Exercice 9

Exercice 2. On rappelle que $2 < e < 3$. On pose pour tout n entier naturel non nul n,

$$I_n = \int_1^e (\ln(t))^n \, dt.$$

1. a) Justifier que, pour tout entier n non nul, $I_n \geq 0$.

   b) En effectuant une intégration par parties, calculer I_1.

   c) De même, en effectuant une intégration par parties, trouver une relation de récurrence entre I_n et $I_{n+1} = \displaystyle\int_1^e 1.\,(\ln(t))^{n+1} \, dt$.

   Déduire de cette relation que, pour tout entier naturel n non nul, on a :

$$0 \leq I_n \leq \frac{e}{n+1}.$$

   En déduire que $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n = 0$.

2. a) Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel non nul n, il existe un entier p_n tel que $I_n = (-1)^n (ep_n - n!)$ et exprimer p_{n+1} en fonction de p_n.

   b) Rappeler p_1 et calculer p_2, p_3, p_4, p_5 et $\dfrac{5!}{p_5}$.

   c) Montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{n!}{p_n} = e$.

Exercice 9

1) a) Partons de $1 \leq t \leq e$

$\ln(1) \leq \ln(t) \leq \ln(e)$

$0 \leq \ln(t) \leq 1$

$0 \leq (\ln(t))^n \leq 1$

$0 \leq \int_1^e (\ln(t))^n \, dt \leq \int_1^e 1 \, dt$

$0 \leq I_n \leq e - 1.$

On a donc bien $\boxed{I_n \geq 0}$ NB: On peut également dire que $\ln(t)$ est positif pour $t \geq 1$ donc I_n sera positif.

b) $I_1 = \int_1^e \ln(t) \, dt$

On pose $U' = 1 \quad U = t$
$V = \ln(t) \quad V' = \frac{1}{t}$

On a alors $I_1 = [t\ln(t)]_1^e - \int_1^e 1 \, dt$

$= e - [t]_1^e$

$= e - (e-1) = 1$

$\boxed{I_1 = 1}$

c) $I_{n+1} = \int_1^e (\ln(t))^{n+1} \, dt$

On pose $U' = 1 \quad U = t$
$V = (\ln(t))^{n+1} \quad V' = \frac{(n+1)(\ln(t))^n}{t}$

On obtient alors $I_{n+1} = [t(\ln(t))^{n+1}]_1^e - (n+1)\int_1^e \frac{(\ln(t))^n}{t} t\, dt$

$= e - (n+1)\int_1^e (\ln(t))^n dt$. On a donc :

$$\boxed{I_{n+1} = e - (n+1) I_n}$$

D'après 1.a) on a $I_n \geq 0$

$$I_{n+1} \geq 0$$

$$e - (n+1) I_n \geq 0$$

$$-(n+1) I_n \geq -e$$

$$(n+1) I_n \leq e$$

$$I_n \leq \frac{e}{n+1}$$

On a donc bien : $\boxed{0 \leq I_n \leq \frac{e}{n+1}}$

Or, $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{e}{n+1} = 0$ donc par encadrement on a :

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} I_n = 0}$$

2) a) <u>Initialisation</u> : pour $n = 1$ on a $(-1)(e p_1 - 1) = 1$

$-e p_1 + 1 = 1$

$-e p_1 = 0$

$p_1 = 0$

La propriété est vraie pour le premier terme $n = 1$.

<u>Hérédité</u> : Supposons que la propriété soit vraie pour un n entier quelconque, qu'en est-il au rang suivant ?

D'après l'hypothèse de récurrence on a $I_n = (-1)^n(ep_n - n!)$

et d'après 1.c) on a $I_{n+1} = e - (n+1)I_n$.

$$I_n = (-1)^n(ep_n - n!)$$

$$-I_n = -(-1)^n(ep_n - n!)$$

$$-(n+1)I_n = (-1)^{n+1}(n+1)(ep_n - n!)$$

$$e-(n+1)I_n = (-1)^{n+1}(ep_n(n+1) - (n+1)n!) + e$$

$$I_{n+1} = (-1)^{n+1}(ep_n(n+1) - (n+1)!) + e\times(-1)^{n+1}\times(-1)^{n+1}$$

$$I_{n+1} = (-1)^{n+1}(ep_n(n+1) - (n+1)! + e\times(-1)^{n+1})$$

$$I_{n+1} = (-1)^{n+1}(ep_n(n+1) + e\times(-1)^{n+1} - (n+1)!)$$

$$I_{n+1} = (-1)^{n+1}(e(p_n(n+1) + (-1)^{n+1}) - (n+1)!)$$

On identifie alors : $\boxed{p_{n+1} = (n+1)p_n + (-1)^{n+1}}$

Conclusion : Par récurrence, la propriété est bien vraie pour tout n entier quelconque au rang suivant.

b) On a $\boxed{p_1 = 0}$

- $p_2 = 2p_1 + (-1)^2 = 0 + 1$ $\boxed{p_2 = 1}$

- $p_3 = 3p_2 + (-1)^3 = 3 - 1 = 2$ $\boxed{p_3 = 2}$

- $p_4 = 4p_3 + (-1)^4 = 8 + 1 = 9$

$$\boxed{p_4 = 9}$$

- $p_5 = 5p_4 + (-1)^5 = 45 - 1 = 44$

$$\boxed{p_5 = 44}$$

- $\frac{5!}{p_5} = \frac{5!}{44} = \frac{5\times4\times3\times2}{4\times11} = \frac{5\times3\times2}{11} = \frac{30}{11}$

$$\boxed{\frac{5!}{p_5} = \frac{30}{11}}$$

c) D'après 1.c) on a $0 \leq I_n \leq \frac{e}{n+1}$ et d'après 2.a) on a $I_n = (-1)^n(ep_n - n!)$:

$$0 \leq I_n \leq \frac{e}{n+1}$$

$$-\frac{e}{n+1} \leq 0 \leq (-1)^n(ep_n - n!) \leq \frac{e}{n+1}$$

$$|ep_n - n!| \leq \frac{e}{n+1}$$

$$\left|\frac{ep_n}{n!} - 1\right| \leq \frac{e}{n!(n+1)}$$

$$\left|\frac{p_n}{n!} - \frac{1}{e}\right| \leq \frac{1}{(n+1)!}$$

$$-\frac{1}{(n+1)!} \leq \frac{p_n}{n!} - \frac{1}{e} \leq \frac{1}{(n+1)!}$$

$$\frac{1}{e} - \frac{1}{(n+1)!} \leq \frac{p_n}{n!} \leq \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{e}$$

Or, $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{(n+1)!} = 0$ donc par encadrement on obtient :

$\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{p_n}{n!} = \frac{1}{e}$ et ainsi son inverse vaut :

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} \frac{n!}{p_n} = e}$$