Exercice 10

Partie 1

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

1) *Etablir que pour tout entier* $n \geq 3, A^n = 0$.
2) *Pour tout réel* t, *on définit la matrice* : $E(t) = I + tA + \frac{t^2}{2}A^2$.

   a) *Montrer que* : $\forall (t,t') \in \mathbb{R}^2, E(t)E(t') = E(t+t')$.

   b) *Calculer, pour tout réel* $t, E(t)E(-t)$. *En déduire que la matrice* $E(t)$ *est inversible et déterminer son inverse.*

   c) *Pour tout entier* n *et tout réel* t, *établir que* : $\left(E(t)\right)^n = E(nt)$.

Partie 2

Soit B, C *et* D *les matrices définies par* :

$B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \quad$ *et* $D = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$.

1) *Calculer* CD *et* DC. *Déterminer les puissances de* C *et* D.
2) *Exprimer* B *en fonction de* C *et* D *et en déduire, en utilisant la formule du binôme, que* : $\forall n \geq 1, B^n = C + 2^n D$. *La formule est-elle encore vraie pour* $n = 0$?
3) *Pour tout entier* $n \geq 1$ *et tout réel* t, *on définit la matrice* $E_n(t)$ *par* :

$$E_n(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!} B^k \text{ que l'on note } E_n(t) = \begin{pmatrix} a_n(t) & b_n(t) \\ c_n(t) & d_n(t) \end{pmatrix}.$$

   a) *Montrer que pour* t *entier* n, $a_n(t) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{2t^k - (2t)^k}{k!}$.

   Exprimer de même $b_n(t), c_n(t)$ *et* $d_n(t)$ *en fonction de* n *et* t.

   b) *Déterminer les limites respectives de* $a_n(t), b_n(t), c_n(t)$ *et* $d_n(t)$ *lorsque* $n \to +\infty$.
4) *On pose pour tout réel* t:

$$E(t) = \begin{pmatrix} \lim\limits_{n\to+\infty} a_n(t) & \lim\limits_{n\to+\infty} b_n(t) \\ \lim\limits_{n\to+\infty} c_n(t) & \lim\limits_{n\to+\infty} d_n(t) \end{pmatrix}.$$

   a) *Vérifier que* $E(T) = \begin{pmatrix} 2e^t - e^{2t} & e^t - e^{2t} \\ 2e^{2t} - 2e^t & 2e^{2t} - e^t \end{pmatrix}$.

   b) *En déduire l'expression de* $E(t)$ *en fonction de* e^t, e^{2t}, C *et* D.

   c) *Montrer que* $E(t)$ *est, pour tout réel* t, *inversible et déterminer son inverse.*

Exercice 10

1) $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$

$A^3 = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

On a $A^3 = 0$. Par conséquent :

$$\boxed{\forall n \geq 3,\ A^n = 0}$$

2) a) $E(t)E(t') = (I + tA + \frac{t^2}{2}A^2)(I + t'A + \frac{(t')^2}{2}A^2)$

$= I + t'A + \frac{(t')^2}{2}A^2 + tA + tt'A^2 + \frac{(t')^2}{2}tA^3 + \frac{t^2}{2}A^2 + \frac{t^2t'}{2}A^3$
$+ \frac{(t')^2t^2}{4}A^4.$

Or, d'après 1.), on a $A^n = 0$ pour tout $n \geq 3$. On a donc :

$E(t)E(t') = I + t'A + \frac{(t')^2}{2}A^2 + tA + tt'A^2 + \frac{t^2}{2}A^2$

$= I + t'A + tA + tt'A^2 + \frac{(t')^2}{2} + \frac{t^2}{2}A^2$

$= I + (t' + t)A + (tt' + \frac{(t')^2}{2} + \frac{t^2}{2})A^2$

$= I + (t + t')A + (t^2 + 2tt' + (t')^2)\frac{A^2}{2}$

$= I + (t + t')A + \frac{(t + t')^2}{2}A^2.$

On a donc bien : $\boxed{E(t)E(t') = E(t + t')}$

b) D'après 2. a) on a $E(t)E(t') = E(t+t')$. Par conséquent :

$$E(t)E(-t) = E(t-t) = E(0).$$

$$E(0) = I + 0 \times A + \frac{0^2}{2} \times A^2$$

$$E(0) = I.$$

On a donc $\boxed{E(t)E(-t) = I}$

Par conséquent, $E(t)$ est inversible et on a :

$$\boxed{(E(t))^{-1} = E(-t)}$$

c) Montrons la formule par récurrence.

Initialisation : pour $n = 0$ on a $(E(t))^0 = E(0t) = E(0) = I$.

La propriété est vraie pour le premier terme $n = 0$

Hérédité : Supposons que la propriété soit vraie pour un n entier quelconque. Qu'en est-il au rang suivant ?

