Exercice 9

On considère la matrice $A=\begin{pmatrix} 0 & m & m^2 \\ \frac{1}{m} & 0 & m \\ \frac{1}{m^2} & \frac{1}{m} & 0 \end{pmatrix}$.

1) Déterminer les réels a et b $(a<b)$ tels que $(A-aI)(A-bI)=0$.
2) On pose $P=\frac{1}{b-a}(A-aI)$ et $Q=\frac{1}{a-b}(A-bI)$.
   Montrer que $P^2=P$ et $Q^2=Q$.
3) Exprimer A comme combinaison linéaire de P et Q.
4) Pour $n\geq 1$, en déduire A^n en fonction de P et Q, puis sa valeur.
5) Montrer que A est inversible et donner A^{-1}.
6) On souhaite résoudre l'équation :
   $(E)\ XA+AX=I$
   où X est une matrice inconnue de $M_3(R)$.
   a¿ Montrer que si X est solution de (E), alors X commute avec A^2.
   b¿ En déduire que si X est solution de (E), alors X commute avec A.
   c¿ Résoudre l'équation (E).

Exercice 9

1) $(A-aI)(A-bI) = \begin{pmatrix} -a & m & m^2 \\ \frac{1}{m} & -a & m \\ \frac{1}{m^2} & \frac{1}{m} & -a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -b & m & m^2 \\ \frac{1}{m} & -b & m \\ \frac{1}{m^2} & \frac{1}{m} & -b \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} ab+2 & m(-a-b+1) & m^2(-a-b+1) \\ \frac{-a-b+1}{m} & ab+2 & m(-a-b+1) \\ \frac{-a-b+1}{m^2} & \frac{-a-b+1}{m} & ab+2 \end{pmatrix}$$

On cherche donc : $ab+2=0$
$-a-b+1=0$

$ab+2=0$ et $-a-b+1=0$
$ab=-2$ $\quad$ $-a-b=-1$
$a+b=1$

On remarque alors que $a=-1$ et $b=2$ sont solutions de ce système ! On a donc :

$$\boxed{(A+I)(A-2I)=0}$$

2) On a $P = \frac{1}{b-a}(A-aI) = \frac{1}{3}(A+I)$ ce qui donne :

$$P = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & m & m^2 \\ \frac{1}{m} & 1 & m \\ \frac{1}{m^2} & \frac{1}{m} & 1 \end{pmatrix}$$

$$P^2 = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & m & m^2 \\ \frac{1}{m} & 1 & m \\ \frac{1}{m^2} & \frac{1}{m} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & m & m^2 \\ \frac{1}{m} & 1 & m \\ \frac{1}{m^2} & \frac{1}{m} & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 3 & 3m & 3m^2 \\ \frac{3}{m} & 3 & 3m \\ \frac{3}{m^2} & \frac{3}{m} & 3 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & m & m^2 \\ \frac{1}{m} & 1 & m \\ \frac{1}{m^2} & \frac{1}{m} & 1 \end{pmatrix}$$

On a donc bien $\boxed{P^2 = P}$

On a $Q = \frac{1}{a-b}(A - bI) = -\frac{1}{3}(A - 2I)$ ce qui donne

$$Q = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & m & m^2 \\ \frac{1}{m} & -2 & m \\ \frac{1}{m^2} & \frac{1}{m} & -2 \end{pmatrix}$$

$$Q^2 = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} -2 & m & m^2 \\ \frac{1}{m} & -2 & m \\ \frac{1}{m^2} & \frac{1}{m} & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & m & m^2 \\ \frac{1}{m} & -2 & m \\ \frac{1}{m^2} & \frac{1}{m} & -2 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 6 & -3m & -3m^2 \\ -\frac{3}{m} & 6 & -3m \\ -\frac{3}{m^2} & -\frac{3}{m} & 6 \end{pmatrix} = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & m & m^2 \\ \frac{1}{m} & -2 & m \\ \frac{1}{m^2} & \frac{1}{m} & -2 \end{pmatrix}$$

On a bien $\boxed{Q^2 = Q}$

3) On a $P = \frac{1}{3}(A + I)$ et $Q = -\frac{1}{3}(A - 2I)$

$P = \frac{A}{3} + \frac{I}{3}$ $\qquad Q = -\frac{A}{3} + \frac{2I}{3}$

$3P = A + I$ $\qquad 3Q = -A + 2I$

$\boxed{I = 3P - A}$ $\qquad 3Q - 2I = -A$

$$\boxed{A = 2I - 3Q}$$

On a alors
$$A = 2I - 3Q$$
$$A = 2(3P - A) - 3Q$$
$$A = 6P - 2A - 3Q$$
$$3A = 6P - 3Q$$

$$\boxed{A = 2P - Q}$$

5) $A^n = (2P - Q)^n$. Grâce à la formule du binôme de Newton on a donc :

$$A^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-Q)^k (2P)^{n-k}$$

D'après 2.) on a $P^2 = P$ et $Q^2 = Q$ donc on a $P^k = P$ et $Q^k = Q$.

$$A^n = \left(\sum_{1}^{n-1} \binom{n}{k} (-1)^k 2^{n-k} \right) QP + 2^n P + (-1)^n Q$$

Or, d'après 1.), on a $(A + I)(A - 2I) = 0$ donc on a $QP = 0$

On obtient donc :

$$\boxed{A^n = 2^n P + (-1)^n Q}$$

5) D'après 1.) on a $(A + I)(A - 2I) = 0$

$$(A + I)(A - 2I) = 0$$

$$A^2 - A - 2I = 0$$

$$A^2 - A = 2I$$

$$A(A - I) = 2I$$

$$A \frac{1}{2}(A - I) = I.$$

Par conséquent, A est inversible et on a :

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{2}(A - I)}$$

6) a) Si on a X solution de (E) $XA + AX = I$, on peut alors en déduire les relations suivantes :

$$XA + AX = I \qquad \text{et} \qquad XA + AX = I$$

$$\boxed{AX = I - XA} \qquad \qquad \boxed{XA = I - AX}$$

On a alors : $A^2X = A(AX)$

$= A(I - XA)$

$= A - AXA$

$= (I - AX)A$

$= (XA)A$

$= XA^2$.

On a donc bien $\boxed{A^2X = XA^2}$

b) D'après 6.a) on a $A^2X = XA^2$

D'après 1.) on a $(A+I)(A-2I) = 0$ ce qui nous permet de trouver la relation suivante :

$$(A+I)(A-2I) = 0$$

$$A^2 - A - 2I = 0$$

$$\boxed{A^2 = A + 2I}$$

Par conséquent, on a :

$$A^2X = XA^2$$

$$(A+2I)X = X(A+2I)$$

$$AX + 2X = XA + 2X$$

$$AX + 2X - 2X = XA + 2X - 2X$$

$$\boxed{AX = XA}$$

c) Grâce à 6.b), on sait que $AX = XA$.

On a donc (E) $XA + AX = I$ équivalent à :

$$2AX = I$$

$$AX = \frac{1}{2} I$$

$$X = \frac{1}{2} A^{-1}$$

$$\boxed{X = \frac{1}{4}(A - I)}$$