq (\ln(2))^n$$

$${u_n}^2 \leq ((\ln(2))^n)^2$$

$${u_n}^2 \leq (\ln(2))^{2n}$$

Or, puisque -1<ln(2)<1, on a $(\ln(2))^{2n} \leq (\ln(2))^{n+1}$ ce qui donne :

$${u_n}^2 \leq (\ln(2))^{2n} \leq (\ln(2))^{n+1}$$

$$u_{n+1} \leq {u_n}^2 \leq (\ln(2))^{n+1}$$

$$\boxed{u_{n+1} \leq (\ln(2))^{n+1}}$$

**Conclusion :** Par récurrence, la propriété est bien vraie pour tout n entier au rang suivant.

D) Autre question à laquelle vous ne pouvez pas échapper, c'est de déterminer la limite de la suite. Et tant mieux pour vous d'ailleurs. Car vous n'avez même pas besoin d'avoir réussi les questions précédentes pour répondre à celle-ci. En effet, dans **la question d'avant**, vous aurez toujours **l'inégalité donnée** par le sujet qui vous permettra de déterminer cette limite.

Et bien souvent (mais pas toujours !), **la limite est 0** pour la même raison : la suite est majorée par un **réel entre -1 et 1**, ce qui fait que sa n-ième puissance est 0 lorsque n tend vers l'infini.

D'après 2) on a $0 \leq u_n$ donc $u_n$ est minorée par 0.

De même, d'après 4.c) on a $u_n \leq (\ln(2))^n$.

Or, $\lim_{n\to+\infty}(\ln(2)^n = 0$ car -1<ln(2)<1. Par consequent, par **encadrement**:

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = 0}$$

e) Le retour de votre ami scilab. Cette fois, on vous demande de lire et comprendre un programme. La simple connaissance de la fonction « while » permet de répondre à la question. Et puis même sans la connaître, vous n'allez pas me dire que vous ne savez pas ce que veut dire while en anglais quand même !

Le programme détermine la première valeur de n pour laquelle u est inférieure à 0,0001. Puisque le programme affiche 6, cela signifie que l'on a $u_5 \geq 0{,}0001$ et $u_6 \leq 0{,}0001$.

5) Malgré les apparences, c'est juste **une question de cours**. Il suffit simplement de connaître la formule pour $\sum q^n$ pour remarquer que l'on a juste à sommer la dernière inégalité établie. Encore

une fois des points faciles à prendre sans avoir besoin d'avoir réussi les questions précédentes donc si vous êtes en difficulté, lisez bien le sujet en entier **pour ne pas louper** ce genre de questions.

D'après 4.c) on a :

$$u_n \leq (\ln(2))^n$$

$$\sum_{k=0}^{n} u_k \leq \sum_{k=0}^{n} (\ln(2))^n$$

On reconnaît alors la somme des termes d'une suite géométrique ce qui donne :

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} u_k \leq \frac{1-(\ln(2))^n}{1-\ln(2)}}$$

**Conclusion sur l'exercice :** L'exo d'analyse n'est pas spécialement difficile mais nécessite une grande rigueur. Il faut impérativement penser à réutiliser les résultats précédents pour arriver à démontrer les inégalités, ce que beaucoup ont du mal. Ce que je conseille, c'est, sur votre brouillon, vous marquez tous les résultats donnés par l'énoncé et ceux que vous avez trouvé comme ça vous avez tout sous les yeux. Vous n'avez plus qu'à trouver le/les résultats vous permettant d'accéder au résultat demandé.

**Exercice 3**

1) Dans la liste des questions qui tomberont forcément voici la n°1 : « Démontrer que c'est une densité de probabilité ». D'ailleurs, la première partie de l'exo sur les densités de probabilité sera toujours la même **: densité, calculer l'espérance, la variance, la fonction de répartition, calcul du biais et du risque quadratique d'un ou de plusieurs estimateurs et min/max de la fonction**.

Sachant que c'est l'exercice qui rapporte le plus de points (30% minimum du barème), vous devez absolument être au point sur ces questions très faciles. Puisque c'est toujours la même méthode, **refaites encore et encore des exos du même style** pour que cette partie de l'épreuve ne devienne qu'une formalité.

Pour la première question, vous devez donc être capable de prouver sans problème que la fonction peut être considérée comme une densité de probabilité en connaissant par **cœur les 3 critères** : **continuité** et **positivité** de la fonction, et son **intégrale impropre vaut 1**. Attention à ne pas oublier de mentionner **la relation de Chasles** pour le calcul de la densité.

**Continuité et signe :** Pour $x < 0$ ou $x > a$, on a $f(x) = 0$ donc f(x) est continue et positive sur $]-\infty; 0[\cup]a; +\infty[$.

