Fichier extrait du document

Ecricome & BCE 2015 : sujets et corrigés de Mathématiques, option T

Informations générales

Type : Concours, Sujets
Classe(s) : CPGE ECT 2
Matières : Mathématiques
Mots clés : corrigé math, corrigé 2015

Les fichiers du document 1541

- BCE 2015 - ESCP - Mathématiques et corrigé, option T
- BCE 2015 - ESC - Mathématiques et corrigé, option T
- Ecricome 2015 et corrigé

Le contributeur **mesrevisions** précise : Sujets et corrigés des épreuves 2015 des banques BCE (ESCP, ESC) et Ecricome en Math, prépa Eco option T. Merci à Studyrama et Ecricome pour leurs partages.

Série Annales

ISC PARIS BUSINESS SCHOOL

2015 > 2016

ANNALES OFFICIELLES 2015
BANQUE COMMUNE D'ÉPREUVES CCIR CORRIGÉES

Studyrama GRANDES ECOLES .com

Le mot ESPACE PRÉPAS

Nous fêtons cette année la 21e édition des Annales de la Banque Commune d'Épreuves (BCE), publiée avec le soutien de l'ISC Paris. Un ouvrage de plus ajoutant du poids à la pile de ceux qui accompagnent les candidats aux concours d'entrée des Grandes Écoles de management ? Pas vraiment. N'en déplaise à ceux qui désespèrent de voir s'allonger la liste des titres de référence en même temps que diminue le nombre de jours jusqu'aux premières épreuves écrites ; ces annales sont incontournables. Elles vous servent à accomplir l'exercice le plus important de votre préparation : l'anticipation, la mise en condition.

Il est essentiel de très bien connaître le programme dans chaque matière, mais au moins aussi important de prendre connaissance des sujets tombés l'année dernière, voire les années précédentes encore, afin de vous familiariser aux formulations et aux contraintes de chaque épreuve, dont les professeurs ne manquent par ailleurs certainement pas de vous parler. Vous disposez ici d'un panel de sujets tombés en 2015 que nous avons voulu le plus représentatif possible de la diversité et de l'exigence du concours. Des épreuves communes et d'autres réservées aux candidats des voies scientifique, économique et technologique ; des matières variées ; des fournisseurs différents. Tous les corrigés sont réalisés par des professeurs de classes préparatoires qui ne manquent pas, lorsque cela est nécessaire, de commenter le sujet et leurs propositions de correction. Pour une immersion maximale dans la préparation au concours, doublée d'une prise de recul bienvenue.

Tout comme peut l'être le magazine *Espace Prépas* qui accompagne depuis 30 ans les préparationnaires vers l'intégration dans les Grandes Écoles de management. Reportages sur les campus, décryptage des programmes et des stratégies d'écoles, zooms sur leurs spécificités, articles sur l'actualité de la filière (fusions, budgets, nouveaux statuts, etc.), dossiers d'histoire géographie et de culture générale, cartes de géopolitique, numéros « inscription » et SIGEM pour faciliter les choix, enquêtes sur l'avenir des prépas… Rien de ce que doit connaître un futur étudiant des meilleures *business schools* mondiales (revoyez le classement 2015 des *Masters in Management du Financial Times*) ne manque. Associée à la lecture de ce magazine et d'ouvrages complémentaires de préparation proposés par les éditions Studyama, l'étude des Annales de la Banque Commune d'Épreuves participe à une mise en train idéale pour la bonne conduite des épreuves écrites et avant de penser au tour de France des oraux…

Stéphanie Ouezman,
Rédactrice en chef d'*Espace Prépas.*

Pour lire *Espace Prépas*

MATHÉMATIQUES

DURÉE : 4 HEURES.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs. Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.
Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.
- L'épreuve est constituée de quatre exercices indépendants.
- La probabilité d'un événement B est notée P(B).

SUJET

EXERCICE 1

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ à valeurs réelles telle que : $f(x) = \int_1^x \frac{e^t}{t}\,dt$.

On ne cherchera pas à calculer l'intégrale qui définit $f(x)$.

1. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ à valeurs réelles telle que $g(t) = \frac{e^t}{t}$ et G une primitive de g sur $\mathbb{R}_+^*$.
   a) Pour tout réel $x > 0$, exprimer $f(x)$ à l'aide de la fonction G.
   b) Déduire de la question précédente que f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et pour tout réel $x > 0$, calculer $f'(x)$ où f' désigne la fonction dérivée de f.
   c) Calculer $f(1)$.

2.a) Établir pour tout réel $x \geqslant 1$, l'inégalité : $f(x) \geqslant e \times \ln x$.
   b) En déduire $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

3.a) Établir pour tout réel x de l'intervalle $]0,1]$, l'inégalité : $f(x) \leqslant e^x \times \ln x$.
   b) En déduire $\lim_{x\to 0^+} f(x)$.

4. Dresser le tableau de variation de f.

5. On note $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthogonal (unité 1 cm pour les abscisses et e cm pour les ordonnées). On rappelle que le nombre e est à peu près égal à 2,7.
   a) On note f'' la dérivée seconde de f. Pour tout réel $x > 0$, calculer $f''(x)$.
   b) Montrer que la courbe $(\mathcal{C})$ admet un point d'inflexion A et déterminer les coordonnées du point A.
   c) Écrire l'équation de la tangente $(\mathcal{T})$ à la courbe $(\mathcal{C})$ au point A.
   d) Tracer l'allure de la courbe $(\mathcal{C})$ en précisant la position relative de $(\mathcal{C})$ et $(\mathcal{T})$.

6.a) Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$, il existe un unique réel, noté u_n, vérifiant $\int_1^{u_n} \frac{e^t}{t}\,dt = n$.
   b) En utilisant les variations de la fonction f, montrer que la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est croissante.
   c) Déterminer $\lim_{n\to+\infty} u_n$.

EXERCICE 2

Pour tout couple (a, b) de $\mathbb{R}^2$, soit M la matrice carrée d'ordre 2 définie par : $M = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 1 & b \end{pmatrix}$.

1. Dans cette question, on choisit $a = b = -1$.

   a) La matrice M est-elle inversible ?

   b) Calculer pour tout entier $n \geqslant 2$, la matrice M^n.

