Fichier extrait du document

Prépa Eco option T - sujets et (certains) corrigés des épreuves de Math 2016

Informations générales

Type : Concours, Sujets
Classe(s) : CPGE ECT 2
Matières : Mathématiques
Mots clés : concours corrigé, correction math

Les fichiers du document 1575

- Corrigé T ESCP Europe 2016 - par Claude Huet
- Sujet T ESCP Europe 2016 - version TEX
- Sujet T ESCP Europe 2016
- Sujet T ESC Dijon 2016 (scan)
- Sujet Ecricome T 2016

Le contributeur **mesrevisions** précise : Ecricome, ESC et ESCP

HEC 2016. Voie Technologique. Corrigé ex1 et ex2

EXERCICE I

1.a) On trouve $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, puis $A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 5 \end{pmatrix}$, et enfin
$A^3 - A^2 - 2A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

b) La relation obtenue en **a)** signifie que $R(A) = 0$, où R est le polynôme défini par $R(X) = X^3 - X^2 - 2X$. Ce polynôme est donc un polynôme annulateur de la matrice A.

c) On a $R(X) = X\left(X^2 - X - 2\right)$. Les racines du trinôme $X^2 - X - 2$ sont -1 et 2 (racines évidentes). Les racines de R sont donc -1, 0 et 2.

d) On sait (cours) que les valeurs propres possibles de la matrice A sont racines de n'importe lequel de ses polynômes annulateurs. Compte-tenu de **c)**, les seules valeurs propres possibles de A sont -1, 0 et 2.

2.a) On trouve $AU_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = -U_1$. Puisque $AU_1 = -U_1$ (et $U_1 \neq 0$), -1 est valeur propre de A, associée au vecteur propre U_1.
De même, on trouve $AU_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0.U_2$. Puisque $AU_2 = 0.U_2$ (et $U_2 \neq 0$), 0 est valeur propre de A, associée au vecteur propre U_2.
Enfin, on trouve $AU_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 2U_3$. Puisque $AU_3 = 2U_3$ (et $U_3 \neq 0$), 2 est valeur propre de A, associée au vecteur propre U_3.
En résumé,
U_1 est vecteur propre de A, associé à la valeur propre -1 ;
U_2 est vecteur propre de A, associé à la valeur propre 0 ;
U_3 est vecteur propre de A, associé à la valeur propre 2.

b) On trouve $PQ = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 3 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} = 6I$ (où I désigne la matrice identité d'ordre 3). On en déduit que $P \times \left(\frac{1}{6}Q\right) = I$, ce qui montre que P est inversible, avec
$P^{-1} = \frac{1}{6}Q = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 3 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

c) On trouve $AP = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ et $PD = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$. Il suffit alors de constater que $AP = PD$.
Comme la matrice P est inversible, en multipliant membre à membre la relation $AP = PD$ à gauche par P^{-1}, on obtient $P^{-1}AP = P^{-1}PD = D$. La relation $D = P^{-1}AP$ signifie, puisque D est diagonale, que A est diagonalisable.

3.a) On montre par récurrence que, pour tout entier $n \geq 1$, on a $A^n = PD^nP^{-1}$.
<u>Cas $n = 1$</u>

On a $AP = PD$. En multipliant membre à membre cette égalité, à droite par P^{-1}, on obtient $APP^{-1} = PDP^{-1}$, c'est-à-dire, puisque $APP^{-1} = AI = A$, que $A = PDP^{-1}$.
Ainsi, $A^1 = PD^1P^{-1}$, et la relation $A^n = PD^nP^{-1}$ est donc vraie pour $n = 1$.
<u>Hérédité</u>

On suppose que, pour un entier $n \geq 1$, quelconque, on a $A^n = PD^nP^{-1}$. Comme, vu le cas $n = 1$, on a $A = PDP^{-1}$, on a $A^{n+1} = A \times A^n = \left(PDP^{-1}\right)\left(PD^nP^{-1}\right) = PDP^{-1}PD^nP^{-1} = PD^{n+1}P^{-1}$ (car $PP^{-1} = I$ puis $D \times D^n = D^{n+1}$).
Ainsi la formule est encore vraie, et l'on peut alors conclure que, pour tout entier $n \geq 1$, $A^n = PD^nP^{-1}$.

b. On trouve $PD^n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 2^n \\ (-1)^n & 0 & 2^n \\ -(-1)^n & 0 & 2\times 2^n \end{pmatrix}$, puis

$$\begin{aligned} PD^nQ &= \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 2^n \\ (-1)^n & 0 & 2^n \\ -(-1)^n & 0 & 2\times 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 3 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2^n + 2(-1)^n & 2^n + 2(-1)^n & 2\times 2^n - 2(-1)^n \\ 2^n + 2(-1)^n & 2^n + 2(-1)^n & 2\times 2^n - 2(-1)^n \\ 2\times 2^n - 2(-1)^n & 2\times 2^n - 2(-1)^n & 4\times 2^n + 2(-1)^n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

et enfin, $A^n = PD^nP^{-1} = \dfrac{1}{6}PD^nQ = \dfrac{1}{6}\begin{pmatrix} 2^n + 2(-1)^n & 2^n + 2(-1)^n & 2\times 2^n - 2(-1)^n \\ 2^n + 2(-1)^n & 2^n + 2(-1)^n & 2\times 2^n - 2(-1)^n \\ 2\times 2^n - 2(-1)^n & 2\times 2^n - 2(-1)^n & 4\times 2^n + 2(-1)^n \end{pmatrix}$.

Il est toujours conseillé d'effectuer la vérification, au moins, que la formule ci-dessus est convenable pour $n = 1$.