Pour $0 \leq x \leq a$, on a $f(x) = \frac{3x^2}{a^3}$. Or, a désigne un réel positif donc f(x) est continue et positive sur [0 ; a]. Enfin, on a $f(0) = 0$ et $f(a) = \frac{3}{a}$ qui est un réel positif.

F est donc bien positive et continue par morceaux sur $\mathbb{R}$.

**Calcul de $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ :** Pour $x < 0$ ou $x > a$, on a $f(x) = 0$ donc $\int_{-\infty}^{0} f(x)dx = 0$ et $\int_{a}^{+\infty} f(x)dx = 0$

$$\int_0^a f(x)dx = \int_0^a \frac{3x^2}{a^3} dx = \frac{3}{a^3}\left[\frac{x^3}{3}\right] = 1 - 0 = 1$$

Grace à **la relation de Chasles** on obtient :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} f(x)dx + \int_0^a f(x)dx + \int_a^{+\infty} f(x)dx = 0 + 1 + 0 = 1$$

**Conclusion :** f est continue par morceaux, positive sur R et son intégrale impropre vaut 1. F peut donc bien être considérée comme une densité de probabilité.

2) Si la rédaction est relou, les calculs ne sont en général pas difficiles. Attention cependant à ne pas oublier que **E(X) n'existe pas nécessairement** et **que V(X) existe si et seulement E(X²) existe**. Citer également le fait que **V(X) soit donnée par la formule de Koenig-Huygens** valorise grandement votre copie pour un effort moindre.

Sur la copie, il faut donc penser à préciser « E(X) existe si $\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$ converge » et « V(X) existe si $\int_{-\infty}^{+\infty} x^2f(x)dx$ converge ».

E(X) existe si $\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$ converge.

Pour $x < 0$ ou $x > a$, on a $f(x) = 0$ donc $\int_{-\infty}^{0} xf(x)dx = 0$ et $\int_a^{+\infty} xf(x)dx = 0$

$$\int_0^a xf(x)dx = \int_0^a \frac{3x^3}{a^3} dx = \frac{3}{a^3}\left[\frac{x^4}{4}\right] = \frac{3a^4}{4a^3} - 0 = \frac{3a}{4}$$

Grace à **la relation de Chasles** on obtient :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \int_{-\infty}^{0} xf(x)dx + \int_0^a xf(x)dx + \int_a^{+\infty} xf(x)dx = 0 + \frac{3a}{4} + 0 = \frac{3a}{4}$$

$$\boxed{E(X) = \frac{3a}{4}}$$

E(X²) existe si $\int_{-\infty}^{+\infty} x^2f(x)dx$ converge.

Pour $x < 0$ ou $x > a$, on a $f(x) = 0$ donc $\int_{-\infty}^{0} x^2f(x)dx = 0$ et $\int_a^{+\infty} x^2f(x)dx = 0$

$$\int_0^a x^2f(x)dx = \int_0^a \frac{3x^4}{a^3} dx = \frac{3}{a^3}\left[\frac{x^5}{5}\right] = \frac{3a^5}{5a^3} - 0 = \frac{3a^2}{5}.$$

Grace à **la relation de Chasles** on obtient :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} x^2f(x)dx + \int_0^a x^2f(x)dx + \int_a^{+\infty} x^2f(x)dx = 0 + \frac{3a^2}{5} + 0 = \frac{3a^2}{5}$$

$$\boxed{E(X^2) = \frac{3a^2}{5}}$$

D'après **la formule de Koenig-Huygens** on a :

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$$

$$= \frac{3a^2}{5} - \frac{9a^2}{16} = \frac{48a^2 - 45a^2}{80} = \frac{3a^2}{80}$$

$$\boxed{V(X) = \frac{3a^2}{80}}$$

3) Nouvelle question cadeau pour vous ! Parce qu'en plus de vous dire quel résultat vous devez trouver, ben au final c'est la même question que la 1 dans le sens où le calcul à faire est le même. Vous n'avez qu'à remplacer a par x dans l'intégrale.

Il faut simplement faire attention lorsqu'il y a 4 étapes comme dans le sujet 2017.

Pour x < 0, on a $F_X(x) = 0$ et pour x > a, on a $F_X(x) = 1$.

Pour $0 \leq x \leq a$, on a :

$$F_X(x) = \int_0^x f(x)dx = \int_0^x \frac{3x^2}{a^3} = \frac{3}{a^3}\left[\frac{x^3}{3}\right] = \frac{x^3}{a^3} - 0 = \frac{x^3}{a^3}$$

On a donc :

$$F_X(x)\begin{cases} 0 & si\ x < 0 \\ \left(\frac{x}{a}\right)^3 & si\ 0 \leq 0 \leq a \\ 1 & si\ x > a \end{cases}$$

4)a) Beaucoup commencent à paniquer dès qu'ils voient le symbole de la somme, donc le chapitre sur les estimateurs est souvent délaissé. C'est dommage car, d'une part, c'est certains qu'il y aura des questions dessus dans l'exo de densité, et surtout parce qu'il n'est pas difficile.