2. Dans cette question, on choisit $a = b$.

   a) La matrice M est-elle inversible ?

   b) Montrer que pour tout entier $n \geqslant 2$, on a : $M^n = (1+a)^{n-1}M$.

3. On revient au cas général où a et b sont des réels quelconques.

   Montrer que la matrice M est inversible si et seulement si $a \neq b$.

4. Dans cette question, on considère deux variables aléatoires X et Y indépendantes et suivant toutes les deux la loi géométrique de paramètre p avec $0 < p < 1$. On pose : $q = 1 - p$.

   Soit N la matrice aléatoire définie par $N = \begin{pmatrix} 1 & X \\ 1 & Y \end{pmatrix}$ et A l'événement : « la matrice N est inversible ».

   a) Établir la relation : $P([X = Y]) = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} P([X = k]) \times P([Y = k])$.

   b) Calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} p^2 q^{2k-2}$.

   c) En déduire $P(A)$ en fonction de q.

5. Soit n un entier supérieur ou égal à 1.

   Dans cette question, on considère deux variables aléatoires X et Y indépendantes et suivant toutes les deux la loi binomiale de paramètres n et $\dfrac{1}{2}$.

   Soit N la matrice aléatoire définie par $N = \begin{pmatrix} 1 & X \\ 1 & Y \end{pmatrix}$ et A l'événement : « la matrice N est inversible ».

   a) Pour x réel, écrire les développements de $(x+1)^n$ et $(x+1)^{2n}$ à l'aide de la formule du binôme.

   b) En utilisant l'identité $(x+1)^{2n} = (x+1)^n(x+1)^n$, montrer que l'on a : $\dbinom{2n}{n} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{n}{n-k}$.

   c) En déduire la relation : $P([X = Y]) = \dfrac{1}{4^n}\dbinom{2n}{n}$.

   d) Calculer $P(A)$ en fonction de n.

EXERCICE 3

1. Soit T une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre 1.
   Donner sans calcul les valeurs de l'espérance $E(T)$ et de la variance $V(T)$ de la variable aléatoire T.

2. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs réelles telle que :

$$f(t) = \begin{cases} t\,\mathrm{e}^{-t} & \text{si } t \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases}.$$

   a) Montrer que f est une densité de probabilité d'une variable aléatoire X à densité.

   b) En utilisant la question 1, montrer que la variable aléatoire X admet une espérance et donner sa valeur.

3. Soit F la fonction de répartition de la variable aléatoire X.

   Montrer que l'on a : pour tout x réel, $F(x) = \begin{cases} 1-(x+1)\,\mathrm{e}^{-x} & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$.

Soit X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes et suivant toutes les deux la même loi que X.
Soit Z la variable aléatoire définie par $Z = \min(X_1, X_2)$.

4.a) Justifier que pour tout x réel, on a : $P([Z > x]) = P([X_1 > x]) \times P([X_2 > x])$.

   b) Déterminer la fonction de répartition H de la variable aléatoire Z.

   c) Montrer qu'une densité h de Z est donnée par : $h(x) = \begin{cases} 2\,x(x+1)\,\mathrm{e}^{-2x} & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$.

5. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs réelles telle que :

$$g(x) = -\left(x^3 + \frac{5}{2}x^2 + \frac{5}{2}x + \frac{5}{4}\right)\mathrm{e}^{-2x}.$$

   On note g' la fonction dérivée de la fonction g.

   a) Pour tout x réel, calculer $g'(x)$.

   b) En déduire que l'espérance $E(Z)$ de la variable aléatoire Z est égale à $\frac{5}{4}$.

6. Soit W la variable aléatoire définie par $W = \max(X_1, X_2)$.

   a) Exprimer la variable aléatoire $Z + W$ en fonction de X_1 et X_2.

   b) En déduire la valeur de l'espérance $E(W)$ de la variable aléatoire W.

   c) Exprimer la variable aléatoire $|X_1 - X_2|$ en fonction de Z et W.

   d) En déduire la valeur de l'espérance $E(|X_1 - X_2|)$ de la variable aléatoire $|X_1 - X_2|$.

EXERCICE 4

Soit M une matrice carrée d'ordre 3 et I la matrice unité d'ordre 3. On pose par convention : $M^0 = I$.

On se propose d'étudier la suite réelle $(u_n)_{n\geqslant 0}$ définie par :

$$u_0 = 0, u_1 = 0, u_2 = 1 \text{ et pour tout entier naturel } n,\ u_{n+3} = 2\,u_{n+2} - \frac{5}{4}\,u_{n+1} + \frac{1}{4}\,u_n\,.$$

Soit A la matrice carrée d'ordre 3 telle que $A = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 8 & -5 & 1 \\ 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}$ et pour tout entier naturel n, soit X_n la matrice à trois lignes et une colonne définie par : $X_n = \begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$.

1. Déterminer X_0 et X_1.

2.a) Justifier pour tout entier naturel n, l'égalité : $X_{n+1} = A\,X_n$.

b) À l'aide d'un raisonnement par récurrence, en déduire pour tout entier naturel n, la relation : $X_n = A^n X_0$.

3. Soit P, Q et T les matrices suivantes : $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} 16 & -16 & 4 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$ et $T = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Calculer le produit PQ. En déduire que la matrice P est inversible et déterminer sa matrice inverse P^{-1}.

b) Calculer les produits PT et AP. En déduire pour tout entier naturel n, l'égalité : $A^n = PT^nP^{-1}$.

4. Soit D la matrice définie par : $D = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. On pose : $N = T - D$.

a) Déterminer pour tout entier $k \geqslant 2$, la matrice N^k.

b) Vérifier que $DN = ND$ et montrer que pour tout entier naturel n, on a : $T^n = \left(\frac{1}{2}\right)^n \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

c) En déduire pour tout entier naturel n, l'expression de la matrice A^n.

5.a) Déduire des questions précédentes l'expression de u_n en fonction de n.

b) Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$.

CORRIGÉ

Par Bernard Delacampagne, professeur de mathématiques au lycée Madeleine-Michelis à Amiens.

