Exercice 6

Soit a un réel. On note $M(a)=\begin{pmatrix}1-2a & a & a \\ a & 1-2a & a \\ a & a & 1-2a\end{pmatrix}$.

1) Montrer que, pour tous réels a et b, on a :
$M(a)M(b)=M(a+b-3ab)$

2)
En déduire les valeurs de a pour lesquelles la matrice $M(a)$ est inversible et l' exprimer.

3) Déterminer $\leq$ réel a_0 non nul tel que : $(M(a_0))^2=M(a_0)$.

4) On considère les matrices : $P=M(a_0)$ et $Q=I-P$.

a ¿ Montrer qu' il existe un réel α, que l' on exprimera en fonction de a, tel que $M(a)=P+\alpha Q$.

b ¿ Calculer P^2, QP, PQ et Q^2.

c ¿ Pour tout $n \in N$¿, montrer que $(M(a))^n$ s' écrit comme combinaison linéaire de P et Q.

d ¿ Expliciter alors la matrice $(M(a))^n$.

Exercice 6

1) $M(a)M(b) = \begin{pmatrix} 1-2a & a & a \\ a & 1-2a & a \\ a & a & 1-2a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1-2b & b & b \\ b & 1-2b & b \\ b & b & 1-2b \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 1-2b-2a+6ab & a+b-3ab & a+b-3ab \\ a+b-3ab & 1-2b-2a+6ab & a+b-3ab \\ a+b-3ab & a+b-3ab & 1-2b-2a+6ab \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 1-2(a+b-3ab) & a+b-3ab & a+b-3ab \\ a+b-3ab & 1-2(a+b-3ab) & a+b-3ab \\ a+b-3ab & a+b-3ab & 1-2(a+b-3ab) \end{pmatrix}$

On a donc bien ; $\boxed{M(a)M(b) = M(a+b-3ab)}$

2) On remarque tout d'abord que :

$$\boxed{M(0) = I}$$

D'après 1.) On a la relation $M(a)M(b) = M(a+b-3ab)$

Dans ce cas, $M(b)$ est l'inverse de $M(a)$ si $M(a)M(b) = M(0) = I$

Cherchons donc :

$$a+b-3ab = 0$$
$$b-3ab = -a$$
$$b(1-3a) = -a$$
$$b = -\frac{a}{(1-3a)}$$
$$b = \frac{a}{3a-1}$$

Par conséquent, $M(a)$ est inversible et on a :

$$\boxed{(M(a))^{-1} = M\left(\frac{a}{3a-1}\right)}$$

3) D'après 1.) on a $M(a)M(b) = M(a+b-3ab^2)$

Donc ce cas, $(M(a_0))^2$ donne la relation suivante :

$$(M(a_0))^2 = M(a_0+a_0-3a_0^2)$$

$$(M(a_0))^2 = M(2a_0-3a_0^2)$$

On cherche alors : $2a_0 - 3a_0^2 = a_0$

$$a_0(2-3a_0) = a_0$$

$$2-3a_0 = 1$$

$$-3a_0 = -1$$

$$\boxed{a_0 = \frac{1}{3}}$$

4/a) On a $P = M(a_0) = M\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

On a $Q = I - P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

On a donc $M(a) = P + aQ$ donné par l'opération suivante :

$$\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1+2a & 1-a & 1-a \\ 1-a & 1+2a & 1-a \\ 1-a & 1-a & 1+2a \end{pmatrix}$$

On cherche donc $\frac{1-\alpha}{3} = a$

$1-\alpha = 3a$

$-\alpha = 3a-1$

$$\boxed{\alpha = 1-3a}$$

b) D'après 3.), on a $P^2 = (M(a_0))^2 = M(a_0) = P$

$$\boxed{P^2 = P}$$

$$QP = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{QP = 0}$$

$$PQ = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{PQ = QP = 0}$$

$$Q^2 = (I-P)^2 = I - 2P + P^2 = I - 2P + P = I - P = Q$$

$$\boxed{Q^2 = Q}$$

c) On a $PQ = QP = 0$.

$(M(a))^n = (P + \alpha Q)^n$. Grâce à la formule du binôme de Newton on a alors :

$$(M(a))^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} P^k (\alpha Q)^{n-k}$$
$$= P^n + \alpha^n Q^n$$
$$= P + \alpha^n Q$$

Or, d'après 2.a), on a $\alpha = 1 - 3a$. On a donc :

$$\boxed{(M(a))^n = P + (1-3a)^n Q}$$

d)

$$(M(a))^n = \begin{pmatrix} 1+2(1-3a)^n & 1-(1-3a)^n & 1-(1-3a)^n \\ 1-(1-3a)^n & 1+2(1-3a)^n & 1-(1-3a)^n \\ 1-(1-3a)^n & 1-(1-3a)^n & 1+2(1-3a)^n \end{pmatrix}$$