$Exercice\,8$

On note I la matrice définie par $I=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$.

Si $(a_n),(b_n),(c_n),(d_n),(e_n),(f_n),(g_n),(h_n)$ et (i_n) désignent neufs suites convergentes,

de l'imites respectives a,b,c,d,e,f,g,h,i, on pose :

$$\lim_{n\to+\infty}\begin{pmatrix}a_n&b_n&c_n\\d_n&e_n&f_n\\g_n&h_n&i_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&b&c\\d&e&f\\g&h&i\end{pmatrix}.$$

Si A est une matrice carrée d'ordre 3, on pose, pour tout entier naturel n :

$S_n=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}A^k$, c'est à dire que $S_n=I+\frac{1}{1!}A+\frac{1}{2!}A^2+\ldots+\frac{1}{n!}A^n$.

On pose également $S=\lim_{n\to+\infty}S_n$ lorsque cette limite existe.

1) Dans cette question, la matrice A est donnée par $A=\begin{pmatrix}0&1&1\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$.

a¿ Calculer A^2.
b¿ Calculer A^3 puis, pour tout entier k supérieur ou égal à 3, déterminer A^k.
c¿ Donner, pour tout entier n supérieur ou égal à 2, l'expression de S_n sous forme de tableau matriciel.
d¿ En déduire l'expressionde la matrice S .

2) Dans cette question, la matrice A est donnée par $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$.

a¿ Calculer A^2.
b¿ A l'aide d'un raisonnement par recurrence, déterminer pour tout k de $N^{¿}$,
l'expression de A^k en fonction de k.

c¿ Etablir, pour tout entier n, l'égalité suivante : $S_n=I+\frac{1}{3}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{3^k}{k!}-1\right)A$.

d¿ Donner l'expression de S sous forme de tableau matriciel.

3) Dans cette question, la matrice A est donnée par $A=\begin{pmatrix}3&-1&1\\2&0&1\\-2&1&0\end{pmatrix}$.

a¿ Calculer A^2-2A+I.
b¿ Etablir, pour tout k de N, la relation : $A^k=kA-(k-1)I$.
c¿ Donner l'expression de S_n en fonction de A et I.
d¿ A l'aide d'un raisonnement par récurrence, montrer que pour tout entier naturel n :

$\sum_{k=0}^{n} \frac{k-1}{k!} = \frac{-1}{n!}$.

En déduire la valeur de $\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{k-1}{k!}$.

e ¿ Montrer que $\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{k!} = e$.

f ¿ Déduire des questions précédentes, l' expression de S sous forme de tableau.

1)a) $A^2 = \begin{pmatrix}0&1&1\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&1\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$

b) $A^3 = \begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&1\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$

On a $A^3 = 0$. Par conséquent, pour tout $k \geq 3$, on a

$$\boxed{A^k = 0}$$

c) $S_n = I + \frac{A}{1!} + \frac{A^2}{2!} + \dots + \frac{A^n}{n!}$

Or, d'après 1.b), pour tout $n \geq 3$, $A^n = 0$.

On a donc : $S_n = I + A + A^2$ pour $n \geq 2$

Ce qui donne $S_n = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0&1&1\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$

$S_n = \begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$ pour $n \geq 2$

d) On a $S = \lim\limits_{n \to +\infty} S_n$ donc $S = S_n = \begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$

2) $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$

$$\boxed{A^2 = 3A}$$

b) Calculons d'abord A^3 pour trouver une relation de recurrence.

$A^3 = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 9 & 9 \\ 9 & 9 & 9 \\ 9 & 9 & 9 \end{pmatrix}$ $\quad A^3 = 3A^2$ ou $A^3 = (3)^2 A$

Demontrons alors par recurrence la propriété $A^n = (3)^{n-1} A$.

Initialisation : pour $n = 1$ on a $A = 3^0 A = A$.

La propriété est bien vraie pour le premier terme $n = 1$.

Hérédité : Supposons que la propriété soit vraie pour un n entier quelconque, qu'en est-il au rang suivant ?

D'après l'hypothèse de recurrence on a $A^n = (3)^{n-1} A$
On a aussi d'après 2.a) $A^2 = 3A$.

$$A^n = (3)^{n-1} A$$
$$A^n \cdot A = (3)^{n-1} A^2$$
$$A^{n+1} = (3)^{n-1} 3A$$

$$\boxed{A^{n+1} = (3)^n A}$$

Conclusion : Par recurrence, la propriété est bien vraie pour tout n entier au rang suivant.

c) $S_n = \sum_0^n \frac{A^k}{k!}$ c'est à dire

$$S_n = I + \sum_1^n \frac{A^k}{k!}$$

$$S_n = I + \sum_0^n \frac{A^k}{k!} - A$$

$$S_n = I + \sum_0^n \frac{(3)^{k-1}A}{k!} - A$$

$$S_n = I + \left(\sum_0^n \frac{3^{k-1}}{k!} - 1\right)A$$

$$\boxed{S_n = I + \frac{1}{3}\left(\sum_0^n \frac{3^k}{k!} - 1\right)A}$$

d) On a $S = \lim_{n \to +\infty} S_n$ et $S_n = I + \frac{1}{3}\left(\sum_0^n \frac{3^k}{k!} - 1\right)A$