EXERCICE 1

1.a. Par définition d'une intégrale, et puisque G est une primitive de g sur $\mathbb{R}_+^*$, on a, **pour tout réel strictement positif x** :

$$\mathbf{f(x)} = \int_1^x \frac{e^t}{t}dt = \int_1^x g(t)dt = \left[G(t)\right]_1^x \mathbf{= G(x) - G(1)}$$

b. G étant une primitive de g sur $\mathbb{R}_+^*$, G est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et on a :

$$G' = g$$

D'après l'expression de $f(x)$ trouvée à la question 1.a, f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, comme différence de la fonction dérivable G et de la fonction constante $x \mapsto G(1)$, dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, de dérivée nulle, et on a donc, **pour tout réel strictement positif x** :

$$\mathbf{f'(x)} = g(x) \mathbf{= \frac{e^x}{x}}$$

c. D'après la question 1.a, on a :

$$\mathbf{f(1)} = G(1) - G(1) \mathbf{= 0}$$

2.a. x étant un réel supérieur ou égal à 1, on a, par croissance de la fonction exponentielle sur $\mathbb{R}$:

$$\forall t \in [1, x] \quad e^t \geq e^1 = e$$

Il en résulte, par division par t, réel strictement positif, que :

$$\forall t \in [1, x] \quad \frac{e^t}{t} \geq \frac{e}{t}$$

En intégrant cette inégalité sur l'intervalle $[1, x]$, on obtient :

$$f(x) = \int_1^x \frac{e^t}{t}dt \geq \int_1^x \frac{e}{t}dt$$

Or, on a :

$$\int_1^x \frac{e}{t}dt = e\int_1^x \frac{1}{t}dt = e\left[\ln t\right]_1^x = e(\ln x - \ln 1) = e\ln x$$

On a bien montré que, **pour tout réel x supérieur ou égal à 1**, on a :

$$\mathbf{f(x) \geq e\ln x}$$

b. On a :

$$\lim_{x \to +\infty} e\ln x = +\infty \text{ car } \lim_{x \to +\infty} \ln x = +\infty \text{ et } e > 0$$

D'après l'inégalité de la question 2.a et un théorème de comparaison, on en déduit que :

$$\mathbf{\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty}$$

3.a. x étant un réel appartenant à $]0,1]$, on a, par croissance de la fonction exponentielle sur $\mathbb{R}$:

$$\forall t \in [x, 1] \quad e^x \leq e^t$$

Il en résulte, par division par t, réel strictement positif, que :

$$\forall t \in [x, 1] \quad \frac{e^x}{t} \leq \frac{e^t}{t}$$

En intégrant cette inégalité sur $\left[x,1\right]$, on obtient :

$$\int_x^1 \frac{e^x}{t}\,dt \leq \int_x^1 \frac{e^t}{t}\,dt$$

Or, on a :

$$\int_x^1 \frac{e^x}{t}\,dt = e^x \int_x^1 \frac{1}{t}\,dt = e^x \left[\ln t\right]_x^1 = e^x\left(\ln 1 - \ln x\right) = -e^x \ln x$$

Comme de plus $f\left(x\right) = \int_1^x \frac{e^t}{t}\,dt = -\int_x^1 \frac{e^t}{t}\,dt$, il vient, pour tout réel x appartenant à $\left]0,1\right]$:

$$-e^x \ln x \leq -f\left(x\right)$$

On a bien montré que, **pour tout réel x de l'intervalle** $\left]\mathbf{0,1}\right]$, on a :

$$\mathbf{f\left(x\right) \leq e^x \ln x}$$

b. On a :

$$\lim_{x\to 0^+} e^x \ln x = -\infty \text{ car } \lim_{x\to 0^+} e^x = 1 \text{ et } \lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$$

D'après l'inégalité de la question 3.a et un théorème de comparaison, on en déduit que :

$$\mathbf{\lim_{x\to 0^+} f\left(x\right) = -\infty}$$

4. D'après la question 1.b, on a, pour tout réel strictement positif x :

$$f'\left(x\right) = \frac{e^x}{x} > 0$$

Donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$; le tableau de variation de f est le suivant :

x	**0**	**+∞**
f'	‖	**+**
f	‖	**−∞** ↗ **+∞**

5.a. On a vu, à la question 1.b, que pour tout réel strictement positif x, on a :

$$f'\left(x\right) = \frac{e^x}{x}$$

Il en résulte que **pour tout réel strictement positif x**, on a :

$$\mathbf{f''\left(x\right) = \frac{xe^x - e^x}{x^2} = \frac{\left(x-1\right)e^x}{x^2}}$$

b. e^x et x^2 étant strictement positifs sur $\mathbb{R}_+^*$, $f''\left(x\right)$ est du signe de $x-1$ sur $\mathbb{R}_+^*$, et s'annule donc en changeant de signe en $x=1$. Donc **la courbe $\left(\mathbf{C}\right)$ admet un point d'inflexion A** d'abscisse 1 ; puisque $f\left(1\right)=0$ d'après la question 1.c, les coordonnées de A sont :

$$\mathbf{A\left(1,0\right)}$$

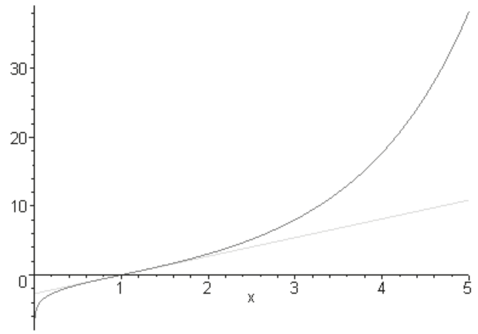
c. Une équation de la tangente $\left(\mathbf{T}\right)$ à $\left(\mathbf{C}\right)$ au point A est :

$$\mathbf{y} = f'\left(1\right)\left(x-1\right) + f\left(1\right) \mathbf{= e\left(x-1\right)}$$

d. D'après la question 5.b, f est concave sur $\left]0,1\right]$ et convexe sur $\left[1,+\infty\right[$, car $f'' \leq 0$ sur $\left]0,1\right]$

et $f'' \geq 0$ sur $[1,+\infty[$; donc (C) **est en dessous de** (T) **sur** $]0,1]$**, et** (C) **est au-dessus de** (T) **sur** $[1,+\infty[$.

