$Exercice$ 3

$On\ considère\ la\ matrice\ A = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}.$

1) $a)$ $Calculer\ A^2 et\ 8A - 15I\ puis\ déterminer\ un\ polynôme\ annulateur\ de\ A.$
   $En\ déduire\ les\ valeurs\ propres\ possibles\ de\ A.$
   $b)$ $Donner\ un\ vecteur\ propre\ de\ A\ associé\ chacune\ de\ ces\ valeurs\ propres.$
2) $a)$ $Soit\ P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}. Montrer\ que\ P\ est\ inversible\ et\ donner\ son\ inverse.$
   $b)$ $Soit\ D = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}. Montrer\ que\ AP = PD.$
3) $Montrer\ que\ pour\ tout\ entier\ naturel\ n, on\ a\ A^n = PD^nP^{-1}\ puis\ exprimer,$
   $pour\ tout\ entier\ naturel\ n, A^n\ sous\ forme\ de\ tableau\ matriciel.$
4) $Soit\ (u_n) et\ (v_n) les\ suites\ définies\ par:\ u_0 = 1, v_0 = 1\ et\ pour\ tout\ entier\ naturel\ n:$

$$\begin{cases} u_{n+1} = 7u_n + 2v_n \\ v_{n+1} = -4u_n + v_n \end{cases}$$

   $a)$ $On\ note\ X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}. Exprimer\ X_{n+1}\ en\ fonction\ de\ A\ et\ X_n.$
   $b)$ $En\ déduire\ que, pour\ tout\ entier\ naturel\ n, on\ a\ x_n = A^nX_0, puis\ donnner$
   $l'expression\ de\ u_n\ et\ v_n\ en\ fonction\ de\ n.$

Exercice 3

1) a) $A^2 = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 & 2 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 41 & 16 \\ -32 & -7 \end{pmatrix}$

$8A - 15I = \begin{pmatrix} 56 & 16 \\ -32 & 8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 15 & 0 \\ 0 & 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 41 & 16 \\ -32 & -7 \end{pmatrix}$

On a alors $A^2 - (8A - 15I) = \begin{pmatrix} 41 & 16 \\ -32 & -7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 41 & 16 \\ -32 & -7 \end{pmatrix} = 0$

On a donc $P(X) = X^2 - 8X + 15$ qui est un polynôme annulateur de A. Les valeurs propres de A sont donc racines de ce polynôme.

Calculons son discriminant.

$\Delta = 64 - 4 \times 1 \times 15 = 64 - 60 = 4$

$x_1 = \frac{8 + \sqrt{4}}{2} = \frac{8+2}{2} = 5$

$x_2 = \frac{8 - \sqrt{4}}{2} = \frac{8-2}{2} = 3$

Ainsi, on a : $\boxed{spec(A) = \{3 ; 5\}}$

b) pour $\lambda = 3$, on a $AX = 3X$

$AX - 3X = 0$

$(A - 3I)X = 0$

$\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ donne le système $\begin{cases} 4x + 2y = 0 \\ -4x - 2y = 0 \end{cases}$

Il suffit alors de prendre $x = 1$ et $y = -2$ pour le résoudre.

On a donc : $\boxed{X = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}}$ vecteur propre de A de valeur propre associée 3 avec $X \neq 0$

- pour λ5, on a $AX = 5X$

$AX - 5X = 0$

$(A - 5I)X = 0$

$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -4 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ce qui donne $\begin{cases} 2x + 2y = 0 \\ -4x - 4y = 0 \end{cases}$

Il suffit alors de prendre x et y opposés, par exemple $x = 1$ et $y = -1$.

On a donc : $\boxed{X = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}}$ vecteur propre de A de valeur propre associée 5 avec $X \neq 0$.

2) a) On a $\Delta P = 1 \times -1 - 1 \times -2 = (-1) - (-2) = 1$

$\Delta P \neq 0$ donc P est inversible et $P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

b) $AP = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -6 & -5 \end{pmatrix}$

$PD = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -6 & -5 \end{pmatrix}$

On a donc bien : $\boxed{AP = PD}$

3) Procédons par récurrence.

__Initialisation__ : pour $n = 0$ on a : $A^0 = PD^0P^{-1} = PP^{-1} = I$

La propriété est bien vraie pour le premier terme $n = 0$.

__Hérédité__ : Supposons que la propriété soit vraie pour un n entier quelconque, qu'en est-il au rang suivant ?

D'après l'hypothèse de récurrence on a :

$$A^n = PD^nP^{-1}$$
$$A \cdot A^n = A \cdot PD^nP^{-1}$$
$$A^{n+1} = PDP^{-1}PD^nP^{-1}$$
$$A^{n+1} = PD \cdot D^nP^{-1}$$
$$\boxed{A^{n+1} = PD^{n+1}P^{-1}}$$

Conclusion : Par récurrence, la propriété est bien vraie pour tout n entier quelconque au rang suivant.

On a alors $A^n = PD^nP^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3^n & 0 \\ 0 & 5^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 3^n & 5^n \\ -2\times3^n & -5^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\times5^n-3^n & 5^n-3^n \\ 2(3^n-5^n) & 2\times3^n-5^n \end{pmatrix}$

5) a) On remarque que $AX_n = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7u_n+2v_n \\ -4u_n+v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix}$

On a donc : $\boxed{X_{n+1} = AX_n}$

b) Procédons par récurrence.

Initialisation : pour $n=0$ on a $X_0 = A^0X_0 = X_0$.

La propriété est bien vraie pour le premier terme $n=0$.

Hérédité : Supposons que la propriété soit vraie pour un n entier quelconque, qu'en est-il du rang suivant ?

D'après l'hypothèse de récurrence on a $X_n = A^nX_0$.
D'après 5.a), on a $X_{n+1} = AX_n$.

$$X_n = A^nX_0$$
$$AX_n = A.A^nX_0$$
$$\boxed{X_{n+1} = A^{n+1}X_0}$$

Conclusion : Par récurrence, la propriété est bien vraie pour tout n entier au rang suivant.

On a donc $X_n = A^nX_0 = \begin{pmatrix} 2\times5^n-3^n & 5^n-3^n \\ 2(3^n-5^n) & 2\times3^n-5^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 2\times5^n-3^n+5^n-3^n \\ 2(3^n-5^n)+2\times3^n-5^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\times5^n-2\times3^n \\ 4\times3^n-3\times5^n \end{pmatrix}$. On a donc :

$\underline{u_n = 3\times5^n-2\times3^n}$ et $\underline{v_n = 4\times3^n-3\times5^n}$.