Exercice 2

On donne les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ *et* $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1) a) *Montrer que* $A(A-I)(A-2I) = 0$ *puis déduire les valeurs propres possibles de* A.

   b) *En déduire trois vecteurs propres de* A *avec leur valeur propre associée.*

   c) *Soit la matrice* $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. *Montrer que* P *est inversible.*

   d) *Soit la matrice* $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. *Etablir que* $AP = PD$, *puis en déduire que* A *est diagonalisable.*

2) a) *Montrer que* $(B-I)(B-2I)^2 = 0$ *puis déduire les valeurs propres possibles de* B.

   b) *Vérifier que* $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ *est un vecteur propre de* B *associé à la valeur propre* 1 *et que les vecteurs* $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ *et* $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ *sont vecteurs propres de* B *associés à la valeur propre* 2.

   c) *Soit la matrice* $P = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. *Montrer que* P *est inversible.*

   d) *Soit la matrice* $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. *Etablir que* $BP = PD$ *puis en déduire que* B *est diagonalisable.*

Exercice 2

1) a) $A(A-I)(A-2I) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

On en déduit donc que $P(X) = X(X-1)(X-2)$ est un polynôme annulateur de A.

Par conséquent, les valeurs propres possibles de A sont racines de ce polynôme, c'est à dire :

$$\boxed{spec(A) = \{0; 1; 2\}}$$

b) Pour $\lambda = 0$, on a la relation $AX = 0X$ soit $AX = 0$, avec X un vecteur propre de A valeur propre associée 0. Déterminons un vecteur propre X.

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ donne le système $\begin{cases} x + z = 0 \\ y = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$

On a donc nécessairement $y = 0$ et pour résoudre ce système, il suffit de prendre x et z opposés, par exemple $x = 1$ et $z = -1$.

On a donc : $\boxed{X = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}}$ vecteur propre de A de valeur propre associée 0 avec $X \neq 0$.

- pour $\lambda = 1$ on a $AY = Y$

$AY - Y = 0$

$(A - I)Y = 0$ soit

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$ ce qui donne le système $\begin{cases} z = 0 \\ x + y = 0 \end{cases}$

On a donc nécessairement $z = 0$ et il suffit de prendre x et y opposés, par $x = 1$ et $y = -1$ pour le résoudre.

On a donc : $\boxed{Y = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}}$ vecteur propre de A de valeur propre associée 1 avec $Y \neq 0$

- Enfin, pour $\lambda = 2$ on a $AZ = 2Z$

$AZ - 2Z = 0$

$(A - 2I)Z = 0$ soit

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$ ce qui donne le système $\begin{cases} -x + z = 0 \\ -y = 0 \\ x + y - z = 0 \end{cases}$

On a donc nécessairement $y = 0$ et il suffit de prendre $x = z$ pour le résoudre, par exemple $x = z = 1$.

On a donc : $\boxed{Z = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}$ vecteur propre de A de valeur propre associée 2 avec $Z \neq 0$.

c) La méthode du pivot de Gauss nous donne :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{l} \\ \\ L_3 + L_1 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

2) a) $(B-I)(B-2I)^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

On a donc $Q(X) = (X-1)(X-2)^2$ qui est un polynôme annulateur de B. Par conséquent, les valeurs propres possibles sont racines de ce polynôme ce qui donne :

$$\boxed{Spec(B) = \{1 ; 2\}}$$

b) $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\lambda = 1$ est donc valeur propre de B et est associée au vecteur propre $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ soit $2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ $\lambda = 2$ est donc valeur propre de B et est associée au vecteur propre $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ soit $2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\lambda = 2$ est donc également associée au vecteur propre $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

c) Utilisons encore la méthode du pivot de Gauss.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{l} \\ \\ L_3 + 2L_1 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{r|ccc|ccc} & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ L3+L2 & 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|ccc|ccc} 2L1-L3 & 2 & 2 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ & 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|ccc|ccc} L1+2L2 & 2 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ & 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}$$

P est donc bien inversible et :

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

d) $AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

$PD = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

On a donc bien : $\boxed{AP = PD}$

Or, puisque P est inversible, on a :

$APP^{-1} = PDP^{-1}$ soit $\boxed{A = PDP^{-1}}$

A est donc bien diagonalisable.

$$\begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ \\ \end{array}\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{l} \\ L_2+L_1 \\ \\ \end{array}\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{l} \\ L_2 \\ L_3 \end{array}\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{l} \\ \\ L_3-L_2 \end{array}\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{l} L_1-L_3 \\ \\ \\ \end{array}\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

P est donc bien inversible et $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

d) $BP = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$

$PD = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$

On a donc : $\boxed{BP = PD}$

Or, puisque P est inversible, on obtient $BPP^{-1} = PDP^{-1}$ soit $\boxed{B = PDP^{-1}}$

B est donc diagonalisable.