L'allure de la courbe (C) est la suivante :



6.a. Remarquons que, pour tout entier naturel n, on a :

$$\int_1^{u_n} \frac{e^t}{t} dt = n \Leftrightarrow f(u_n) = n$$

f est continue $\mathbb{R}_+^*$ (car dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ d'après la question 1.b) et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$ (d'après la question 4), donc f réalise une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ sur $f(\mathbb{R}_+^*)$.

On a, d'après les questions 2.b et 3.b :

$$f(\mathbb{R}_+^*) = f(]0,+\infty[) = \left]\lim_{x\to 0^+} f(x), \lim_{x\to+\infty} f(x)\right[=]-\infty,+\infty[= \mathbb{R}$$

Pour tout entier naturel n, n appartient à $f(\mathbb{R}_+^*)$, donc **il existe un unique réel, noté** $\mathbf{u_n}$, **appartenant à** $\mathbb{R}_+^*$ **et vérifiant** $f(u_n) = n$, **c'est à dire** $\displaystyle\int_1^{u_n} \frac{e^t}{t} dt = n$.

b. Par définition de u_n, on a, pour tout entier naturel n :

$$f(u_n) = n < f(u_{n+1}) = n+1$$

Puisque f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$, il en résulte que, pour tout entier naturel n :

$$u_n < u_{n+1}$$

Donc **la suite** $(u_n)_{n\geq 0}$ **est (strictement) croissante**.

c. D'après la question 6.b, la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est croissante ; elle peut donc avoir une limite finie ℓ ou diverger vers $+\infty$.

Si la suite avait une limite finie ℓ, on aurait, puisque f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$:

$$\lim_{n\to+\infty} f(u_n) = f(\ell)$$

Soit encore, par définition de u_n, le résultat absurde :

$$\lim_{n\to+\infty} n = f(\ell)$$

On en déduit donc que :

$$\mathbf{\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty}$$

EXERCICE 2

1. Dans cette question, on choisit $a = b = -1$, donc on a :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

a. La transformation $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ transforme la matrice M en la matrice $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, qui est triangulaire avec un 0 sur la diagonale, donc la méthode du pivot de Gauss assure que la **matrice M n'est pas inversible**.

b. On a, en notant 0 la matrice carrée nulle d'ordre 2 :

$$M^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

Il vient donc, **pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2** :

$$\mathbf{M^n} = M^{n-2}M^2 = M^{n-2}0 \mathbf{= 0}$$

2. Dans cette question, on choisit $a = b$, donc on a :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 1 & a \end{pmatrix}$$

a. La même transformation $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ transforme la matrice M en la matrice $\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, qui est triangulaire avec un 0 sur la diagonale, donc la méthode du pivot de Gauss assure que la **matrice M n'est pas inversible**.

b. On a :

$$M^2 = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 1 & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & a \\ 1 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+a & a+a^2 \\ 1+a & a+a^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+a & a(1+a) \\ 1+a & a(1+a) \end{pmatrix} = (1+a)\begin{pmatrix} 1 & a \\ 1 & a \end{pmatrix} = (1+a)M$$

Montrons alors par récurrence la propriété P_n, définie pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, par :

$$M^n = (1+a)^{n-1} M$$

<u>Initialisation</u> :

P_2 est vraie car on a, d'après ce qui précède :

$$(1+a)^{2-1} M = (1+a)^1 M = (1+a) M = M^2$$

<u>Hérédité</u> :

On suppose P_n vraie, pour une valeur de l'entier naturel n, c'est-à-dire :

$$M^n = (1+a)^{n-1} M$$

On montre que P_{n+1} est vraie, c'est-à-dire :

$$M^{n+1} = (1+a)^n M$$

On a, d'après l'hypothèse de récurrence et l'égalité $M^2 = (1+a)M$:

$$M^{n+1} = M^n M = (1+a)^{n-1} MM = (1+a)^{n-1} M^2 = (1+a)^{n-1}(1+a)M = (1+a)^n M$$

Ceci assure que P_{n+1} est vraie.
D'après le principe de récurrence, on peut conclure que, **pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2**, on a :

$$\mathbf{M^n = (1+a)^{n-1} M}$$

3. La même transformation $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ transforme la matrice M en la matrice $\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & b-a \end{pmatrix}$, qui est triangulaire, donc la méthode du pivot de Gauss assure que la matrice M est inversible si et seulement si les termes diagonaux de la matrice $\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & b-a \end{pmatrix}$ sont non nuls.
Ainsi **la matrice M est-elle inversible si et seulement si $\mathbf{a \neq b}$**.

4.a. X et Y suivant toutes les deux une loi géométrique, on a :

$$X(\Omega) = Y(\Omega) = \mathbb{N}^*$$

On a donc :

$$[X = Y] = \bigcup_{k=1}^{+\infty}([X = k] \cap [Y = k])$$

Puisque les événements $[X = k] \cap [Y = k]$ sont deux à deux incompatibles, on a :

$$P([X = Y]) = \sum_{k=1}^{+\infty} P([X = k] \cap [Y = k])$$

Les variables aléatoires X et Y étant indépendantes, il vient enfin :

$$\mathbf{P([X = Y]) = \sum_{k=1}^{+\infty} P([X = k]) P([Y = k])}$$

b. La série $\sum_{k \geq 0} (q^2)^k$ est une série géométrique de raison q^2 avec $-1 < q^2 < 1$, donc cette série est convergente et on a :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} (q^2)^k = \frac{1}{1-q^2}$$

Il en résulte que la série $\sum_{k \geq 1} p^2 q^{2k-2}$ est convergente et qu'on a, par changement d'indice :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} p^2 q^{2k-2} = p^2 \sum_{k=1}^{+\infty} q^{2(k-1)} = p^2 \sum_{k=1}^{+\infty} (q^2)^{(k-1)} = p^2 \sum_{k=0}^{+\infty} (q^2)^k = \frac{p^2}{1-q^2} = \frac{p^2}{(1-q)(1+q)}$$