4.a) Faisant $n = 2$ dans **3.a)**, on obtient $A^2 = PD^2P^{-1}$. En multipliant membre à membre cette égalité, à droite par P, on obtient $A^2P = PD^2P^{-1}P$, c'est-à-dire $A^2P = PD^2$;
(*variante :* $A^2P = A(AP) = A(PD) = (AP)D = (PD)D = PD^2$).
Comme $M = I - 2A + 5A^2$, on a, en développant, $MP = P - 2AP + 5A^2P$. Comme $AP = PD$ et $A^2P = PD^2$, on a $MP = P - 2PD + 5PD^2 = P\left(I - 2D + D^2\right)$.

b) La matrice $I - 2D + D^2$, somme de trois matrices diagonales, est diagonale. De manière explicite,
$I - 2D + D^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} + 5\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 17 \end{pmatrix}$.
Comme P est inversible, on a $M = P\left(I - 2D + D^2\right)P^{-1}$, et $I - 2D + D^2$ est diagonale , M est donc diagonalisable, et elle admet les trois valeurs propres, en évidence, 1, 8 et 17.

EXERCICE 2

Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ la suite définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = \ln\left(1 + u_n^2\right)$.

1. Le programme *Scilab* suivant calcule et affiche u_n, pour une valeur de n entrée par l'utilisateur.

```
n= input('entrer la valeur de n')
u= 1;
for k=1:n
u=log(1+u^2);
end
disp(u)
```

2. On montre, par récurrence, que pour tout entier $n \in \mathbf{N}$, on a : $0 \leq u_n \leq 1$.
Puisque $0 \leq u_0 = 1 \leq 1$, l'énoncé est vrai pour $n = 0$.
Si l'on suppose que, pour un entier $n \geq 0$, quelconque, on a $0 \leq u_n \leq 1$, alors $0 \leq u_n^2 \leq 1$, d'où $1 \leq 1 + u_n^2 \leq 2$, et la croissance de la fonction logarithme sur $[1, 2]$ entraîne que $\ln 1 \leq \ln\left(1 + u_n^2\right) \leq \ln 2$, c'est-à-dire ($\ln 1 = 0$) $0 \leq u_{n+1} \leq \ln 2$, et donc, puisque $\ln 2 \leq 1$, $0 \leq u_{n+1} \leq 1$. L'énoncé est donc alors encore vrai pour l'entier $n+1$, et ceci achève de prouver que, pour tout entier $n \geq 0$, on a $0 \leq u_n \leq 1$.

3. Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0,1]$, à valeurs réelles, telle que $f(x) = \ln\left(1+x^2\right) - x$.

a) f est dérivable sur $[0,1]$ comme composée de fonctions dérivables, et $f'(x) = \dfrac{2x}{1+x^2} - 1 = \dfrac{2x-1-x^2}{1+x^2}$.

Comme $2x-1-x^2 = -\left(x^2-2x+1\right) = -(x-1)^2$, on a $f'(x) = -\dfrac{(x-1)^2}{1+x^2}$. Comme $1+x^2 > 0$, et $(x-1)^2 \geq 0$, pour tout $x \in [0,1[$, $f'(x) < 0$, et $f'(1) = 0$.

Tableau de variation de f

x	0	1
$f'(x)$	$\searrow$	0
f	0	$\ln 2 - 1$

f est strictement décroissante sur $[0,1]$, avec $f(0)$, donc, pour tout $x \in]0,1]$, $f(x) < 0$.

b) Pour tout entier $n \geq 0$, $u_{n+1} - u_n = \ln\left(1+u_n^2\right) - u_n = f(u_n) \leq 0$ (d'après **a)**), la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est donc décroissante.

c) La suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est, d'après **b)**, décroissante, et, d'après **2.**, décroissante**.** Le théorème de convergence monotone permet alors de conclure que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est convergente.

4.a) Soit h la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par $h(x) = \ln(1+x) - x$. h est dérivable sur $[0,+\infty[$ comme composée de fonctions dérivables, et $h'(x) = \dfrac{1}{1+x} - 1 = -\dfrac{x}{1+x} \leq 0$ pour tout $x \geq 0$, h est donc décroissante sur $[0,+\infty[$. Comme $h(0) = 0$, on a, pour tout $x \geq 0$, $h(x) \leq 0$, ce qui revient à $\ln(1+x) \leq x$.

b) Appliquant **a)** à $x = u_n^2$, on obtient $\ln\left(1+u_n^2\right) \leq u_n^2$, c'est-à-dire $u_{n+1} \leq u_n^2$.

c) On montre, par récurrence, que, pour tout entier $n \geq 1$, $u_n \leq (\ln 2)^n$. Comme $u_1 = \ln\left(1+u_0^2\right) = \ln 2$, on a bien $u_1 \leq (\ln 2)^1$, l'énoncé est donc vrai pour $n = 1$.
On suppose alors que, pour un entier $n \geq 1$, quelconque, on a $u_n \leq (\ln 2)^n$.
Il en résulte alors que $u_{n+1} \leq u_n^2 = u_n \times u_n \leq (\ln 2)^n \times (\ln 2)^n \leq \ln 2 \times (\ln 2)^n$, car $0 < \ln 2 < 1$ donc $(\ln 2)^n \leq \ln 2$. On a donc $u_{n+1} \leq (\ln 2)^{n+1}$, l'énoncé est donc encore vrai pour l'entier $n+1$. On peut alors conclure que, pour tout entier $n \geq 1$, $u_n \leq (\ln 2)^n$.

d) On a montré que, pour tout entier $n \geq 1$, $0 \leq u_n \leq (\ln 2)^n$. Comme $0 < \ln 2 < 1$, on a $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} (\ln 2)^n = 0$. Le théorème de l'encadrement permet donc de conclure que $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} u_n = 0$**.**

e) On considère le programme *Scilab* suivant :

```
n=0
u=1
while u>=0.0001
u=log(1+u^2)
n=n+1
end
disp(n)
```

On exécute ce programme. Le résultat affiché est 6.

Le programme calcule u_{n+1} tant que cette dernière valeur est supérieure ou égale à 10^{-4}, et affiche ensuite la première valeur de n pour laquelle l'opération ci-dessus n'est pas effectuée. Puisque le résultat affiché est 6, c'est que 6 est la plus petite valeur de n pour laquelle $u_n < 10^{-4}$. On a donc $u_5 \geq 10^{-4}$, et $u_6 < 10^{-4}$.

