$Exercice\,7$

$On\,considère\,les\,trois\,suites\,réelles\,(u_n),(v_n)\,et\,(w_n)\,définies\,sur\,N\,\,par\,leur\,\,premier$

$terme\,u_0=5, v_0=3\,et\,w_0=1, ainsi\,que\,\,par\,les\,relations\,de\,récurrence\,suivantes:$

$$\forall\, n \in N \begin{cases} u_{n+1}=u_n+4\,v_n \\ v_{n+1}=4\,u_n+v_n \\ w_{n+1}=v_n+w_n \end{cases}$$

$On\,se\,\,propose\,d^{'}exprimer\,les\,termes\,de\,ces\,trois\,suites\,en\,fonction\,de\,l^{'}\,entier\,naturel$

$n\,et\,ce\,de\,deux\,manières\,différentes\,.$

1) $Première\,méthode$

$a\,¿\,Montrer\,que\,la\,suite\,(u_n+v_n)\,est\,géométrique\,de\,raison\,5\,et\,en\,déduire\,,\,pour$

$tout\,\,entier\,\,naturel\,n\,,l^{'}\,expression\,de\,u_n+v_n\,en\,fonction\,\,de\,n\,.$

$b\,¿\,Montrer\,que\,la\,suite\,(u_n-v_n)\,est\,géométrique\,et\,en\,déduire\,,pour$

$tout\,\,entier\,\,naturel\,n\,,l^{'}\,expression\,de\,u_n-v_n\,en\,fonction\,de\,n\,.$

$c\,¿\,Déduire\,des\,deux\,questions\,\,précédentes\,les\,expressions\,de\,u_n\,et\,\,v_n.$

$d\,¿\,Soit\,\,n \in N^{¿}.\,En\,remarquant\,\,que\,pour\,tout\,\,entier\,naturel\,k\,,v_k=w_{k+1}-w_k,$

$exprimer\,\,la\,somme:$

$$\sum_{k=0}^{n-1} v_k=v_0+v_1+\ldots+v_{n-1}$$

$en\,fonction\,de\,w_n;\,en\,déduire\,l^{'}\,expression\,de\,\,w_n\,en\,fonction\,\,de\,n\,et\,\,vérifier\,\,que$

$cette\,formule\,reste\,valable\,pour\,n=0.$

2) $Deuxième\,méthode$

$Soit\,\,A\,la\,matrice \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.\,Pour\,tout\,entier\,naturel\,n\,,on\,note\,X_n\,la\,matrice\,colonne \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$

$a\,¿\,Reconnaître \le résultat\,du\,produit\,matriciel\,A\,X_n.$

$b\,¿\,Montrer\,alors\,\,par\,récurrence\,que\,\,pour\,tout\,entier\,naturel\,n: \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$

$c\,¿\,On\,pose\,P= \begin{pmatrix} 4 & 0 & 4 \\ -4 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.\,Montrer\,que\,P\,est\,inversible\,et\,calculer\,P^{-1}.$

$d\,¿\,On\,pose\,\,D=P^{-1}\,AP\,.\,Calculer\,D\,et\,en\,déduire\,D^n\,pour\,tout\,entier\,naturel\,n\,.$

$e\,¿\,Montrer\,que\,pour\,tout\,entier\,naturel\,n\,,A^n=P\,D^n\,P^{-1},puis\,calculer\,\,A^n.$

$f\,¿\,Retrouver\,\,les\,expressions\,de\,u_n\,,v_n\,et\,w_n\,en\,fonction\,de\,l^{'}\,entier\,naturel\,n\,.$

Partie I :

1) a) $U_{n+1} + V_{n+1} = U_n + 4V_n + 4U_n + V_n$
$= 5U_n + 5V_n$
$= 5(U_n + V_n)$

La suite $(U_n + V_n)$ est donc bien géométrique de raison 5 et de premier terme $U_0 + V_0 = 8$.