Puisque $q = 1 - p$, on a finalement :

$$\mathbf{\sum_{k=1}^{+\infty} p^2 q^{2k-2}} = \frac{p^2}{p(1+q)} = \mathbf{\frac{p}{1+q}}$$

c. D'après la question 3, N est inversible si et seulement si $X \neq Y$, donc on a :

$$A = \overline{[X = Y]}$$

Il en résulte, d'après la question 4.a, que :

$$P(A) = P\left(\overline{[X = Y]}\right) = 1 - P([X = Y]) = 1 - \sum_{k=1}^{+\infty} P([X = k]) P([Y = k])$$

X et Y suivant toutes les deux la loi géométrique de paramètre p, on a, pour tout entier naturel non nul k :

$$P([X=k])=P([Y=k])=pq^{k-1}$$

Donc :

$$P([X=k])P([Y=k])=\left(pq^{k-1}\right)^2=p^2q^{2(k-1)}$$

Il vient donc, d'après la question 4.b :

$$\mathbf{P(A)}=1-\sum_{k=1}^{+\infty}p^2q^{2k-2}=1-\frac{p}{1+q}=\frac{1+q-p}{1+q}=\frac{1+q-(1-q)}{1+q}=\mathbf{\frac{2q}{1+q}}$$

5.a. L'utilisation de la formule du binôme de Newton donne, **pour tout réel x et tout entier naturel n supérieur ou égal à 1** :

$$\mathbf{(x+1)^n}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k1^{n-k}=\boldsymbol{\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k}$$

Et, de même :

$$\boldsymbol{(x+1)^{2n}=\sum_{k=0}^{2n}\binom{2n}{k}x^k}$$

b. L'identité $(x+1)^{2n}=(x+1)^n(x+1)^n$ et les résultats de la question 5.a permettent d'écrire :

$$\sum_{k=0}^{2n}\binom{2n}{k}x^k=\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k\right)\left(\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}x^i\right)$$

$\binom{2n}{n}$ est le coefficient de x^n dans le polynôme $\sum_{k=0}^{2n}\binom{2n}{k}x^k$; dans le membre de droite de l'égalité ci-dessus, le terme de degré n est obtenu comme somme des termes $\binom{n}{k}x^k\binom{n}{i}x^i$ avec $k+i=n$, donc on a :

$$\boldsymbol{\binom{2n}{n}}=\sum_{k+i=n}\binom{n}{k}\binom{n}{i}=\boldsymbol{\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\binom{n}{n-k}}$$

c. X et Y suivant toutes les deux une binomiale de paramètres n et $\frac{1}{2}$, on a:

$$X(\Omega)=Y(\Omega)=[\![0,n]\!]$$

On a donc :

$$[X=Y]=\bigcup_{k=0}^{n}([X=k]\cap[Y=k])$$

Puisque les événements $[X=k]\cap[Y=k]$ sont deux à deux incompatibles, on a :

$$P([X=Y])=\sum_{k=0}^{n}P([X=k]\cap[Y=k])$$

Les variables aléatoires X et Y étant indépendantes, il vient enfin :

$$P([X=Y])=\sum_{k=0}^{n}P([X=k])P([Y=k])$$

X et Y suivant toutes les deux la loi binomiale de paramètres n et $\frac{1}{2}$, on a, pour tout entier naturel k de $[\![0,n]\!]$:

$$P([X=k])=P([Y=k])=\binom{n}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k\left(1-\frac{1}{2}\right)^{n-k}=\binom{n}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k\left(\frac{1}{2}\right)^{n-k}=\binom{n}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

Donc :

$$P([X=k])P([Y=k])=\left(\binom{n}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)^2=\binom{n}{k}^2\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}=\frac{1}{2^{2n}}\binom{n}{k}^2=\frac{1}{4^n}\binom{n}{k}^2$$

Il en résulte, d'après la question 5.b, que :

$$\mathbf{P([X=Y])}=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{4^n}\binom{n}{k}^2=\frac{1}{4^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2=\frac{1}{4^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\binom{n}{n-k}=\mathbf{\frac{1}{4^n}\binom{2n}{n}}$$

d. Comme dans la question 4.c, et en utilisant le résultat de la question 5.c, on obtient :

$$\mathbf{P(A)}=1-P([X=Y])=\mathbf{1-\frac{1}{4^n}\binom{2n}{n}}$$

EXERCICE 3

1. T étant une variable aléatoire qui suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda=1$, les valeurs de l'espérance $E(T)$ et de la variance $V(T)$ de la variable aléatoire T sont respectivement :

$$\mathbf{E(T)}=\frac{1}{\lambda}\mathbf{=1}\ \text{ et }\ \mathbf{V(T)}=\frac{1}{\lambda^2}\mathbf{=1}$$

2.a. f est continue sur $]-\infty,0[$ comme fonction nulle, et continue sur $[0,+\infty[$ comme produit et composée de fonctions continues ; on a :

$$\lim_{x\to0^-}f(t)=\lim_{x\to0^-}0=0\ \text{ et }\ \lim_{x\to0^+}f(t)=\lim_{x\to0^+}te^{-t}=0=f(0)$$

Puisque $\lim_{x\to0^-}f(t)=\lim_{x\to0^+}f(t)=f(0)$, f est continue en 0, donc f est continue sur $\mathbb{R}$.

Pour tout réel positif ou nul t, on a :

$$f(t)=te^{-t}\geq0$$

Pour tout réel strictement négatif t, on a :

$$f(t)=0\geq0$$

Donc f est positive ou nulle sur $\mathbb{R}$.