Si le sigma vous gêne, vous n'avez qu'à écrire ce à quoi cela correspond concrètement comme calcul, ce que nous allons faire ici. Ainsi, il sera plus aisé de comprendre comment calculer l'espérance et donc le biais. Attention à bien **mentionner la linéarité de l'espérance**.

Pour le calcul du biais, il suffit juste de connaître la formule $\boldsymbol{b_a(Y_n) = E(Y_n) - a}$.

$$E(Y_n) = E\left(\frac{4}{3n}\sum_{k=1}^{n} X_k\right)$$

$$= E\left(\frac{4(X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{3n}\right)$$

$$= \frac{4}{3n}(E(X_1) + E(X_2) + \cdots + E(X_n))$$

**Par linéarité de l'espérance**.

$$= \frac{4nE(X_k)}{3n} = \frac{4 * 3a}{3 * 4} = a$$

$$\boxed{E(Y_n) = a}$$

Or :

$$\mathrm{b_a(Y_n) = E(Y_n) - a}$$

$$= a - a = 0$$

$$\boxed{\mathrm{b_a(Y_n) = 0}}$$

Yn est bien un estimateur sans biais de a.

b) C'est parti pour les calculs relous. Encore une fois ils ne sont pas durs mais il faut y aller avec prudence pour ne pas oublier quelques subtilités (mettre au carré pour la variance de Yn par exemple car $\boldsymbol{V(aY_n) = a^2V(Y_n)}$.). Il faut également bien penser à préciser, pour le calcul de la variance, que l'on peut sommer car **les variables sont mutuellement indépendantes**.

Pour le risque quadratique, pensez bien à préciser **que si Yn est un estimateur sans biais**, alors celui-ci est **donné par la variance** car $\boldsymbol{r_a(Y_n) = V(Y_n) - (\mathrm{b_a(Y_n)})^2}$.

$$V(Y_n) = V\left(\frac{4}{3n}\sum_{k=1}^{n} X_k\right)$$

$$= V\left(\frac{4}{3n}(X_1 + X_2 + \cdots + X_n)\right)$$

$$= \frac{16}{9n^2}V(X_1 + X_2 + \cdots + X_n)$$

$$= \frac{16}{9n^2}V(X_1) + V(X_2) + \cdots + V(X_n)$$

**Car les variables Xn sont mutuellement indépendantes**.

$$= \frac{16nV(X_k)}{9n^2} = \frac{16 * 3a^2}{9n * 80} = \frac{16a^2}{3n * 80} = \frac{a^2}{3n * 5} = \frac{a^2}{15n}$$

$$\boxed{V(Y_n) = \frac{a^2}{15n}}$$

Yn est un estimateur sans biais de a donc son risque quadratique est donné par sa variance. On a donc :

$$\boxed{r_a(Y_n) = \frac{a^2}{15n}}$$

Or, $\lim_{n\to+\infty} \frac{a^2}{15n} = 0$ donc

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} r_a(Y_n) = 0}$$

c) Là, on commence à aborder les nouveautés du programme où tout le monde (ou presque) ne comprend rien !

Pourtant ici, son utilisation n'est pas bien compliquée. Il suffit de se **rappeler de 2 éléments** : la formule, c'est déjà un bon début : $\boldsymbol{P(|X - E(X)| \geq \varepsilon) \leq \frac{V(X)}{\varepsilon^2}}$, et que pour pouvoir utilisé l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, il faut que **la variable possède une variance**.

Yn admettant une variance, on a, grâce à l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev :

$$P(|X - E(X)| \geq \varepsilon) \leq \frac{V(X)}{\varepsilon^2}$$

$$P(|X - a| \geq \varepsilon) \leq \frac{a^2}{15n\varepsilon^2}$$

Or, $\lim_{n\to+\infty} \frac{a^2}{15n} = 0$ donc

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} P(|Y_n - a| \geq \varepsilon) = 0}$$

5)a) En général, le sujet vous précise à quoi correspond le max/min d'une variable aléatoire, mais il est mieux de le savoir au cas où. Il suffit d'apprendre l'indication donné par le sujet.