D'après l'hypothèse de récurrence on a $(E(t))^n = E(nt)$ et

d'après 2. a) on a $E(t)E(t') = E(t+t')$.

$$(E(t))^n = E(nt)$$

$$E(t).(E(t))^n = E(t).E(nt)$$

$$(E(t))^{n+1} = E(t+nt)$$

$$\boxed{(E(t))^{n+1} = E((n+1)t)}$$

Conclusion : Par récurrence, la propriété est vraie pour tout n entier au rang suivant.

Partie 2 :

1) $CD = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

. $DC = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$\boxed{CD = DC = 0}$$

$C^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$

$D^2 = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$

Par conséquent, pour tout n entier quelconque on a :

$$\boxed{C^n = C} \quad \text{et} \quad \boxed{D^n = D}$$

2) On remarque que : $\boxed{B = C + 2D}$

On a donc $B^n = (C+2D)^n$. Grâce à la formule du binôme de Newton, et 1) qui donne $C^n = C$ et $D^n = D$, on a :

$$B^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (2D)^k C^{n-k}$$

$$= \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} 2^k D^k C^{n-k} + C^n + 2^n D^n$$

$$= \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} 2^k DC + C + 2^n D$$

$$\boxed{B^n = C + 2^n D}$$

pour $n=0$ on $B^0 = C + D = I$. La propriété est donc également vérifiée pour $n=0$.

On a donc $B^n = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} + 2^n \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ soit

$$B^n = \begin{pmatrix} 2-2^n & 1-2^n \\ -2+2^{n+1} & -1+2^{n+1} \end{pmatrix}$$

3) a) $a_n(t)$ correspond à la somme des coefficients en haut à gauche de la matrice $E_n(t)$.

$$E_n(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!} B^k = \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!} (C + 2^n D)$$

$$a_n(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!} (2-2^n)$$ car on prend les coefficients en haut à gauche de B^n.

$$a_n(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{2t^k - 2^n t^k}{k!}$$

$$\boxed{a_n(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{2t^k - (2t)^k}{k!}}$$

Pour $b_n(t)$ on a alors $b_n(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!}(1-2^n)$

$$b_n(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k - (2t)^k}{k!}$$

$$c_n(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!}(-2+2^{n+1}) = \sum_{k=0}^{n} \frac{-2t^k + 2(2t)^k}{k!}$$

$$d_n(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!}(-1+2^{n+1}) = \sum_{k=0}^{n} \frac{-t^k + 2(2t)^k}{k!}$$

b) - Pour $a_n(t)$, on a $a_n(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{2t^k - (2t)^k}{k!}$

$$a_n(t) = 2\sum \frac{t^k}{k!} - \sum \frac{(2t)^k}{k!}$$

On reconnaît alors les termes généraux d'une série exponentielle. On a donc :

$$\boxed{a_n(t) = 2e^t - e^{2t}} \quad \text{lorsque } n \to +\infty$$

- Pour $b_n(t)$, on a $b_n(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k - (2t)^k}{k!}$

$$b_n(t) = \sum \frac{t^k}{k!} - \sum \frac{(2t)^k}{k!}$$

$$\boxed{b_n(t) = e^t - e^{2t}} \quad \text{lorsque } n \to +\infty$$

- Pour $c_n(t)$, on a $c_n(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{-2t^k + 2(2t)^k}{k!} = -2\sum \frac{t^k}{k!} + 2\sum \frac{(2t)^k}{k!}$

$$\boxed{c_n(t) = -2e^t + 2e^{2t}} \quad \text{lorsque } n \to +\infty$$

- Pour $d_n(t)$, on a $d_n(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{-t^k + 2(2t)^k}{k!}$

$$d_n(t) = -\sum \frac{t^k}{k!} + 2\sum \frac{(2t)^k}{k!}$$

$$\boxed{d_n(t) = -e^t + 2e^{2t}} \quad \text{lorsque } n \to +\infty$$

5) En reprenant les limites trouvées dans la question 3. b), on a bien :

$$E(t) = \begin{pmatrix} 2e^t - e^{2t} & e^t - e^{2t} \\ 2e^{2t} - 2e^t & 2e^{2t} - e^t \end{pmatrix}$$

b) On remarque alors que :

$$\boxed{E(t) = e^{t} C + e^{2t} D}$$

c) Dans la partie 1, nous avons remarqué que $E(t)E(-t) = I$.

Vérifions si cela est toujours le cas.

$$E(t)\,E(-t) = (e^{t} C + e^{2t} D)(e^{-t} C + e^{-2t} D)$$

$$= e^{-t+t} C^2 + e^{-2t} \times e^{t} CD + e^{2t} \times e^{-t} DC + e^{-2t+2t} D^2$$

$$= C^2 + e^{-t} CD + e^{-t} DC + D^2$$

Or, d'après 1.) de la partie 2 on a $CD = DC = 0$, $C^2 = C$ et $D^2 = D$

On a donc $E(t)E(-t) = C + D = I$.

Par conséquent, $E(t)$ est bien inversible et on a :

$$\boxed{(E(t))^{-1} = E(-t)}$$