Or, $\sum_0^{+\infty} \frac{3^k}{k!}$ est une série exponentielle. On a alors $\sum_0^{+\infty} \frac{3^k}{k!} = e^3$

$$S = I + \frac{1}{3}\left(e^3 - 1\right)A$$

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{e^3-1}{3} & \frac{e^3-1}{3} & \frac{e^3-1}{3} \\ \frac{e^3-1}{3} & \frac{e^3-1}{3} & \frac{e^3-1}{3} \\ \frac{e^3-1}{3} & \frac{e^3-1}{3} & \frac{e^3-1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{e^3-2}{3} & \frac{e^3-1}{3} & \frac{e^3-1}{3} \\ \frac{e^3-1}{3} & \frac{e^3-2}{3} & \frac{e^3-1}{3} \\ \frac{e^3-1}{3} & \frac{e^3-1}{3} & \frac{e^3-2}{3} \end{pmatrix}$$

3) a) $A^2 = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 2 \\ 4 & -1 & 2 \\ -4 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

$$A^2 - 2A + I = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 2 \\ 4 & -1 & 2 \\ -4 & 2 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 & -2 & 2 \\ 4 & 0 & 2 \\ -4 & 2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On a donc $\boxed{A^2 - 2A + I = 0}$

b) Procédons par récurrence.
Initialisation : pour $h = 0$ on a $A^0 = 0A - (-1)I = I$

La propriété est bien vraie pour le premier terme $h = 0$.

Hérédité : Supposons que la propriété soit vraie pour un h entier quelconque, qu'en est-il au rang suivant ?

D'après l'hypothèse de récurrence on a $A^h = hA - (h-1)I$

D'après 3.a) on a $A^2 - 2A + I = 0$ ce qui nous permet d'obtenir $A^2 = 2A - I$.

$$A^h = hA - (h-1)I$$
$$A \cdot A^h = hA^2 - (h-1)A$$
$$A^{h+1} = h(2A - I) - (Ah - A)$$
$$A^{h+1} = 2Ah - hI - Ah + A$$
$$A^{h+1} = Ah + A - hI$$

$$\boxed{A^{h+1} = A(h+1) - hI}$$

Conclusion : Par récurrence, la propriété est bien vraie pour tout h entier au rang suivant.

c) On $S_n = \sum_0^n \frac{A^h}{h!}$ donc $S_n = \sum_0^n \frac{hA - (h-1)I}{h!}$ soit

$$\boxed{S_n = \sum \frac{Ah}{h!} - \sum \frac{(h-1)I}{h!}}$$

d) ~~I~~ Initialisation : pour $n=0$, $\sum_0^0 \frac{0-1}{0!} = -1$ et $-\frac{1}{1!} = -1$

La propriété est bien vraie pour le premier terme $n=0$.

Hérédité : Supposons que la propriété soit vraie pour un n entier quelconque, qu'en est-il au rang suivant ?

D'après l'hypothèse de récurrence on a $\sum_0^n \frac{k-1}{k!} = -\frac{1}{n!}$,

$$\sum_0^n \frac{k-1}{k!} = -\frac{1}{n!}$$

$$\sum_0^n \frac{k-1}{k!} + \frac{k}{(k+1)!} = -\frac{1}{n!} + \frac{n}{(n+1)!}$$

$$\sum_0^{n+1} \frac{k-1}{k!} = \frac{-(n+1)}{(n+1)n!} + \frac{n}{(n+1)!}$$

$$\sum_0^{n+1} \frac{k-1}{k!} = \frac{-n-1+n}{(n+1)!}$$

$$\boxed{\sum_0^{n+1} \frac{k-1}{k!} = -\frac{1}{(n+1)!}}$$

Conclusion : Par récurrence, la propriété est bien vraie pour tout n entier au rang suivant.

On a donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \sum_0^n \frac{k-1}{k!} = \lim\limits_{n \to +\infty} -\frac{1}{n!} = 0$.

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} \sum_0^n \frac{k-1}{k!} = 0}$$

e) $\sum_0^n \frac{k}{k!} = \sum_0^n \frac{1}{(k-1)!} = \sum_0^n \frac{(1)^{(k-1)}}{(k-1)!}$ On reconnaît alors le terme général d'une série exponentielle. On a donc :

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} \sum_0^n \frac{k}{k!} = e}$$

f) $S = \lim\limits_{n \to +\infty} S_n$

D'après 3. c) on a $S_n = \sum_0^n \frac{Ak}{k!} - \sum_0^n \frac{k-1}{k!} I$

Grâce à 3. d) on sait que $\lim\limits_{n \to +\infty} \sum_0^n \frac{k-1}{k!} = 0$.

Grâce à 3. e) on sait que $\lim\limits_{n \to +\infty} \sum_0^n \frac{k}{k!} = e$

On a donc $S = Ae - 0I$

$$\boxed{S = Ae}$$