L'astuce est de préciser que **les variables Xk sont mutuellement indépendantes** ce qui **transforme les ∩ en *.**

On a :

$$Z_n = \max(X_1, X_2, \dots, X_n)$$
$$= (X_1 \leq x) \cap (X_2 \leq x) \dots \cap (X_n \leq x)$$

Or **les variables Xk sont mutuellement indépendantes** ce qui donne :

$$P(Z_n \leq x) = (X_1 \leq x) * (X_2 \leq x) \dots * (X_n \leq x)$$
$$= (P(X_k \leq x))^n$$

Ainsi on a :

$$H_n(x) = \begin{cases} 0 \; si \; x < 0 \\ \left(\frac{x}{a}\right)^{3n} \; si \; 0 \leq x \leq a \\ 1 \; si \; x > a \end{cases}$$

b) Vous venez d'obtenir la fonction de répartition de Zn. Pour obtenir sa densité, il faut donc faire le raisonnement inverse de celui de la question 3. Dans cette question, vous utilisez la primitive pour trouver une fonction de répartition **donc en dérivant une fonction de répartition**, vous obtenez la densité.

Cette question représente également des points faciles car la fonction de répartition sera toujours donnée par le sujet et vous n'aurez plus qu'à la dériver pour répondre à la question.

On a :

$$H_n(x) = \begin{cases} 0 \; si \; x < 0 \\ \left(\frac{x}{a}\right)^{3n} \; si \; 0 \leq x \leq a \\ 1 \; si \; x > a \end{cases}$$

Par conséquent on a :

$$h_n(x) = \begin{cases} 0 \; si \; x < 0 \\ \frac{3n}{a^{3n}} x^{3n-1} \; si \; 0 \leq x \leq a \\ 0 \; si \; x > a \end{cases}$$

c) E(Zn) existe si $\int_{-\infty}^{+\infty} x h_n(x) dx \; converge.$

Pour x > a ou x < 0 on a $h_n(x) = 0$ donc $\int_{-\infty}^{0} x h_n(x)\, dx = 0$ et $\int_{a}^{+\infty} x h_n(x)\, dx = 0$

$$\int_0^a x h_n(x) dx = \int_0^a \frac{3n}{a^{3n}} x^{3n} dx = \frac{3n}{a^{3n}} \left[\frac{x^{3n+1}}{3n+1}\right] = \frac{3n * a^{3n+1}}{a^{3n} * 3n + 1} = \frac{3na}{3n+1}$$

**Par la relation de Chasles** on a donc :

$$\boxed{E(Z_n) = \frac{3na}{3n+1}}$$

$$b_a(Z_n) = E(Z_n) - a = \frac{3na}{3n+1} - a = \frac{3na - a(3n+1)}{3n+1} = \frac{3na - 3na - a}{3n+1} = -\frac{a}{3n+1}$$

$$\boxed{b_a(Z_n) = -\frac{a}{3n+1}}$$

d) Vérifions d'abord si Zn admet une variance.

E(Zn²) existe si $\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 h_n(x)dx\ converge.$

Pour x > a ou x < 0 on a $h_n(x) = 0$ donc $\int_{-\infty}^{0} x^2 h_n(x)\,dx = 0$ et $\int_{a}^{+\infty} x^2 h_n(x)\,dx = 0$

$$\int_0^a x^2 h_n(x)dx = \int_0^a \frac{3n}{a^{3n}} x^{3n+1} dx = \frac{3n}{a^{3n}}\left[\frac{x^{3n+2}}{3n+2}\right] = \frac{3n * a^{3n+2}}{a^{3n} * 3n+2} = \frac{3na^2}{3n+2}$$

**Par la relation de Chasles** on a donc :

$$\boxed{E(Z_n^2) = \frac{3na^2}{3n+2}}$$

**D'après la formule de Koenig-Huygens** on a :

$$V(Z_n) = E(Z_n^2) - (E(Z_n))^2 = \frac{3na^2}{3n+2} - \frac{9a^2n^2}{(3n+1)^2} = \frac{3na^2(9n^2+6n+1) - 9a^2n^2(3n+2)}{(3n+2)(3n+1)^2}$$

$$= \frac{27n^3a^2 + 18n^2a^2 + 3na^2 - 27n^3a^2 - 18n^2a^2}{(3n+2)(3n+1)^2} = \frac{3na^2}{(3n+2)(3n+1)^2}$$

$$\boxed{V(Z_n) = \frac{3na^2}{(3n+2)(3n+1)^2}}$$

$$r_a(Z_n) = V(Z_n) + \left(b_a(Z_n)\right)^2 = \frac{3na^2}{(3n+2)(3n+1)^2} + \frac{a^2}{(3n+1)^2} = \frac{3na^2 + a^2(3n+2)}{(3n+2)(3n+1)^2}$$

$$= \frac{3na^2 + 3a^2n + 2a^2}{(3n+2)(3n+1)^2} = \frac{6na^2 + 2a^2}{(3n+2)(3n+1)^2} = \frac{(3n+1)2a^2}{(3n+2)(3n+1)^2} = \frac{2a^2}{(3n+2)(3n+1)}$$

On a donc

$$\boxed{r_a(Z_n) = \frac{2a^2}{(3n+2)(3n+1)}}$$

Or $\lim_{n\to+\infty} \frac{2a^2}{(3n+2)(3n+1)} = 0$ donc

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} r_a(Z_n) = 0}$$

6)a) Bon là normalement, les trois quarts des candidats ont déjà arrêté l'exercice à cause des calculs infâmes de la question précédente. Et pourtant le plus dur reste à venir.