Par conséquent : $\boxed{U_n + V_n = 5^n \times 8}$

b) $U_{n+1} - V_{n+1} = U_n + 4V_n - 4U_n - V_n$
$= -3U_n + 3V_n$
$= -3(U_n - V_n)$

La suite $(U_n - V_n)$ est donc bien géométrique de raison -3 et de premier terme $U_0 - V_0 = 2$.

Par conséquent : $\boxed{U_n - V_n = (-3)^n \times 2}$

c) $U_n + V_n - (U_n - V_n) = U_n + V_n - U_n + V_n = 2V_n$

$$V_n = \frac{(U_n + V_n) - (U_n - V_n)}{2}$$

C'est à dire $\frac{5^n \times 8 - (-3)^n \times 2}{2} = 5^n \times 4 - (-3)^n$

$$\boxed{V_n = 5^n \times 4 - (-3)^n}$$

De même, $U_n + V_n + (U_n - V_n) = U_n + V_n + U_n - V_n = 2U_n$

$$U_n = \frac{U_n + V_n + (U_n - V_n)}{2}$$

$$\frac{5^n \times 8 + (-3)^n \times 2}{2} = 5^n \times 4 + (-3)^n$$

$$\boxed{U_n = 5^n \times 4 + (-3)^n}$$

d) On a $\sum_{0}^{n-1} V_k = \sum_{0}^{n-1} W_{k+1} - W_k$

$= W_1 - W_0 + W_2 - W_1 + \dots + W_k - W_{k-1}$. Par télescopage on a alors

$$\sum_{0}^{n-1} V_k = W_k - W_0$$

$$\boxed{\sum_{0}^{n-1} V_k = W_k - 1}$$

On a donc $W_k = \sum_{0}^{-1} V_k + 1$

$W_k = \sum_{0}^{n} 5^k \times 4 - (-3)^k + 1 = 4 \sum_{0}^{n} 5^k - \sum_{0}^{n} (-3)^k + 1$

$= 4 \left(\frac{5^k - 1}{5 - 1} \right) - \frac{(-3)^k - 1}{-3 - 1} + 1 = 4 \times \frac{5^k - 1}{4} - \frac{(-3)^k - 1}{-4} + 1$

$= \frac{1}{4} \left(4 \times (5^k - 1) + ((-3)^k - 1) \right) + 1$

ce qui donne après simplification :

$$\boxed{W_n = -\frac{1}{4} + 5^n + \frac{1}{4}(-3)^n}$$

Partie 2 :

a) On a $A X_n = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_n \\ V_n \\ W_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_n + 4V_n \\ 4U_n + V_n \\ V_n + W_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_{n+1} \\ V_{n+1} \\ W_{n+1} \end{pmatrix} = X_{n+1}$

On a donc $\boxed{X_{n+1} = A X_n}$

b) Initialisation : pour $n=0$ on a $A^0\begin{pmatrix}5\\3\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}U_0\\V_0\\W_0\end{pmatrix}$

La propriété est bien vraie pour le premier terme $n=0$.

Hérédité : Supposons que la propriété soit vraie pour un n entier quelconque, qu'en est-il au rang suivant ?

D'après l'hypothèse de récurrence, on a $A^n\begin{pmatrix}5\\3\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}U_n\\V_n\\W_n\end{pmatrix}$

et d'après 2.a), on a $X_{n+1}=AX_n$.

$$\begin{pmatrix}U_n\\V_n\\W_n\end{pmatrix}=A^n\begin{pmatrix}5\\3\\1\end{pmatrix}$$

$$A\begin{pmatrix}U_n\\V_n\\W_n\end{pmatrix}=A.A^n\begin{pmatrix}5\\3\\1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}U_{n+1}\\V_{n+1}\\W_{n+1}\end{pmatrix}=A^{n+1}\begin{pmatrix}5\\3\\1\end{pmatrix}$$

Conclusion : Par récurrence, la propriété est bien vraie pour tout n entier au rang suivant.

