Exercice 5

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ -15 & -6 & 11 \\ -14 & -6 & 11 \end{pmatrix}$ *et* $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

1) a) *Montrer que* P *est inversible et calculer* P^{-1}.
   b) *Calculer la matrice* $T = P^{-1}AP$; *Que constate t on ?*
   c) *Exprimer* A *en fonction de* P, P^{-1} *et* T.
   d) *Montrer que pour tout entier* n, *on a* $A^n = PT^nP^{-1}$.
2) a) *On définit la matrice* N *par* $T = I + N$. *Calculer* N^2 *et* N^3.
   En déduire N^k *pour tout* $k \geq 3$.
   b) *Déterminer* T^n *en fonction de* n, I, N *et* N^2 *puis de* n *uniquement.*
   c) *Montrer que* $PNP^{-1} = A - I$ *et que* $PN^2P^{-1} = A^2 - 2A + I$.
   d) *Donner l'expression de* A^n *en fonction de* n, I, A *et* A^2.

Exercice 5

1) a) Utilisons la méthode du Pivot de Gauss :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{l} \\ L_2 - L_1 \\ \\ \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{l} \\ \\ L_3 - 2L_1 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{l} \\ \\ 3L_3 - 2L_2 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -4 & -2 & 3 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{4}{3} & -\frac{2}{3} & 1 \end{array}\right)$$

P est donc inversible et $P^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -4 & -2 & 3 \end{pmatrix}$

b) Calculons d'abord AP.

$$AP = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ -15 & -6 & 11 \\ -14 & -6 & 11 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 11 \\ 2 & 4 & 11 \end{pmatrix}$$

Calculons maintenant $P^{-1}AP$.

$$P^{-1}AP = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -5 & -2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & 11 \\ 2 & 5 & 11 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 & 3 & 6 \\ 0 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On a donc : $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

On constate alors que c'est une matrice triangulaire supérieure.

c) D'après 1. b), on a $T = P^{-1}AP$.

$$T = P^{-1}AP$$
$$TP^{-1} = P^{-1}APP^{-1}$$
$$TP^{-1} = P^{-1}A$$
$$PTP^{-1} = PP^{-1}A$$

On a donc : $\boxed{A = PTP^{-1}}$

d) Montrons la formule par récurrence.

Initialisation : pour $n = 0$ on a $A^0 = PT^0P^{-1}$
$= PP^{-1}$
$= I$

La formule est donc vraie pour le premier terme $n = 0$.

Hérédité : Supposons que la propriété soit vraie pour un n entier quelconque. Qu'en est-il au rang suivant ?

D'après l'hypothèse de récurrence on a $A^n = PT^nP^{-1}$ et d'après 1.c), on a $A = PTP^{-1}$.

$$A^n = PT^nP^{-1}$$
$$A.A^n = APT^nP^{-1}$$
$$A^{n+1} = PTP^{-1}PT^nP^{-1}$$
$$A^{n+1} = PT.T^nP^{-1}$$

$$\boxed{A^{n+1} = PT^{n+1}P^{-1}}$$

<u>Conclusion :</u> Par récurrence, la propriété est bien vraie pour tout n entier au rang suivant.

2) a) On a $T = I + N$

$$N = T - I = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$N^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On a $N^3 = 0$. Par conséquent :

$$\boxed{\forall k \geq 3,\ N^k = 0}$$

b) $T^n = (I + N)^n = (N + I)^n$. Grâce à la formule du binôme de Newton on obtient :

$$T^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} N^k I^{n-k}$$

ce qui donne $T^n = \binom{n}{0} N^0 I^n + \binom{n}{1} N^1 I^{n-1} + \binom{n}{2} N^2 I^{n-2} + \dots$
$+ \binom{n}{n} N^n I^0$

Or, d'après 2.a), on a $N^k = 0$ pour tout $k \geq 3$.

On a donc $T^n = \binom{n}{0} N^0 I^n + \binom{n}{1} N^1 I^{n-1} + \binom{n}{2} N^2 I^{n-2}$
$= I + nN + \binom{n}{2} N^2$

On a donc : $\boxed{T^n = I + nN + \frac{n(n-1)}{2} N^2}$

$$T^n = \begin{pmatrix} 1 & n & 2n + \frac{3n(n-1)}{2} \\ 0 & 1 & 3n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

c) On a $N = T - I$ donc :

$$\begin{aligned} PNP^{-1} &= P(T-I)P^{-1} \\ &= PTP^{-1} - PP^{-1} \\ &= PTP^{-1} - I \end{aligned}$$

Or d'après 1.d) on $A^n = PT^nP^{-1}$ donc $A = PTP^{-1}$
ce qui donne donc ;

$$\boxed{PNP^{-1} = A - I}$$

De même, on a :

$$\begin{aligned} PN^2P^{-1} &= P(T-I)^2P^{-1} \\ &= P(T^2 - 2T + I)P^{-1} \\ &= PT^2P^{-1} - 2PTP^{-1} + PP^{-1} \\ &= PT^2P^{-1} - 2A + I \end{aligned}$$

Toujours d'après la propriété trouvée en 1.d) on a $A^2 = PT^2P^{-1}$
ce qui donne donc ;

$$\boxed{PN^2P^{-1} = A^2 - 2A + I}$$

d) Toujours d'après 1. d) on a $A^n = PT^nP^{-1}$.

De plus, d'après 2. b) on a $T^n = I + nN + \frac{n(n-1)}{2}N^2$.

On a donc : $A^n = PT^nP^{-1}$

$$A^n = P\left(I + nN + \frac{n(n-1)}{2}N^2\right)P^{-1}$$

$$A^n = PP^{-1} + nPNP^{-1} + \frac{n(n-1)}{2}PN^2P^{-1}$$

Or, d'après 2. c) on a $PNP^{-1} = A - I$ et $PN^2P^{-1} = A^2 - 2A + I$.

On a donc :

$$A^n = I + n(A - I) + \frac{n(n-1)}{2}(A^2 - 2A + I)$$

$$A^n = I + An - In + \frac{n(n-1)}{2}A^2 - n(n-1)A + \frac{n(n-1)}{2}I$$

$$A^n = I + I\frac{n(n-1)}{2} - In + An - n(n-1)A + \frac{n(n-1)}{2}A^2$$

$$A^n = I\left(1 + \frac{n(n-1)}{2} - n\right) + A\left(n - n(n-1)\right) + \frac{n(n-1)}{2}A^2$$

$$\boxed{A^n = I\left(1 + \frac{n(n-1)}{2} - n\right) + A(2n - n^2) + \frac{n(n-1)}{2}A^2}$$