Mais il ne faut pas se décourager. Déjà pour cette première question, si l'inégalité paraît très compliquée, il suffit simplement **d'écrire la valeur absolue d'une manière différente** pour trouver le résultat demandé.

On a

$$(|Z_n - a| \geq \theta) = (-\theta \geq Z_n - a \geq \theta) = (Z_n - a \geq \theta) \cup (Z_n - a \leq -\theta)$$

On a donc bien :

$$\boxed{(|Z_n - a| \geq \theta) = (Z_n - a \geq \theta) \cup (Z_n - a \leq -\theta)}$$

b) Cette question fait partie des plus discriminantes de l'épreuve et récompense les candidats les plus à l'aise en maths.

Encore une fois après une question commençant par « en déduire », il faut se baser sur la relation précédente. Mais il faut également garder en tête que $H_n(x)$ s'écrit aussi $P(Z_n \leq x)$ ce qui aide grandement à reconstruire la relation demandée.

On a

$$P(|Z_n - a| \geq \theta) = P(Z_n - a \geq \theta) \cup P(Z_n - a \leq -\theta)$$

$$= P(Z_n - a \geq \theta) + P(Z_n - a \leq -\theta)$$

$$= P(Z_n \geq \theta + a) + P(Z_n \leq -\theta + a)$$

$$= 1 - P(Z_n \leq \theta + a) + P(Z_n \leq -\theta + a)$$

$$\boxed{= 1 - H_n(\theta + a) + H_n(a - \theta)}$$

c) Enfin la dernière question ! Deux remarques : la dernière égalité n'est pas difficile mais il faut avoir le coup d'œil pour remarquer que $\boldsymbol{H_n(\theta + a) = 1}$ **car** $\boldsymbol{\theta + a > a}$. Ensuite même sans parvenir à démontrer l'inégalité, puisque le sujet la donne, vous pouvez quand même calculer la limite donc ne vous privez pas de ces points gratuits !

On a :

$$P(|Z_n - a| \geq \theta) = 1 - H_n(\theta + a) + H_n(a - \theta)$$

Or, $\theta + a > a$ donc $H_n(\theta + a) = 1$

De même, $a - \theta < a$ mais $a - \theta > 0$ car $\theta < a$ donc $H_n(a - \theta) = \left(\frac{a-\theta}{a}\right)^n$

On a donc :

$$P(|Z_n - a| \geq \theta) = 1 - 1 + \left(\frac{a - \theta}{a}\right)^n = \left(\frac{a - \theta}{a}\right)^n$$

$$\boxed{P(|Z_n - a| \geq \theta) = \left(\frac{a - \theta}{a}\right)^n}$$

Or, $0 \leq \frac{a-\theta}{a} \leq 1$ donc $\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{a-\theta}{a}\right)^n = 0$.

Par conséquent :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} P(|Z_n - a| \geq \theta) = 0}$$

**Conclusion sur l'exercice :** La quasi-totalité du questionnement sera identique donc beaucoup s'entraîner sur les densités de probabilité portera grandement ses fruits. Seules les dernières questions seront plus dures afin de départager clairement les candidats excellents des autres.

**Exercice 4**

1) Un bon vieil exo de proba pour vous achever à la fin. Etant un chapitre qui cause beaucoup de problèmes aux candidats, il est également très valorisé dans le barème (plus de 30% des points).
Lorsque le sujet demande de donner une loi de probabilité, il ne **faut pas s'efforcer à reconnaître une loi usuelle**, ce que certains font. Au contraire, l'énoncé demande de **« donner »**, pas de « reconnaître », et cette différence dans les termes doit vous alerter. Quand on demande de donner une loi, il faut donner **l'ensemble de définition** et la **probabilité prise par chacune des valeurs**, c'est pourquoi la présentation sous forme de **tableau** est pertinente. Faites toujours attention à ce que le **total de vos probabilités fasse 1**, sinon c'est qu'il y a un problème.