Une densité d de la variable aléatoire T de la question 1 est définie par :

$$d(t)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda t}=e^{-t} & \text{si } t\geq0\\ 0 & \text{si } t<0\end{cases}$$

On sait que $\int_{-\infty}^{0}f(x)dx$ converge car :

$$\int_{-\infty}^{0}f(x)dx=\int_{-\infty}^{0}0dx=0$$

$\int_{0}^{+\infty}f(x)dx$ converge car, d'après la question 1 :

$$\int_{0}^{+\infty}f(x)dx=\int_{0}^{+\infty}xe^{-x}dx=\int_{0}^{+\infty}xd(x)dx=E(T)=1$$

Donc $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx$ converge et on a :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{+\infty} f(x)dx = 0+1=1$$

Donc **f est bien une densité de probabilité**.

b. La variable aléatoire X admet une espérance si et seulement si $\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$ converge, et dans ce cas, on a :

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$$

On sait que $\int_{-\infty}^{0} xf(x)dx$ converge car :

$$\int_{-\infty}^{0} xf(x)dx = \int_{-\infty}^{0} 0dx = 0$$

$\int_{0}^{+\infty} xf(x)dx$ converge car, d'après la question 1 et la formule de Koënig :

$$\int_{0}^{+\infty} xf(x)dx = \int_{0}^{+\infty} x^2e^{-x}dx = \int_{0}^{+\infty} x^2d(x)dx = E(T^2) = V(T)+(E(T))^2 = 1+1=2$$

Donc $\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$ converge, donc **la variable aléatoire X admet une espérance** et on a :

$$\mathbf{E(X)} = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \int_{-\infty}^{0} xf(x)dx + \int_{0}^{+\infty} xf(x)dx = 0+2\,\mathbf{=2}$$

3. La fonction de répartition F de la variable aléatoire X est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$$

Il vient donc :

$$\forall x \in]-\infty,0[\quad F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{-\infty}^{x} 0dt = 0$$

Et :

$$\forall x \in [0,+\infty[\quad F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{-\infty}^{0} 0dt + \int_{0}^{x} te^{-t}dt = \int_{0}^{x} te^{-t}dt$$

On pose :

$$u(t) = t \qquad u'(t) = 1$$
$$v'(t) = e^{-t} \qquad v(t) = -e^{-t}$$

Il vient alors, par intégration par parties, u' et v' étant continues sur $[0,x]$:

$$\int_{0}^{x} te^{-t}dt = \left[-te^{-t}\right]_0^x - \int_0^x\left(-e^{-t}\right)dx = -xe^{-x} - \left[e^{-t}\right]_0^x = -xe^{-x} - e^{-x} + 1 = 1-(x+1)e^{-x}$$

Ainsi a-t-on, **pour tout réel x** :

$$\mathbf{F(x)} = \begin{cases} \mathbf{1-(x+1)e^{-x}} & \mathbf{si\ x \geq 0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{si\ x < 0} \end{cases}$$

4.a. On a, pour tout réel x :

$$Z > x \Leftrightarrow \min(X_1,X_2) > x \Leftrightarrow (X_1 > x \text{ et } X_2 > x)$$

Il vient donc, puisque X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes, **pour tout réel x** :

$$\mathbf{P([Z>x])} = P([X_1>x] \cap [X_2>x]) \mathbf{= P([X_1>x])P([X_2>x])}$$

b. Par définition de la fonction de répartition H de la variable aléatoire Z et d'après la question 4.a, on a, pour tout réel x :

$$H(x) = P([Z \leq x]) = 1 - P([Z>x]) = 1 - P([X_1>x])P([X_2>x])$$

X_1 et X_2 étant deux variables aléatoires suivant toutes les deux la même loi que X, on a :

$$P([X_1 > x]) = P([X_2 > x]) = P([X > x]) = 1 - P([X \leq x]) = 1 - F(x)$$

Il en résulte, pour tout réel x :

$$H(x) = 1 - (1 - F(x))^2$$

D'après la question 3, il vient donc, **pour tout réel x** :

$$\mathbf{H(x) = \begin{cases} 1 - (x+1)^2 e^{-2x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}}$$

c. Une densité h de Z s'obtient en dérivant H là où cela est possible, c'est-à-dire ici sur $\mathbb{R}^*$, et en prolongeant h en 0, pour obtenir une fonction définie sur $\mathbb{R}$.

On a donc :

$$h(x) = H'(x) = \begin{cases} -2(x+1)e^{-2x} - (x+1)^2(-2)e^{-2x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

On a, pour tout réel x strictement positif :

$$-2(x+1)e^{-2x} - (x+1)^2(-2)e^{-2x} = 2(-x-1+x^2+2x+1)e^{-2x} = 2(x^2+x)e^{-2x} = 2x(x+1)e^{-2x}$$

En posant $h(0) = 0$, **une densité h de Z est bien donnée par** :

$$\mathbf{h(x) = \begin{cases} 2x(x+1)e^{-2x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}}$$

5.a. On a, **pour tout réel x** :

$$\begin{aligned} \mathbf{g'(x)} &= -\left(3x^2 + 5x + \frac{5}{2}\right)e^{-2x} - \left(x^3 + \frac{5}{2}x^2 + \frac{5}{2}x + \frac{5}{4}\right)\left(-2e^{-2x}\right) \\ &= \left(-3x^2 - 5x - \frac{5}{2} + 2x^3 + 5x^2 + 5x + \frac{5}{2}\right)e^{-2x} = \left(2x^3 + 2x^2\right)e^{-2x} \\ &= \mathbf{2x^2(x+1)e^{-2x}} \end{aligned}$$

b. La variable aléatoire Z admet une espérance si et seulement si $\int_{-\infty}^{+\infty} xh(x)dx$ converge, et dans ce cas, on a :

$$E(Z) = \int_{-\infty}^{+\infty} xh(x)dx$$

On sait que $\int_{-\infty}^{0} xh(x)dx$ converge car :

$$\int_{-\infty}^{0} xh(x)dx = \int_{-\infty}^{0} 0dx = 0$$

Pour tout réel positif ou nul x, on a :

$$\begin{aligned} \int_0^x th(t)dt &= \int_0^x th(t)dt = \int_0^x 2t^2(t+1)e^{-2t}dt = \int_0^x g'(t)dt = [g(t)]_0^x = g(x) - g(0) \\ &= -\left(x^3 + \frac{5}{2}x^2 + \frac{5}{2}x + \frac{5}{4}\right)e^{-2x} + \frac{5}{4} \end{aligned}$$

On a :

$$\lim_{x\to+\infty} \int_0^x th(t)dt = \lim_{x\to+\infty}\left(-\left(x^3 + \frac{5}{2}x^2 + \frac{5}{2}x + \frac{5}{4}\right)e^{-2x} + \frac{5}{4}\right)$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(-\left(\frac{1}{8}+\frac{5}{16x}+\frac{5}{16x^2}+\frac{5}{32x^3}\right)(2x)^3 e^{-2x}+\frac{5}{4}\right)=\frac{5}{4}$$