Remarque : en fait, à partir de $u_{n+1} \leq u_n^2$, on montre par récurrence que, pour tout entier $n \geq 1$, $u_n \leq (\ln 2)^{2^{n-1}}$ (on vérifie que l'inégalité est vraie pour $n = 1$, et si elle est vraie pour un certain entier $n \geq 1$, alors, en utilisant **4.b)** et l'hypothèse de récurrence, $u_{n+1} \leq u_n^2 \leq \left((\ln 2)^{2^{n-1}}\right)^2 = (\ln 2)^{2\times 2^{n-1}} = (\ln 2)^{2^n}$, ce qui permet de conclure). Le fait que, pour tout entier $n \geq 1$, $u_n \leq (\ln 2)^{2^{n-1}}$ entraîne que la convergence de la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ vers 0 est très rapide : on a $(\ln 2)^{2^5} \simeq 8 \times 10^{-6}$, donc $u_6 \leq 8 \times 10^{-6}$. On trouve, en fait, $u_5 \simeq 4 \times 10^{-4}$, et $u_6 \simeq 2 \times 10^{-7}$.

5. L'inégalité $u_n \leq (\ln 2)^n$, que l'énoncé demandait de démontrer pour tout $n \geq 1$, est en fait vraie pour tout entier $n \geq 0$, puisque $u_0 = 1$ et $(\ln 2)^0 = 1$.
En additionnant membre à membre les inégalités $u_k \leq (\ln 2)^k$, pour $k = 0, 1, ..., n-1$, on obtient
$\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} u_k \leq \sum_{k=0}^{n-1} (\ln 2)^k = \frac{1-(\ln 2)^n}{1-\ln 2}$ (somme des termes d'une suite géométrique).

HEC 2016. Voie Technologique. Corrigé ex3 et ex4

EXERCICE 3

1. f est nulle sur chacun des intervalles $]-\infty, 0[$ et $]a, +\infty[$, et positive ou nulle sur $[0, a]$ (car $a > 0$), donc positive ou nulle sur $\mathbf{R}$.
f admet au plus deux points de discontinuité, en 0 et a, avec
$\lim\limits_{x \longrightarrow 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow a^+} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x \longrightarrow 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow 0^+} \dfrac{3x^2}{a^3} = 0 = f(0)$, $\lim\limits_{x \longrightarrow a^-} f(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow a^-} \dfrac{3x^2}{a^3} = \dfrac{3}{a}$. f est donc en fait continue en $x = 0$ et admet un unique point de discontinuité, en lequel elle admet une limite à gauche et une limite à droite, toutes deux finies.
Enfin, f étant nulle en dehors de $[0, a]$, l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\ dx$ converge, et
$\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\ dx = \int_0^a f(x)\ dx = \int_0^a \frac{3x^2}{a^3}\ dx = \left[\frac{x^3}{a^3}\right]_0^a = 1.$
On peut alors conclure que f est une densité de probabilité.

2 Comme f est nulle en dehors de $[0, a]$, l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\ dx$ converge, et
$\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\ dx = \int_0^a x \times \frac{3x^2}{a^3}\ dx = \int_0^a \frac{3x^3}{a^3}\ dx = \left[\frac{3}{a^3}\frac{x^4}{4}\right]_0^a = \frac{3a}{4}.$
Ainsi X admet une espérance, et $E(X) = \dfrac{3a}{4}$.
De même, X^2 admet une espérance, et
$E\left(X^2\right) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\ dx = \int_0^a x^2 \times \frac{3x^2}{a^3}\ dx = \int_0^a \frac{3x^4}{a^3}\ dx = \left[\frac{3}{a^3}\frac{x^5}{5}\right]_0^a = \frac{3a^2}{5}.$
X admet alors une variance, et $V(X) = E\left(X^2\right) - E(X)^2 = \dfrac{3a^2}{5} - \left(\dfrac{3a}{4}\right)^2 = \dfrac{3a^2}{80}$ (après réduction).

3. Par définition de la notion de fonction de répartition, pour tout réel x, $F_X(x) = P([X \leq x])$, et X admettant f pour densité, $F_X(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f(t)\ dt$.
Si $x < 0$, f est nulle sur $]-\infty, x]$, donc $F_X(x) = 0$.
Si $0 \leq x \leq a$, f étant nulle sur $]-\infty, 0]$, donc sur $]-\infty, x]$, on a
$F_X(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\ dt = \int_0^x \frac{3t^2}{a^3}\ dt = \left[\frac{t^3}{a^3}\right]_0^x = \left(\frac{x}{a}\right)^3.$
En particulier, $F_X(a) = 1$; F_X étant croissante sur $\mathbb{R}$, et inférieure ou égale à 1, ceci entraîne que, si $x > a$, on a $F_X(x) = \displaystyle\int_0^a f(t)\ dt = 1$.

En résumé, $F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \left(\dfrac{x}{a}\right)^3 & \text{si } 0 \leq x \leq a \\ 1 & \text{si } x > a \end{cases}$

4. Pour tout entier $n \geq 2$, on pose $Y_n = \dfrac{4}{3n} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k$.

a) En utilisant la linéarité de l'espérance, on a $E(Y_n) = \dfrac{4}{3n} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} E(X_k)$. Comme, pour tout $k = 1, ..., n$, on a $E(X_k) = \dfrac{3a}{4}$, on a $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} E(X_k) = n \times \frac{3a}{4}$ (somme de n quantités, toutes égales à $\dfrac{3a}{4}$), d'où

$E\left(Y_n\right)=\dfrac{4}{3n}\times n\times\dfrac{3a}{4}=a.$
Comme $E\left(Y_n\right)=a$, Y_n est un estimateur sans biais de a.

b) On note $r_a\left(Y_n\right)$ le risque quadratique de l'estimateur Y_n.
Y_n étant un estimateur sans biais de a, son risque quadratique est égal à sa variance.
Donc $r_a\left(Y_n\right)=V\left(\dfrac{4}{3n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}X_k\right)=\dfrac{16}{9n^2}V\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n}X_k\right)$. les variables aléatoires X_1,..., X_n étant indépendantes, on a $V\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n}X_k\right)=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}V\left(X_k\right)=nV\left(X\right)=n\times\dfrac{3a^2}{80}$, d'où $r_a\left(Y_n\right)=\dfrac{16}{9n^2}\times n\times\dfrac{3a^2}{80}=\dfrac{a^2}{15n}$.