Par lecture de l'énoncé on a :

| v | 1 | 2 | 3 | Total |
|---|---|---|---|---|
| $P(A_1 = v)$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{4}$ | 1 |

$$E(A_1) = 1 * \frac{1}{2} + 2 * \frac{1}{4} + 3 * \frac{1}{4} = \frac{7}{4}$$

$$\boxed{E(A_1) = \frac{7}{4}}$$

$$E(A_1^2) = 1 * \frac{1}{2} + 4 * \frac{1}{4} + 9 * \frac{1}{4} = \frac{15}{4}$$

$$\boxed{E(A_1^2) = \frac{15}{4}}$$

D'après **la formule de Koenig-Huygens** on a :

$$V(A_1) = E(A_1^2) - \left(E(A_1)\right)^2$$

$$= \frac{15}{4} - \frac{49}{16} = \frac{60-49}{16} = \frac{11}{16}$$

$$\boxed{V(A_1) = \frac{11}{16}}$$

2)a) Pour l'instant, ce n'est même pas des maths mais de la lecture d'énoncé et de la logique. En plus de cela, le sujet vous donne les réponses !
La seule difficulté est de bien envisager correctement les différents scénarios possibles pour chacune des valeurs. La question à se poser est donc **« comment, en deux sauts, la puce peut-elle se retrouver sur la case 4 »** par exemple et cela, pour toutes les valeurs.

LA puce saute d'un cran minimum et de trois crans maximum. En deux sauts, la puce se trouve donc au minimum sur la case 2 en faisant 2 sauts de 1 cran et au maximum sur la case 6 en faisant 2 sauts de 3 crans.
On a donc bien :

$$\boxed{A_2(\Omega) = [[2;6]]}$$

$$P(A_2 = 2) = \frac{1}{2} * \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

$$P(A_2 = 3) = \frac{1}{2} * \frac{1}{4} * 2 = \frac{1}{4}$$

$$P(A_2 = 4) = \frac{1}{2} * \frac{1}{4} * 2 + \frac{1}{4} * \frac{1}{4} = \frac{5}{16}$$

$$P(A_2 = 5) = \frac{1}{4} * \frac{1}{4} * 2 = \frac{1}{8}$$

$$P(A_2 = 6) = \frac{1}{4} * \frac{1}{4} = \frac{1}{16}$$

Ainsi on a

| V | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | Total |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $P(A_2 = v)$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{5}{16}$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{16}$ | 1 |

b) La présentation sous forme de tableau prend tout son sens pour le calcul de l'espérance et de la variance car cela facilite grandement la tâche.

$$E(A_2) = 2 * \frac{1}{4} + 3 * \frac{1}{4} + 4 * \frac{5}{16} + 5 * \frac{1}{8} + 6 * \frac{1}{16} = \frac{56}{16} = \frac{7}{2}$$

$$\boxed{E(A_2) = \frac{7}{2}}$$

3)a) Lorsqu'on vous demande une loi conjointe, il faut commencer par **trouver tous les cas impossibles**. En **rajoutant la loi A2**, la quasi-totalité de vos cases sont ainsi remplies.

Ensuite, il faut **s'imaginer concrètement la scène** pour envisager les scénarios possibles.

Enfin, il faut qu'en sommant vos probabilités, vous **retrouviez bien la loi A2** et que le **total fasse 1**.

| $Z_2/A_2$ | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | Total |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{16}$ | 0 | 0 | $\frac{9}{16}$ |
| 1 | 0 | 0 | $\frac{4}{16}$ | $\frac{1}{8}$ | 0 | $\frac{6}{16}$ |
| 2 | 0 | 0 | 0 | 0 | $\frac{1}{16}$ | $\frac{1}{16}$ |
| Total | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{5}{16}$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{16}$ | 1 |

$$P((Z_2 = 0) \cap (A_2 = 4)) = \frac{1}{4} * \frac{1}{4} = \frac{1}{16}$$

$$P\big((Z_2 = 1) \cap (A_2 = 4)\big) = \frac{1}{4} * \frac{1}{2} * 2 = \frac{4}{16}$$

On a donc

| V | 0 | 1 | 2 | Total |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| $P(Z_2 = v)$ | $\frac{9}{16}$ | $\frac{6}{16}$ | $\frac{1}{16}$ | 1 |

$$E(Z_2) = 0 * \frac{9}{16} + 1 * \frac{6}{16} + 2 * \frac{1}{16} = \frac{1}{2}$$

$$\boxed{E(Z_2) = \frac{1}{2}}$$

b) Si vous connaissez la formule de la covariance, soit $\boldsymbol{Cov(X,Y) = E(XY) - E(X) * E(Y)}$, cette question ne pose aucun problème.

En ce qui concerne l'indépendance, même si on trouve une cov égale à 0, il faut vérifier en faisant $\boldsymbol{P\big((X = i) \cap (Y = j)\big) = P(X = i) * P(Y = j)}$.