Car :

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{8}+\frac{5}{16x}+\frac{5}{16x^2}+\frac{5}{32x^3}\right)=\frac{1}{8}$$

Et :

$\lim_{x\to+\infty}(2x)^3 e^{-2x}=0$ car $\lim_{x\to+\infty}2x=+\infty$ et, par croissance comparée, $\lim_{x\to+\infty}x^3e^{-x}=0$

Donc $\int_0^{+\infty} xh(x)dx$ converge et on a :

$$\int_0^{+\infty} xh(x)dx=\frac{5}{4}$$

Donc $\int_{-\infty}^{+\infty} xh(x)dx$ converge, donc **la variable aléatoire Z admet une espérance** et on a :

$$\mathbf{E}(\mathbf{Z})=\int_{-\infty}^{+\infty} xh(x)dx=\int_{-\infty}^{0} xh(x)dx+\int_0^{+\infty} xh(x)dx=0+\frac{5}{4}\boldsymbol{=\frac{5}{4}}$$

6.a. Lorsque $X_1 \le X_2$, on a :

$$Z=\min(X_1,X_2)=X_1 \text{ et } W=\max(X_1,X_2)=X_2$$

Donc :

$$Z+W=X_1+X_2$$

Lorsque $X_2 < X_1$, on a :

$$Z=\min(X_1,X_2)=X_2 \text{ et } W=\max(X_1,X_2)=X_1$$

Donc :

$$Z+W=X_2+X_1$$

Donc on a, dans les deux cas :

$$\mathbf{Z+W=X_1+X_2}$$

b. Par linéarité de l'espérance, et d'après les questions 6.a, 2.b et 5.b, il vient :

$$\mathbf{E}(\mathbf{W})=E(X_1+X_2-Z)=E(2X-Z)=2E(X)-E(Z)=2\cdot 2-\frac{5}{4}=4-\frac{5}{4}\boldsymbol{=\frac{11}{4}}$$

c. Lorsque $X_1 \le X_2$, on a :

$$Z=\min(X_1,X_2)=X_1,\ W=\max(X_1,X_2)=X_2 \text{ et } |X_1-X_2|=X_2-X_1 \text{ car } X_1-X_2\le 0$$

Donc :

$$|X_1-X_2|=W-Z$$

Lorsque $X_2 < X_1$, on a :

$$Z=\min(X_1,X_2)=X_2,\ W=\max(X_1,X_2)=X_1 \text{ et } |X_1-X_2|=X_1-X_2 \text{ car } X_1-X_2>0$$

Donc :

$$|X_1-X_2|=W-Z$$

Donc on a, dans les deux cas :

$$\mathbf{|X_1-X_2|=W-Z}$$

d. Par linéarité de l'espérance, et d'après les questions 5.b et 6.c, il vient :

$$\mathbf{E}(|\mathbf{X_1-X_2}|)=E(W-Z)=E(W)-E(Z)=\frac{11}{4}-\frac{5}{4}=\frac{6}{4}\boldsymbol{=\frac{3}{2}}$$

EXERCICE 4

1. Par définition de la matrice X_n, on a :

$$\mathbf{X_0} = \begin{pmatrix} u_2 \\ u_1 \\ u_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \text{ et } \mathbf{X_1} = \begin{pmatrix} u_3 \\ u_2 \\ u_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{2} \\ \mathbf{1} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

Car :

$$u_3 = 2u_2 - \frac{5}{4}u_1 + \frac{1}{4}u_0 = 2$$

2.a. Par définition de la matrice X_n, et vu la relation de récurrence définissant la suite $(u_n)_{n\geq 0}$, on a, **pour tout entier naturel n** :

$$\mathbf{X_{n+1}} = \begin{pmatrix} u_{n+3} \\ u_{n+2} \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2u_{n+2} - \frac{5}{4}u_{n+1} + \frac{1}{4}u_n \\ u_{n+2} \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -\frac{5}{4} & \frac{1}{4} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 8 & -5 & 1 \\ 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix} = \mathbf{AX_n}$$

b. Montrons par récurrence la propriété P_n, définie pour tout entier naturel n, par :

$$X_n = A^n X_0$$

<u>Initialisation</u> :
P_0 est vraie car on a :

$$A^0 X_0 = IX_0 = X_0$$

<u>Hérédité</u> :
On suppose P_n vraie, pour une valeur de l'entier naturel n, c'est-à-dire :

$$X_n = A^n X_0$$

On montre que P_{n+1} est vraie, c'est-à-dire :

$$X_{n+1} = A^{n+1} X_0$$

On a, d'après l'hypothèse de récurrence et la question 2.a :

$$X_{n+1} = AX_n = AA^n X_0 = A^{n+1} X_0$$

Ceci assure que P_{n+1} est vraie.
D'après le principe de récurrence, on peut conclure que, **pour tout entier naturel n**, on a :

$$\mathbf{X_n = A^n X_0}$$

3.a. On a :

$$\mathbf{PQ} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 16 & -16 & 4 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = 4 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{4I}$$

Cette égalité peut encore s'écrire :

$$P\left(\frac{1}{4}Q\right) = I$$

Ceci assure que **la matrice P est inversible** et que sa matrice inverse est :

$$\mathbf{P^{-1} = \frac{1}{4}Q}$$

b. Les calculs donnent :

$$\mathbf{PT} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 6 \\ 2 & 2 & 8 \\ 2 & 4 & 8 \end{pmatrix}}$$

Et :

$$\mathbf{AP} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 8 & -5 & 1 \\ 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 4 & 2 & 12 \\ 4 & 4 & 16 \\ 4 & 8 & 16 \end{pmatrix} \mathbf{= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 6 \\ 2 & 2 & 8 \\ 2 & 4 & 8 \end{pmatrix}}$$

Montrons alors par récurrence la propriété P_n, définie pour tout entier naturel n, par :

$$A^n = PT^nP^{-1}$$

<u>Initialisation</u> :

P_0 est vraie car on a :

$$PT^0P^{-1} = PIP^{-1} = PP^{-1} = I = A^0$$

<u>Hérédité</u> :

On suppose P_n vraie, pour une valeur de l'entier naturel n, c'est-à-dire :

$$A^n = PT^nP^{-1}$$

On montre que P_{n+1} est vraie, c'est-à-dire :

$$A^{n+1} = PT^{n+1}P^{-1}$$

Le calcul des produits PT et AP permet de constater que :

$$AP = PT$$

Par multiplication à droite par P^{-1} des deux membres de cette égalité, il vient donc :

$$A = PTP^{-1}$$

On a donc, d'après l'hypothèse de récurrence et l'égalité précédente :

$$A^{n+1} = A^nA = PT^nP^{-1}PTP^{-1} = PT^nITP^{-1} = PT^nTP^{-1} = PT^{n+1}P^{-1}$$

Ceci assure que P_{n+1} est vraie.

