Exercice 4

Soit la suite (u_n) *définie par ses trois premiers termes* $u_0 = 1, u_1 = 1, u_2 = -2$ *et*

la relation de récurrence :

$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+3} = 6u_n - 11u_{n+1} + 6u_{n+2}$

On pose $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 6 & -11 & 6 \end{pmatrix}$ *et pour tout entier naturel* n : $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix}$.

1) *Montrer que, pour tout entier natuel* n*, on a* $MX_n = X_{n+1}$*. En déduire l'expression de* X_n *en fonction des matrices* M, X_0 *et de l'entiernaturel* n.
2) *a) Calculer* $(M - I)(M - 2I)(M - 3I)$ *puis déduire les valeurs propres possibles de* M.
   b) Donner un vecteur propre de M *associé à chacune d'entre elles.*
3) *a) Soit* $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{pmatrix}$ *et* $Q = \begin{pmatrix} 6 & -5 & 1 \\ -6 & 8 & -2 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$*. Calculer* PQ*. En déduire que* P *est inversible et donner son inverse* P^{-1}.
   b) Soit $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$*. Montrer que* $MP = PD$.
   c) La matrice M *est elle diagonalisable ?*
4) *a) Montrer que pour tout entier naturel* n*, on a* $M^n = PD^nP^{-1}$.
   b) En déduire, pour tout entier naturel n*, les coefficients de la première ligne de* M^n*. Donner alors l'expression de* u_n *en fonction de l'entier naturel* n.

Exercice 4

1) $MX_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 6 & -11 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_n \\ U_{n+1} \\ U_{n+2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_{n+1} \\ U_{n+2} \\ 6U_n - 11U_{n+1} + 6U_{n+2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_{n+1} \\ U_{n+2} \\ U_{n+3} \end{pmatrix}$

On a donc : $\boxed{X_{n+1} = MX_n}$

Démontrons alors par récurrence la propriété $X_n = M^n X_0$.

Initialisation : pour $n = 0$ on a $X_0 = M^0 X_0 = X_0$.

La propriété est bien vraie pour le premier terme $n = 0$

Hérédité : Supposons que la propriété soit vraie pour un n entier quelconque, qu'en est-il au rang suivant ?

D'après l'hypothèse de récurrence on a $X_n = M^n X_0$.
D'après la première partie de la question on a $X_{n+1} = MX_n$.

$$X_n = M^n X_0$$
$$MX_n = M.M^n X_0$$
$$\boxed{X_{n+1} = M^{n+1} X_0}$$

Conclusion : Par récurrence, la propriété $X_n = M^n X_0$ est bien vraie pour tout n entier au rang suivant.

2) a) $(M-I)(M-2I)(M-3I) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 6 & -11 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 6 & -11 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \\ 6 & -11 & 3 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 6 & -9 & 3 \\ 18 & -27 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \\ 6 & -11 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

On a donc $P(X) = (X-1)(X-2)(X-3)$ qui est un polynôme annulateur de M. Les valeurs propres possibles sont donc racines de ce polynôme ce qui donne :

$$\boxed{sp(M) = \{1;2;3\}}$$

b) pour $\lambda = 1$ on a $MX_1 = X_1$
$MX_1 - X_1 = 0$
$(M - I)X_1 = 0$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 6 & -11 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ qui donne } \begin{cases} -x + y = 0 \\ -y + z = 0 \\ 6x - 11y + 5z = 0 \end{cases}$$

Il suffit alors de prendre $x = y = z = 1$ pour résoudre ce système.

On a donc : $\boxed{X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}$ vecteur propre de M de valeur propre associée 1 avec $X_1 \neq 0$.

- pour $\lambda = 2$ on a $MX_2 = 2X_2$
$MX_2 - 2X_2 = 0$
$(M - 2I)X_2 = 0$

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 6 & -11 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ qui donne } \begin{cases} -2x + y = 0 \\ -2y + z = 0 \\ 6x - 11y + 4z = 0 \end{cases}$$

Il suffit alors de prendre $x = 1$, $y = 2$ et $z = 4$ pour résoudre ce système.

On a donc : $\boxed{X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}}$ vecteur propre de M de valeur propre associée 2 avec $X_2 \neq 0$

- pour $\lambda = 3$ on a $MX_3 = 3X_3$
$MX_3 - 3X_3 = 0$
$(M - 3I)X_3 = 0$

$$\begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \\ 6 & -11 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ ce qui donne } \begin{cases} -3x + y = 0 \\ -3y + z = 0 \\ 6x - 11y + 3z = 0 \end{cases}$$

Il suffit alors de prendre $x = 1$, $y = 3$ et $z = 9$ pour résoudre ce système.

On a alors : $\boxed{X_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix}}$ vecteur propre de M de valeur propre associée 3 avec $X_3 \neq 0$.

3) a) $PQ = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & -5 & 1 \\ -6 & 8 & -2 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

On a :
$$PQ = 2I$$
$$P\frac{1}{2}Q = I.$$

P est donc inversible et : $\boxed{P^{-1} = \frac{1}{2}Q}$

b) $MP = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 6 & -11 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \\ 1 & 8 & 27 \end{pmatrix}$

$PD = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \\ 1 & 8 & 27 \end{pmatrix}$

On a donc bien : $\boxed{MP = PD}$

c) D'après 3. b) on a $MP = PD$ et d'après 3. a), P est inversible. On a donc :
$$MP = PD$$
$$MPP^{-1} = PDP^{-1}$$
$$\boxed{M = PDP^{-1}}$$

M est bien diagonalisable

4. a) Procédons par récurrence.

<u>Initialisation:</u> pour $n=0$ on a $M^0 = PD^0P^{-1} = PP^{-1} = I$

La propriété est bien vraie pour le premier terme $n=0$.

<u>Hérédité:</u> Supposons que la propriété soit vraie pour un n entier quelconque, qu'en est-il au rang suivant?

D'après l'hypothèse de récurrence on a $M^n = PD^nP^{-1}$

$$M^n = PD^nP^{-1}$$
$$M.M^n = MPD^nP^{-1}$$
$$M^{n+1} = PDP^{-1}PD^nP^{-1}$$
$$M^{n+1} = PD.D^nP^{-1}$$

$$\boxed{M^{n+1} = PD^{n+1}P^{-1}}$$

<u>Conclusion:</u> Par récurrence, la propriété est bien vraie pour tout n entier au rang suivant.

b) D'après 4. a) on a $M^n = PD^nP^{-1}$.

$$M^n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{pmatrix} \times \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & -5 & 1 \\ -6 & 8 & -2 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & -5 & 1 \\ -6\times2^n & 8\times2^n & -2\times2^n \\ 2\times3^n & -3\times3^n & 3^n \end{pmatrix}$$

La première ligne de M est donc :

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 6-6\times2^n+2\times3^n & -5+8\times2^n-3\times3^n & 1-2\times2^n+3^n \end{pmatrix}$$

D'après 1), on a $X_n = M^nX_0$ donc :

$$u_n = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 6-6\times2^n+2\times3^n & -5+8\times2^n-3\times3^n & 1-2\times2^n+3^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

On a alors

$$U_n = \frac{1}{2}\left(6 - 6\times 2^n + 2\times 3^n - 5 + 8\times 2^n - 3\times 3^n - 2(1 - 2\times 2^n + 3^n)\right)$$

Ce qui donne : $\boxed{U_n = \frac{1}{2}\left(-1 + 6\times 2^n - 3\times 3^n\right)}$