En revanche, si la cov n'est pas nulle, cela n'est pas nécessaire. Il suffit de dire que **la covariance n'est pas nulle**.

$$E(A_2Z_2) = 4 * 1 * \frac{4}{16} + 5 * 1 * \frac{1}{8} + 6 * 2 * \frac{1}{16} = \frac{38}{16} = \frac{19}{8}$$

$$\boxed{E(A^2Z_2) = \frac{19}{8}}$$

$$Cov(A_2, Z_2) = E(A_2Z_2) - E(A_2) * E(Z_2) = \frac{19}{8} - \frac{7}{2} * \frac{1}{2} = \frac{19}{8} - \frac{7}{4} = \frac{19 - 14}{8} = \frac{5}{8}$$

$$\boxed{Cov(A_2, Z_2) = \frac{5}{8}}$$

La covariance n'est pas nulle donc les deux variables aléatoires ne sont pas indépendantes.

4) Cette question scilab est assez difficile dans le sens où il faut parvenir à faire le lien entre les déplacements de la puce et la loi uniforme de l'énoncé.

La probabilité que $t \leq 2$ est égale à $\frac{1}{2}$ pour la loi uniforme ce qui correspond à la probabilité que la puce avance d'un cran.

De même, on a t = 4 = $\frac{1}{4}$ et t = 3 = $\frac{1}{4}$ ce qui correspond aux probabilités que la puce avance de 2 ou 3 crans.

Ici, ce ne sont donc pas vos connaissances en scilab qui sont testées mais votre capacité à analyser un problème.

```
D = zeros(1,100)

For k = 1 :100

        T = grand(1,1'uin',1,4)

        If t<= 2 then A(k)=1

        End

        If t== 3 then A(k)=2
```

End

If t==4 then A(k)=3

End

End

Disp(A)

5) On retrouve enfin le terme **« reconnaître** » donc c'est le moment de trouver **une loi usuelle**. Faîtes bien attention à la rédaction de la justification. Ainsi, pour une loi binomiale, il ne faut pas oublier **l'indépendance.**

On a Xn, Yn et Zn qui comptent respectivement le nombre de sauts effectués par la puce de 1, 2 et 3 unités, chacun des sauts étant indépendants. Ainsi on a :

$$\boxed{X_n \sim B\left(n;\frac{1}{2}\right) \quad Y_n \sim B\left(n;\frac{1}{4}\right) \text{ et } Z_n \sim B\left(n;\frac{1}{4}\right)}$$

La somme de deux lois binomiales donnant une loi binomiale dont le paramètre p sera égale à la somme des deux probabilités, c'est-à-dire ici $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$. On a donc :

$$\boxed{X_n + Y_n \sim B\left(n;\frac{3}{4}\right)}$$

6)a) La première partie de la question n'est que de la logique et demande de prendre un peu de hauteur sur l'exercice.

La deuxième a pour but de vérifier si vous connaissez vos propriétés sur la covariance. Ici, ce seront les formules $\boldsymbol{Cov(aX+b;Y)=aCov(X,Y)}$ **et** $\boldsymbol{Cov(X,X)=V(X)}$ vous sauveront la vie.

Le piège est de ne pas penser à **utiliser la relation que vous venez d'établir**. En effet, avec Xn+Yn+Zn=n, on peut en déduire **que Zn = n – (Xn+Yn)**.

Xn, Yn et Zn comptant respectivement les sauts de 1, 2 et 3 crans de la puce, si on somme les trois variables aléatoires, on obtient alors le nombre de sauts effectués par la puce, d'où :

$$\boxed{X_n + Y_n + Z_n = n}$$

Ainsi on en déduit que :

$$\boxed{Z_n = n - (X_n + Y_n)}$$

$$Cov(Z_n, X_n + Y_n) = Cov(n - (X_n + Y_n); X_n + Y_n)$$

$$= -Cov(X_n + Y_n; X_n + Y_n)$$

$$= -V(X_n + Y_n) = \frac{-3n}{16}$$

$$\boxed{Cov(Z_n, X_n + Y_n) = \frac{-3n}{16}}$$

b) Là il faut utiliser la formule **V(X)+V(Y)+2Cov(X,Y) = V(X+Y)** pour pouvoir trouver la deuxième formule de la covariance qui est **Cov(X,Y) = (V(X+Y)-V(X)-V(Y))/2**. Vous pouvez l'apprendre par cœur car c'est une formule qui s'avère souvent utile en fin d'exercice.