D'après le principe de récurrence, on peut conclure que, **pour tout entier naturel n**, on a :

$$\mathbf{A^n = PT^nP^{-1}}$$

4.a. On a :

$$N = T - D = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Puis, en notant 0 la matrice nulle d'ordre 3 :

$$N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

Il vient donc, **pour tout entier naturel k supérieur ou égal à 2** :

$$\mathbf{N^k} = N^{k-2}N^2 = N^{k-2}0 \mathbf{= 0}$$

b. On a :

$$DN = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Et :

$$ND = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Donc on a bien vérifié que :

$$\mathbf{DN = ND}$$

Puisque D et N commutent pour la multiplication des matrices, la formule du binôme de Newton permet d'écrire, pour tout entier naturel n :

$$T^n = (D+N)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}D^{n-k}N^k$$

D'après la question 4.a, il vient, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1 :

$$T^n = \sum_{k=0}^{1}\binom{n}{k}D^{n-k}N^k = \binom{n}{0}D^nN^0 + \binom{n}{1}D^{n-1}N = D^n + nD^{n-1}N$$

Puisque D est une matrice diagonale, on a :

$$D^n = \left(\frac{1}{2}\right)^n\begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 1^n & 0 \\ 0 & 0 & 1^n \end{pmatrix} = \left(\frac{1}{2}\right)^n\begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et donc } D^{n-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\begin{pmatrix} 2^{n-1} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Il vient donc, pour tout entier naturel n :

$$D^{n-1}N = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\begin{pmatrix} 2^{n-1} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2\left(\frac{1}{2}\right)^n\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Puis, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1 :

$$T^n = D^n + nD^{n-1}N = \left(\frac{1}{2}\right)^n\begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + 2n\left(\frac{1}{2}\right)^n\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \left(\frac{1}{2}\right)^n\begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La formule ci-dessus reste vraie pour $n = 0$ puisque $T^0 = I$.
Ainsi a-t-on, **pour tout entier naturel n** :

$$\mathbf{T^n = \left(\frac{1}{2}\right)^n\begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

c. On a, pour tout entier naturel n :

$$PT^n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix}\left(\frac{1}{2}\right)^n\begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \left(\frac{1}{2}\right)^n\begin{pmatrix} 2^n & 1 & 2n+4 \\ 2^n & 2 & 4n+4 \\ 2^n & 4 & 8n \end{pmatrix}$$

Puis, d'après les questions 3.b et 3.a, pour tout entier naturel n :

$$A^n = PT^nP^{-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^n \begin{pmatrix} 2^n & 1 & 2n+4 \\ 2^n & 2 & 4n+4 \\ 2^n & 4 & 8n \end{pmatrix} \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 16 & -16 & 4 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

Soit encore, **pour tout entier naturel n** :

$$\mathbf{A^n = \left(\frac{1}{2}\right)^n \begin{pmatrix} 4\cdot 2^n - n - 3 & -4\cdot 2^n + \frac{3}{2}n + 4 & 2^n - \frac{1}{2}n - 1 \\ 4\cdot 2^n - 2n - 4 & -4\cdot 2^n + 3n + 5 & 2^n - n - 1 \\ 4\cdot 2^n - 4n - 4 & -4\cdot 2^n + 6n + 4 & 2^n - 2n \end{pmatrix}}$$

5.a. Par définition de la matrice X_n, et d'après les questions 2.b, 4.c et 1, il vient, pour tout entier naturel n :

$$\begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix} = X_n = A^n X_0 = \left(\frac{1}{2}\right)^n \begin{pmatrix} 4\cdot 2^n - n - 3 & -4\cdot 2^n + \frac{3}{2}n + 4 & 2^n - \frac{1}{2}n - 1 \\ 4\cdot 2^n - 2n - 4 & -4\cdot 2^n + 3n + 5 & 2^n - n - 1 \\ 4\cdot 2^n - 4n - 4 & -4\cdot 2^n + 6n + 4 & 2^n - 2n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

En calculant la dernière ligne de cette matrice colonne, on a donc, **pour tout entier naturel n** :

$$\mathbf{u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n \left(4\cdot 2^n - 4n - 4\right)}$$

b. Il résulte de la question 5.a que :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n \left(4\cdot 2^n - 4n - 4\right) = \lim_{n\to+\infty} \left(4 - 4n\left(\frac{1}{2}\right)^n - 4\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$$

Puisque $-1 < \frac{1}{2} < 1$, on a :

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$$

On a :

$$\lim_{n\to+\infty} n\left(\frac{1}{2}\right)^n = \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{2^n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{e^{\ln n}}{e^{n\ln 2}} = \lim_{n\to+\infty} e^{\ln n - n\ln 2} = \lim_{n\to+\infty} e^{n\left(\frac{\ln n}{n} - \ln 2\right)} = 0$$

Car :

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{\ln n}{n} - \ln 2\right) = -\ln 2 < 0 \text{ car } \lim_{n\to+\infty} \frac{\ln n}{n} = 0 \text{ par croissance comparée}$$

Donc :

$$\lim_{n\to+\infty} n\left(\frac{\ln n}{n} - \ln 2\right) = -\infty$$

Et :

$$\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$$

On en déduit donc que :

$$\mathbf{\lim_{n\to+\infty} u_n = 4}$$