Donc $\displaystyle\lim_{n\longrightarrow+\infty}r_a\left(Y_n\right)=\lim_{n\longrightarrow+\infty}\dfrac{a^2}{15n}=0.$

c) L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, appliquée à Y_n en tenant compte de $E\left(Y_n\right)=a$ donne, pour tout $\varepsilon>0$, $P\left(\left[\left|Y_n-a\right|\geq\varepsilon\right]\right)\leq\dfrac{V\left(Y_n\right)}{\varepsilon^2}$.
En **b)**, on a vu en fait que $\displaystyle\lim_{n\longrightarrow+\infty}V\left(Y_n\right)=0.$
Donc : $\forall\varepsilon>0$, $\displaystyle\lim_{n\longrightarrow+\infty}P\left(\left[\left|Y_n-a\right|\geq\varepsilon\right]\right)=0.$

5. Pour tout entier $n\geq2$, on pose $Z_n=\max\left(X_1,X_2,...,X_n\right)$.

a) Pour tout x réel, on a $\left[Z_n\leq x\right]=\displaystyle\bigcap_{i=1}^{n}\left[X_i\leq x\right]$. Les variables aléatoires $X_1,...,\ X_n$ étant indépendantes, on a donc $H_n\left(x\right)=P\left(\left[Z_n\leq x\right]\right)=\displaystyle\prod_{i=1}^{n}P\left(\left[X_i\leq x\right]\right)$. $X_1,...,\ X_n$ suivent la même loi, de fonction de répartition F_X.

Donc $H_n\left(x\right)=\left(F_X\left(x\right)\right)^n$. Comme $F_X\left(x\right)=\begin{cases}0 & \text{si } x<0\\ \left(\dfrac{x}{a}\right)^3 & \text{si } 0\leq x\leq a\\ 1 & \text{si } x>a\end{cases}$, on a

$$H_n\left(x\right)=\begin{cases}0 & \text{si } x<0\\ \left(\dfrac{x}{a}\right)^{3n} & \text{si } 0\leq x\leq a\\ 1 & \text{si } x>a\end{cases}.$$

b) La fonction H_n est a priori dérivable sauf peut-être en 0 et en a, et $H_n'\left(x\right)=\begin{cases}0 & \text{si } x<0\\ \dfrac{3n}{a^{3n}}x^{3n-1} & \text{si } 0<x<a\\ 0 & \text{si } x>a\end{cases}.$

On obtient alors une densité h_n de Z_n en posant $h_n\left(x\right)=\begin{cases}0 & \text{si } x<0\\ \dfrac{3n}{a^{3n}}x^{3n-1} & \text{si } 0\leq x\leq a\\ 0 & \text{si } x>a\end{cases}$ (on pose $h_n\left(x\right)=H_n'\left(x\right)$ pour toute valeur de x pour laquelle H_n est assurément dérivable, et l'on donne à h_n des valeurs "arbitraires" en 0 et en a).

c) h_n est nulle en dehors de l'intervalle $[0,a]$. Donc l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}xh_n\left(x\right)\ dx$ converge, et
$\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}xh_n\left(x\right)\ dx=\int_0^a xh_n\left(x\right)\ dx=\int_0^a\dfrac{3n}{a^{3n}}x^{3n}\ dx=\left[\dfrac{3n}{a^{3n}}\times\dfrac{x^{3n+1}}{3n+1}\right]_0^a=\dfrac{3n}{3n+1}a.$
Donc $b_a\left(Z_n\right)=E\left(Z_n\right)-a=\dfrac{3n}{3n+1}a-a=-\dfrac{a}{3n+1}$.

d) On a, comme plus haut,
$E\left(Z_n^2\right)=\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}x^2h_n\left(x\right)\ dx=\int_0^a x^2h_n\left(x\right)\ dx=\int_0^a\dfrac{3n}{a^{3n}}x^{3n+1}\ dx=\left[\dfrac{3n}{a^{3n}}\times\dfrac{x^{3n+2}}{3n+2}\right]_0^a=\dfrac{3n}{3n+2}a^2.$

Donc Z_n admet une variance, avec :
$V(Z_n) = E\left(Z_n^2\right) - E(Z_n)^2 = \dfrac{3n}{3n+2}a^2 - \left(\dfrac{3n}{3n+1}a\right)^2 = \dfrac{3na^2}{(3n+1)^2(3n+2)}$.
On en déduit que $r_a(Z_n) = V(Z_n) + (b_a(Z_n))^2 = \dfrac{3na^2}{(3n+1)^2(3n+2)} + \left(-\dfrac{a}{3n+1}\right)^2 = \dfrac{2a^2}{(3n+1)(3n+2)}$.
On a donc $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} r_a(Z_n) = \lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} \dfrac{2a^2}{(3n+1)(3n+2)} = \lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} \dfrac{2a^2}{3n\times 3n} = 0$.

Remarque : on a trouvé $r_a(Y_n) = \dfrac{a^2}{15n}$ et $r_a(Z_n) = \dfrac{2a^2}{(3n+1)(3n+2)}$. Les deux risques quadratiques tendent vers 0 quand n tend vers l'infini.
Cependant, on a $\dfrac{r_a(Z_n)}{r_a(Y_n)} = \dfrac{30n}{(3n+1)(3n+2)}$, donc
$\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} \dfrac{r_a(Z_n)}{r_a(Y_n)} = \lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} \dfrac{30n}{(3n+1)(3n+2)} = \lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} \dfrac{30n}{9n^2} = \lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} \dfrac{10}{3n} = 0$. $r_a(Z_n)$ tend vers 0 "plus vite" que $r_a(Y_n)$, ce qui constitue, bien que Y_n soit "sans biais" un critère de "meilleur choix" en faveur de Z_n.