On a :

$$V(X_n+Y_n)=V(X_n)+V(Y_n)+2Cov(X_n,Y_n)$$

Ce qui nous permet de déduire la relation suivante :

$$Cov(X_n,Y_n)=\frac{V(X_n+Y_n)-V(X_n)-V(Y_n)}{2}$$

$$=\frac{\frac{3n}{16}-\frac{n}{4}-\frac{3n}{16}}{2}=-\frac{n}{8}$$

$$\boxed{Cov(X_n,Y_n)=-\frac{n}{8}}$$

c) Il suffit simplement d'appliquer la **formule $\rho(X,Y)=\frac{Cov(X,Y)}{\sigma(X)*\sigma(Y)}$ avec $\sigma(X)=\sqrt{V(X)}$**.

$$\rho(X_n,Y_n)=\frac{Cov(X_n,Y_n)}{\sigma(X_n)*\sigma(Y_n)}=\frac{-\frac{n}{8}}{\sqrt{\frac{n}{4}}*\sqrt{\frac{3n}{16}}}=-\frac{1}{3}\sqrt{3}$$

$$\rho(X_n,Y_n)=-\frac{1}{3}\sqrt{3}$$

7)a) Tout l'enjeu est de parvenir à exprimer correctement An. Beaucoup ont affirmé que An = Xn + Yn + Zn alors que cela donne le nombre de sauts, mais pas la position de la puce puisque **certains sauts valent 2 ou 3 crans.**

De même, pour le calcul de l'espérance, il ne faut pas oublier de **mentionner la linéarité**.

On a

$$\boxed{A_n=X_n+2Y_n+3Z_n}$$

Ainsi on a

$$E(A_n)=E(X_n+2Y_n+3Z_n)=E(X_n)+2E(Y_n)+3E(Z_n)=\frac{n}{2}+\frac{2n}{4}+\frac{3n}{4}=\frac{7n}{4}$$

Par **linéarité de l'espérance**.

$$\boxed{E(A_n)=\frac{7n}{4}}$$

b) Vous venez d'établir une égalité de An en fonction de Xn, Yn et Zn et on vous demande maintenant de vous débarrasser de Zn. Or, tout à l'heure, vous avez trouvé **une relation de Zn en fonction de Xn et Yn.**

Le reste des calculs ne sera alors que de la vérification des connaissance des propriétés de la variance et de la covariance, notamment **Cov(Xn+Yn,Xn) = Cov(Xn,Xn) + Cov(Yn,Xn).**

On a

$$A_n=X_n+2Y_n+3Z_n$$

$$A_n=X_n+2Y_n+3(n-X_n-Y_n)$$

$$A_n = X_n + 2Y_n + 3n - 3X_n - 3Y_n)$$

$$\boxed{A_n = -2X_n - Y_n + 3n}$$

$$V(A_n) = V(-2X_n - Y_n + 3n)$$

$$= V\big(3n - (2X_n + Y_n)\big)$$

$$= V(2X_n + Y_n)$$

$$= V(2X_n) + V(Y_n) + 2Cov(2X_n, Y_n)$$

$$= 4V(X_n) + V(Y_n) + 4Cov(X_n, Y_n)$$

$$= \frac{4n}{4} + \frac{3n}{16} + \frac{-4n}{8} = \frac{11n}{16}$$

$$\boxed{V(A_n) = \frac{11n}{16}}$$

$$Cov(A_n, X_n) = Cov(3n - (2X_n + Y_n); X_n)$$

$$= Cov(-2X_n - Y_n; X_n)$$

$$= Cov(-2X_n; X_n) + Cov(-Y_n; X_n)$$

$$= -2V(X_n) - Cov(X_n; Y_n)$$

$$= \frac{-2n}{4} + \frac{n}{8} = \frac{-3n}{8}$$

$$\boxed{Cov(A_n, X_n) = \frac{-3n}{8}}$$

8) A est un vecteur-ligne à 100 composantes. La commande y=cumsum(A) crée un vecteur-ligne (y1,y2,...,y100) tel que $y_k = \sum_{i=1}^{k} A(i)$ , $A(i)$représentant le i-ème déplacement de la puce. Donc yi est l'abscisse de la puce après le i-ème saut. Les commandes :

```
x=1:100
y=cumsum(A)
plot2d(x,y)
```

induisent la création d'une ligne brisée représentant le déplacement de la puce lors des 100 premiers sauts, l'abscisse figurant le numéro du saut, et l'ordonnée figurant l'abscisse du point occupé par la puce à l'issue de son n-ième saut.

**Conclusion sur l'exercice :** Une bonne connaissance des formules en probabilité est indispensable pour pouvoir survivre aux calculs horribles et lourdingues. L'exercice de probabilité sera toujours long et parmi les plus difficiles car c'est un chapitre discriminant entre les candidats, ce qui doit vous incitez à consacrer une bonne partie de vos révisions à ce chapitre.