c) Utilisons la méthode du pivot de Gauss.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}4&0&4&1&0&0\\-4&0&4&0&1&0\\1&1&1&0&0&1\end{array}\right)$$

$$\begin{array}{c}\\ L2\\ L3\end{array}\left(\begin{array}{ccc|ccc}4&0&4&1&0&0\\1&1&1&0&0&1\\-4&0&4&0&1&0\end{array}\right)$$

$$\begin{array}{c}\\ 4L2-L1\\ \\ \end{array}\left(\begin{array}{ccc|ccc}4&0&4&1&0&0\\0&4&0&-1&0&4\\-4&0&4&0&1&0\end{array}\right)$$

$$\begin{array}{l} \\ \\ L_3+L_1 \end{array}\left.\begin{array}{ccc} 4 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{array}\right| \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 2L_1-L_3 \\ \\ \\ \end{array}\left.\begin{array}{ccc} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{array}\right| \begin{array}{ccc} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right| \begin{array}{ccc} \frac{1}{8} & -\frac{1}{8} & 0 \\ -\frac{1}{4} & 0 & 1 \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & 0 \end{array}$$

P est donc bien inversible et $P^{-1} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 8 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

d) $D = P^{-1}AP = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 8 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 0 & 4 \\ -4 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$= \frac{1}{8}\begin{pmatrix} -3 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & 8 \\ 5 & 5 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 0 & 4 \\ -4 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} -24 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 40 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$

D est une matrice diagonale donc on a :

$$D^n = \begin{pmatrix} (-3)^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5^n \end{pmatrix}$$

e) Montrons le résultat par récurrence.

Initialisation : Pour $n=0$ on a $A^0 = PD^0P^{-1} = PP^{-1} = I$

La propriété est vraie pour le premier terme $n=0$.

Hérédité : Supposons que la propriété soit vraie pour un n entier quelconque, qu'en est-il au rang suivant ?

D'après l'hypothèse de récurrence on a $A^n = PD^nP^{-1}$.

D'après 2.a) on a $D = P^{-1}AP$ ce qui donne :

$$DP^{-1} = P^{-1}A$$
$$PDP^{-1} = A.$$

On a donc :

$$A^n = PD^nP^{-1}$$
$$A \cdot A^n = APD^nP^{-1}$$
$$A^{n+1} = PDP^{-1}PD^nP^{-1}$$
$$A^{n+1} = PD \cdot D^nP^{-1}$$

$$\boxed{A^{n+1} = PD^{n+1}P^{-1}}$$

Conclusion : Par récurrence, la propriété est bien vraie pour tout n entier au rang suivant.

$$A^n = PD^nP^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 4 \\ -4 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-3)^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5^n \end{pmatrix} \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 8 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 4(-3)^n & 0 & 4\times 5^n \\ -4(-3)^n & 0 & 4\times 5^n \\ (-3)^n & 1 & 5^n \end{pmatrix} \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 8 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$ ce qui donne

$$A^n = \begin{pmatrix} 4(-3)^n + 4\times 5^n & -4(-3)^n + 4\times 5^n & 0 \\ -4(-3)^n + 4\times 5^n & 4(-3)^n + 4\times 5^n & 0 \\ (-3)^n - 2\times 5^n & -(-3)^n + 5^n & 8 \end{pmatrix}$$

f) D'après 2.b) on a $X_n = A^n \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$X_n = \begin{pmatrix} 4(-3)^n + 4\times 5^n & -4(-3)^n + 4\times 5^n & 0 \\ -4(-3)^n + 4\times 5^n & 4(-3)^n + 4\times 5^n & 0 \\ (-3)^n - 2\times 5^n & -(-3)^n + 5^n & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ce qui donne $\begin{pmatrix} (-3)^n + 4\times 5^n \\ -(-3)^n + 4\times 5^n \\ \frac{1}{5}(-3)^n - \frac{1}{5} + 5^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_n \\ V_n \\ W_n \end{pmatrix}$