6. Soit θ un réel vérifiant $0 < \theta < a$.

a) On a $[|Z_n - a| \geq \theta] = ([|Z_n - a| \geq \theta] \cap [Z_n - a \geq 0]) \cup ([|Z_n - a| \geq \theta] \cap [Z_n - a \leq 0])$.
Lorsque $Z_n - a \geq 0$, on a $|Z_n - a| = Z_n - a$, donc $([|Z_n - a| \geq \theta] \cap [Z_n - a \geq 0]) = [Z_n - a \geq \theta]$;
lorsque $Z_n - a \leq 0$, on a $|Z_n - a| = -(Z_n - a)$, donc
$([|Z_n - a| \geq \theta] \cap [Z_n - a \leq 0]) = ([-(Z_n - a) \geq \theta] \cap [Z_n - a \leq 0]) = [Z_n - a \leq -\theta]$.
En résumé $[|Z_n - a| \geq \theta] = [Z_n - a \geq \theta] \cup [Z_n - a \leq -\theta]$.

b) Les événements $[Z_n - a \geq \theta]$ et $[Z_n - a \leq -\theta]$ sont incompatibles (car $\theta > 0$). Donc
$P([|Z_n - a| \geq \theta]) = P([Z_n - a \geq \theta]) + P([Z_n - a \leq -\theta])$
On a $P([Z_n - a \geq \theta]) = 1 - P([Z_n - a < \theta]) = 1 - P([Z_n - a \leq \theta])$ car Z_n est une variable aléatoire à densité.
Comme $P([Z_n - a \leq \theta]) = P([Z_n \leq a + \theta]) = H_n(a + \theta)$, on a $P([Z_n - a \geq \theta]) = 1 - H_n(a + \theta)$.
D'autre part, $P([Z_n - a \leq -\theta]) = P([Z_n \leq a - \theta]) = H_n(a - \theta)$.
Finalement, $P([|Z_n - a| \geq \theta]) = 1 - H_n(a + \theta) + H_n(a - \theta)$.

c) En **5.a)** on a montré que $H_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \left(\dfrac{x}{a}\right)^{3n} & \text{si } 0 \leq x \leq a \\ 1 & \text{si } x > a \end{cases}$.

Comme $0 < \theta < a$, on a aussi $0 < a - \theta < a$, donc $H_n(a - \theta) = \left(\dfrac{a-\theta}{a}\right)^{3n}$.
De plus $a + \theta > a$, donc $H_n(a + \theta) = 1$.
Il en résulte que $P([|Z_n - a| \geq \theta]) = \left(\dfrac{a-\theta}{a}\right)^{3n}$. Comme $0 < a - \theta < a$, on a $0 < \dfrac{a-\theta}{a} < 1$, d'où
$\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} \left(\dfrac{a-\theta}{a}\right)^{3n} = 0$. Ainsi $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} P([|Z_n - a| \geq \theta]) = 0$.

EXERCICE 4

Une puce se déplace sur un axe gradué. À l'instant 0, la puce se trouve sur le point d'abscisse 0.
À partir de l'instant 0, la puce effectue à chaque instant, un saut vers la droite selon le protocole suivant :

- elle effectue un saut d'une unité vers la droite avec la probabilité $\dfrac{1}{2}$;
- elle effectue un saut de deux unités vers la droite avec la probabilité $\dfrac{1}{4}$;
- elle effectue un saut de trois unités vers la droite avec la probabilité $\dfrac{1}{4}$.

Les différents sauts sont supposés indépendants.
Pour tout entier $n \geq 1$, on définit les variables aléatoires suivantes :
• X_n est égale au nombre de sauts d'une unité effectués lors des n premiers sauts ;
• Y_n est égale au nombre de sauts de deux unités effectués lors des n premiers sauts ;
• Z_n est égale au nombre de sauts de trois unités effectués lors des n premiers sauts ;
• A_n est égale à l'abscisse du point occupé par la puce à l'issue de son n-ième saut.

1. Il est clair que que $A_1(\Omega) = \{1, 2, 3\}$, les différentes données figurant de manière explicite dans l'énoncé : $P([A_1 = 1]) = \frac{1}{2}$ (c'est la probabilité que la puce effectue un saut d'une unité vers la droite), $P([A_1 = 2]) = \frac{1}{4}$ (c'est la probabilité que la puce effectue un saut de deux unités vers la droite), $P([A_1 = 3]) = \frac{1}{4}$ (c'est la probabilité que la puce effectue un saut de trois unités vers la droite).
On en déduit que :
$$\begin{aligned} E(A_1) &= 1 \times P([A_1 = 1]) + 2 \times P([A_1 = 2]) + 3 \times P([A_1 = 3]) \\ &= 1 \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{4} + 3 \times \frac{1}{4} = \frac{7}{4} \end{aligned}$$
puis
$$\begin{aligned} E\left(A_1^2\right) &= 1^2 \times P([A_1 = 1]) + 2^2 \times P([A_1 = 2]) + 3^2 \times P([A_1 = 3]) \\ &= 1 \times \frac{1}{2} + 4 \times \frac{1}{4} + 9 \times \frac{1}{4} = \frac{15}{4} \end{aligned}$$
dont on déduit, par la formule de Koenig-Huygens, $V(A_1) = E\left(A_1^2\right) - E(A_1)^2 = \frac{15}{4} - \left(\frac{7}{4}\right)^2 = \frac{11}{16}$.

2.a) A_2 est égale à l'abscisse du point occupé par la puce à l'issue de son deuxième saut. À chaque saut, la puce effectue, au minimum un saut, donc $A_2 \geq 2$, et au maximum trois sauts, donc $A_2 \leq 2 \times 3 = 6$.
Ainsi $A_2(\Omega) \subset [\![2, 6]\!]$.
· l'événement $[A_2 = 2]$ est réalisé par $[X_2 = 2]$ (deux sauts d'une unité lors des deux premiers sauts) ;
· l'événement $[A_2 = 3]$ est réalisé par exemple par $[X_2 = 1] \cap [Y_2 = 1]$ (un saut d'une unité et un saut de deux unités lors des deux premiers sauts) ;
· l'événement $[A_2 = 4]$ est réalisé par exemple par $[Y_2 = 2]$ (deux sauts de deux unités lors des deux premiers sauts) ;
· l'événement $[A_2 = 5]$ est réalisé par $[Y_2 = 1] \cap [Z_2 = 1]$ (un saut de deux unités, et un saut de trois unités lors des deux premiers sauts);
· l'événement $[A_2 = 6]$ est réalisé par $[Z_2 = 2]$ (deux sauts de trois unités lors des deux premiers sauts).
On a donc, en fait $A_2(\Omega) = [\![2, 6]\!]$.
Si l'on note D_1 (respectivement D_2, respectivement D_3), l'événement "lors du deuxième saut, la puce a effctué un saut d'une (respectivement de deux, respectivement de trois) unités, on a :
$P(D_1) = \frac{1}{2}$, $P(D_2) = P(D_3) = \frac{1}{4}$ (ce sont les données de l'énoncé). D'autre part :
· $[A_2 = 2] = [X_1 = 1] \cap D_1$ (un saut d'une unité lors du premier saut, suivi d'un saut d'une unité lors du deuxième saut). Les sauts étant supposés indépendants, on a $P([A_2 = 2]) = P([X_1 = 1]) P(D_1) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$.
· $[A_2 = 3] = ([X_1 = 1] \cap D_2) \cup ([Y_1 = 1] \cap D_1)$ (un saut d'une unité lors du premier saut, suivi d'un saut de deux unités lors du deuxième saut, ou bien un saut de deux unités lors du premier saut, suivi d'un saut d'une unité lors du deuxième saut). Par incompatibilité (par exemple parce que D_1et D_2 sont incompatibles), $P([A_2 = 3]) = P([X_1 = 1] \cap D_2) + P([Y_1 = 1] \cap D_1)$. Les sauts étant supposés indépendants, on a $P([X_1 = 1] \cap D_2) = P([X_1 = 1]) P(D_2) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$, et
$P([Y_1 = 1] \cap D_1) = P([Y_1 = 1]) P(D_1) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$, d'où $P([A_2 = 3]) = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{4}$.
· $[A_2 = 4] = ([X_1 = 1] \cap D_3) \cup ([Y_1 = 1] \cap D_2) \cup ([Z_1 = 1] \cap D_1)$ (un saut d'une unité lors du premier saut, suivi d'un saut de trois unités lors du deuxième saut, ou bien deux sauts de deux unités, ou bien un saut de trois unités lors du premier saut, suivi d'un saut d'une unité lors du deuxième saut). Les événements $([X_1 = 1] \cap D_3)$, $([Y_1 = 1] \cap D_2)$ et $([Z_1 = 1] \cap D_1)$ étant deux à deux incompatibles, on a $P([A_2 = 4]) = P([X_1 = 1] \cap D_3) + P([Y_1 = 1] \cap D_2) + P([Z_1 = 1] \cap D_1)$. Les sauts étant supposés

indépendants, on a $P([X_1=1]\cap D_3)=P([X_1=1])\,P(D_3)=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{8}$,
$P([Y_1=1]\cap D_2)=P([Y_1=1])\,P(D_2)=\dfrac{1}{4}\times\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{16}$, et
$P([Z_1=1]\cap D_1)=P([Z_1=1])\,P(D_1)=\dfrac{1}{4}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{8}$, d'où $P([A_2=4])=\dfrac{1}{8}+\dfrac{1}{16}+\dfrac{1}{8}=\dfrac{5}{16}$.
· $[A_2=5]=([Z_1=1]\cap D_2)\cup([Y_1=1]\cap D_3)$ (un saut de trois unités lors du premier saut, suivi d'un saut de deux unités lors du deuxième saut, ou bien un saut de deux unités lors du premier saut, suivi d'un saut de trois unités lors du deuxième saut). Par incompatibilité $P([A_2=5])=P([Z_1=1]\cap D_2)+P([Y_1=1]\cap D_3)$. Les sauts étant supposés indépendants, on a $P([Z_1=1]\cap D_2)=P([Z_1=1])\,P(D_2)=\dfrac{1}{4}\times\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{16}$, et
$P([Y_1=1]\cap D_3)=P([Y_1=1])\,P(D_3)=\dfrac{1}{4}\times\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{16}$, d'où $P([A_2=5])=\dfrac{1}{16}+\dfrac{1}{16}=\dfrac{1}{8}$
· $[A_2=6]=[Z_1=1]\cap D_3$ (deux sauts de trois unités). Les sauts étant supposés indépendants, on a $P([A_2=6])=P([Z_1=1])\,P(D_3)=\dfrac{1}{4}\times\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{16}$. En résumé,

$$P([A_2=2])=\frac{1}{4},\ P([A_2=3])=\frac{1}{4},\ P([A_2=4])=\frac{5}{16},\ P([A_2=5])=\frac{1}{8},\ P([A_2=6])=\frac{1}{16}.$$

b) On a

$$\begin{aligned}E(A_2)&=2\times P([A_2=2])+3\times P([A_2=3])+4\times P([A_2=4])+5\times P([A_2=5])+6\times P([A_2=6])\\&=2\times\frac{1}{4}+3\times\frac{1}{4}+4\times\frac{5}{16}+5\times\frac{1}{8}+6\times\frac{1}{16}\\&=\frac{7}{2}\end{aligned}$$

3.a) La loi du couple (A_2,Z_2) est donnée dans le tableau suivant :

Z_2 \ A_2	2	3	4	5	6
0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{16}$	0	0
1	0	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	0
2	0	0	0	0	$\frac{1}{16}$

Commentaires : par exemple, comme Z_2 est le nombre de sauts (vers la droite) de trois unités après deux sauts, et A_2 l'abscisse atteint par la puce après ces deux sauts , on a $A_2\geq 3Z_2$, ce qui donne, d'un coup,
$P([A_2=k]\cap[Z_2=2])=0$ pour tout $k\in\{2,3,4,5\}$ et $P([A_2=2]\cap[Z_2=1])=0$.
On a aussi (autre exemple) $[A_2=2]\subset[Z_2=0]$ ($A_2=2$ *entraîne* $Z_2=0$), donc $[A_2=2]\cap[Z_2=0]=[A_2=2]$, ce qui donne $P([A_2=2]\cap[Z_2=0])=P([A_2=2])=\dfrac{1}{4}$.
Les autres cas se traitent de manière analogue.

On récupère la loi de Z_2 en additionnant les quantités figurant dans les lignes du tableau ci-dessus :

Z_2 \ A_2	2	3	4	5	6	loi de Z_2
0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{16}$	0	0	$\frac{9}{16}$
1	0	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	0	$\frac{3}{8}$
2	0	0	0	0	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$

En résumé, $Z_2(\Omega) = \{0, 1, 2\}$, et

$$P([Z_2 = 0]) = \frac{9}{16},\ P([Z_2 = 1]) = \frac{3}{8},\ P([Z_2 = 2]) = \frac{1}{16}.$$

On en déduit :
$E(Z_2) = 0 \times P([Z_2 = 0]) + 1 \times P([Z_2 = 1]) + 2 \times P([Z_2 = 2]) = \frac{3}{8} + 2 \times \frac{1}{16} = \frac{1}{2}$.

b) Pour calculer la covariance $Cov(A_2, Z_2)$ de A_2 et Z_2, on utilise la formule
$Cov(A_2, Z_2) = E(A_2 Z_2) - E(A_2) E(Z_2)$. On sait déjà que $E(A_2) = \frac{7}{2}$ et $E(Z_2) = \frac{1}{2}$.
On calcule $E(A_2 Z_2)$ s'obtient comme étant la somme des 15 quantités $i \times j \times P([A_2 = i] \cap [Z_2 = j])$, pour $i \in \{2, 3, 4, 5, 6\}$, et $j \in \{0, 1, 2\}$.
En fait, un rapide coup d'oeil au tableau de la loi du couple (A_2, Z_2) montre que seules trois de ces 15 quantités ne sont pas nulles, et qu'on a :

$$\begin{aligned} E(A_2 Z_2) &= 4 \times 1 \times P([A_2 = 4] \cap [Z_2 = 1]) + 5 \times 1 \times P([A_2 = 5] \cap [Z_2 = 1]) + \ldots \\ &\qquad \ldots + 6 \times 2 \times P([A_2 = 6] \cap [Z_2 = 2]) \\ &= 4 \times \frac{1}{4} + 5 \times \frac{1}{8} + 12 \times \frac{1}{16} = \frac{19}{8}. \end{aligned}$$

Il en résulte que $Cov(A_2, Z_2) = \frac{19}{8} - \frac{7}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{5}{8}$.
Si les variables aléatoires A_2 et Z_2 étaient indépendantes, leur covariance serait nulle. Puisque $Cov(A_2, Z_2) \neq 0$, A_2 et Z_2 ne sont pas indépendantes (*remarque* : si l'on avait trouvé $Cov(A_2, Z_2) = 0$, aucune conclusion immédiate n'aurait été possible).

4. Le programme suivant simule les 100 premiers déplacements de la puce.

```
zeros(1,100)
for k=1:100
      t=grand(1,1,'uin',1,4)
      if t<=2 then A(k)=1
      end
      if t==3 then A(k)=2
      end
      if t==4 then A(k)=3
      end
end
disp(A)
```

Commentaires : `t<=2` est réalisé avec la probabilité $\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$, la puce se déplace alors d'une unité vers la droite ; `t==3` est réalisé avec la probabilité $\frac{1}{4}$, la puce se déplace alors de deux unités vers la droite ; t==4 est réalisé avec la probabilté $\frac{1}{4}$, la puce se déplace alors de trois unités vers la droite.

5. À chacun des sauts, effectuer, ou pas, un saut d'une unité vers la droite constitue une épreuve de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$. Ces épreuves sont supposées indépendantes par l'énoncé ("*Les différents sauts sont supposés indépendants*") . Le nombre de sauts d'une unité au cours de n sauts, c'est-à-dire X_n, suit donc la loi binomiale $\mathcal{B}\left(n,\frac{1}{2}\right)$.
De même, à chacun des sauts, effectuer, ou pas, un saut de deux unités vers la droite constitue une épreuve de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{4}$, ces épreuves étant supposées indépendantes. Le nombre de sauts de deux unités au cours de n sauts, c'est-à-dire Y_n, suit donc la loi binomiale $\mathcal{B}\left(n,\frac{1}{4}\right)$.
Enfin, et de même Z_n suit la loi binomiale $\mathcal{B}\left(n,\frac{1}{4}\right)$.
À chacun des sauts, effectuer, ou pas, un saut d'une, ou de deux unités vers la droite constitue une épreuve de Bernoulli, de paramètre $\frac{3}{4}$, égal à la somme des probabilités d'effectuer un saut d'une unité ($\frac{1}{2}$), et d'effectuer un saut de deux unités ($\frac{1}{4}$). Là encore ces épreuves sont supposées indépendantes. Le nombre de sauts d'une unité ou de deux unités, c'est-à-dire X_n+Y_n, suit donc la loi binomiale $\mathcal{B}\left(n,\frac{3}{4}\right)$.

6.a) La relation $X_n+Y_n+Z_n=n$ signifie simplement que la somme X_n du nombre de sauts d'une unité, du nombre Y_n de sauts de deux unités, et du nombre Z_n de sauts de trois unités, est égale au nombre total de sauts, c'est-à-dire n.
On en déduit que $Z_n=n-(X_n+Y_n)$, d'où $Cov\left(Z_n,X_n+Y_n\right)=Cov\left(n-(X_n+Y_n),X_n+Y_n\right)=-Cov\left(X_n+Y_n,X_n+Y_n\right)$ (*rappel :* si X et Y sont deux variables aléatoires, on a, pour tous réels a et b , $Cov\left(aX+b,Y\right)=aCov\left(X,Y\right)$).
Comme $Cov\left(X_n+Y_n,X_n+Y_n\right)=V\left(X_n+Y_n\right)=n\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{4}=\frac{3n}{16}$ (en appliquant la formule qui donne la variance d'une loi binomiale), on a finalement $Cov\left(Z_n,X_n+Y_n\right)=-\frac{3n}{16}$.

b) On sait que X_n suit la loi binomiale $\mathcal{B}\left(n,\frac{1}{2}\right)$, donc $V\left(X_n\right)=n\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{n}{4}$;
de même, Y_n suit la loi binomiale $\mathcal{B}\left(n,\frac{1}{4}\right)$, donc $V\left(Y_n\right)=n\times\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}=\frac{3n}{16}$;
de même, X_n+Y_n suit la loi binomiale $\mathcal{B}\left(n,\frac{3}{4}\right)$, donc $V\left(X_n+Y_n\right)=n\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{4}=\frac{3n}{16}$.
De plus, on sait que $V\left(X_n+Y_n\right)=V\left(X_n\right)+2Cov\left(X_n,Y_n\right)+V\left(Y_n\right)$.
On a donc $\frac{3n}{16}=\frac{n}{4}+2Cov\left(X_n,Y_n\right)+\frac{3n}{16}$, et il en résulte que $Cov\left(X_n,Y_n\right)=-\frac{n}{8}$.
c) Comme X_n et Y_n ont des variances non nulles, on peut définir leur coefficient de corrélation linéaire $\rho\left(X_n,Y_n\right)$ par $\rho\left(X_n,Y_n\right)=\frac{Cov\left(X_n,Y_n\right)}{\sqrt{V\left(X_n\right)}\sqrt{V\left(Y_n\right)}}$. Donc $\rho\left(X_n,Y_n\right)=\frac{-\frac{n}{8}}{\sqrt{\frac{n}{4}}\sqrt{\frac{3n}{16}}}=-\frac{1}{3}\sqrt{3}$.

7.a) Lors des n sauts, la puce a effectué :
. X_n sauts d'une unité, qui ont contribué à augmenter son abscisse A_n de X_n unités ;
. Y_n sauts de deux unités, qui ont contribué à augmenter son abscisse A_n de $2Y_n$ unités ;
. Z_n sauts de trois unités, qui ont contribué à augmenter son abscisse A_n de $3Z_n$ unités.
On a donc $A_n=X_n+2Y_n+3Z_n$.
Il en résulte (linéarité de l'espérance) que $E\left(A_n\right)=E\left(X_n\right)+2E\left(Y_n\right)+3E\left(Z_n\right)$.

Comme X_n suit la loi binomiale $\mathcal{B}\left(n, \frac{1}{2}\right)$, on a $E\left(X_n\right) = \frac{n}{2}$;
comme Y_n suit la loi binomiale $\mathcal{B}\left(n, \frac{1}{4}\right)$, on a $E\left(Y_n\right) = \frac{n}{4}$;
comme Z_n suit la loi binomiale $\mathcal{B}\left(n, \frac{1}{4}\right)$, on a $E\left(Z_n\right) = \frac{n}{4}$.
Donc $E\left(A_n\right) = \frac{n}{2} + 2 \times \frac{n}{4} + 3 \times \frac{n}{4} = \frac{7n}{4}$.

b) Puisque $Z_n = n - \left(X_n + Y_n\right)$, la formule $A_n = X_n + 2Y_n + 3Z_n$ donne
$A_n = X_n + 2Y_n + 3n - 3\left(X_n + Y_n\right) = 3n - \left(2X_n + Y_n\right)$.
On en déduit $V\left(A_n\right) = V\left(3n - \left(2X_n + Y_n\right)\right) = V\left(2X_n + Y_n\right)$ (*rappel :* si X est une variable aléatoire, pour tous réels a et b, on a $V\left(aX + b\right) = a^2 V\left(X\right)$; appliquer à $b = 3n$, $a = -1$, $X = 2X_n + Y_n$).
Donc $V\left(A_n\right) = V\left(2X_n\right) + 2Cov\left(2X_n, Y_n\right) + V\left(Y_n\right) = 4V\left(X_n\right) + 4Cov\left(X_n, Y_n\right) + V\left(Y_n\right)$.
Comme $V\left(X_n\right) = \frac{n}{4}$, $V\left(Y_n\right) = \frac{3n}{16}$, et $Cov\left(X_n, Y_n\right) = -\frac{n}{8}$, on a
$V\left(A_n\right) = 4 \times \frac{n}{4} + 4 \times \left(-\frac{n}{8}\right) + \frac{3n}{16} = \frac{11}{16}n$.

Remarque : en **1.** on a trouvé $V\left(A_1\right) = \frac{11}{16}$, valeur en accord avec $V\left(A_n\right) = \frac{11}{16}n$.

On a $Cov\left(A_n, X_n\right) = Cov\left(3n - \left(2X_n + Y_n\right), X_n\right) = -2Cov\left(X_n, X_n\right) - Cov\left(Y_n, X_n\right)$.
Comme $Cov\left(X_n, X_n\right) = V\left(X_n\right) = \frac{n}{4}$, et $Cov\left(Y_n, X_n\right) = Cov\left(X_n, Y_n\right) = -\frac{n}{8}$, on a
$Cov\left(A_n, X_n\right) = -2 \times \frac{n}{4} - \left(-\frac{n}{8}\right) = -\frac{3n}{8}$.

8. A est un vecteur-ligne à 100 composantes. La commande `y=cumsum(A)` crée un vecteur-ligne $\left(y_1, y_2, ..., y_{100}\right)$ tel que $y_k = \sum_{i=1}^{k} A\left(i\right)$, $A\left(i\right)$ représentant le i-ème déplacement de la puce. Donc y_i est l'abscisse de la puce après le i-ème saut.
Les commandes :

```
x=1:100
y=cumsum(A)
plot2d(x,y)
```

induisent la création d'une ligne brisée représentant le déplacement de la puce lors des 100 premiers sauts, l'abscisse figurant le numéro du saut, et l'ordonnée figurant l'abscisse du point occupé par la puce à l'issue de son n-ième saut.