Exercice 8

Exercice 1. Pour tout nombre entier n, on considère l'équation

$$(E_n) : x^n + x - 1 = 0$$

où l'inconnue x est recherchée dans $[0; +\infty[$ seulement. On étudiera (E_n) à l'aide de la fonction auxiliaire f :

$$f(x) = \frac{\ln(1-x)}{\ln(x)}.$$

1. Existence et unicité de la racine positive x_n de (E_n).
   a) Résoudre l'équation pour $n = 1$ et $n = 2$.
   b) Étudier les variations de la fonction $x \mapsto x^n + x - 1$ sur $[0; +\infty[$ pour $n \geq 1$.
   En déduire que l'équation (E_n) admet une seule racine positive qu'on notera x_n et montrer que $0 < x_n < 1$ pour $n \geq 1$.
2. Étude de la fonction auxiliaire.
   a) Déterminer le domaine de définition de f et les limites de f aux extrémités de ce celui-ci.
   b) Calculer alors la fonction dérivée f' et en déduire le tableau de variations de f.
3. Étude de la (x_n).
   a) Montrer que $f(x_n) = n$ pour $n \geq 1$.
   b) Montrer l'inégalité $x_n < x_{n+1}$ pour $n \geq 1$.
   c) En déduire la convergence de la suite (x_n) vers un nombre réel ℓ et préciser la valeur de ℓ.

1. *Existence et unicité de la racine positive x_n de (E_n).*

   a) *Résoudre l'équation pour $n = 1$ et $n = 2$.*

   Pour $n = 1$, l'équation est $x + x - 1 = 0$ qui s'écrit $2x - 1 = 0$. Elle admet une seule solution qui est $x = \frac{1}{2}$.

   Pour $n = 2$, l'équation est $x^2+x-1 = 0$. Le discriminant du polynôme est 5. L'équation admet deux solutions qui sont $x = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ et $x = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

   b) *Étudier les variations de la fonction $x \mapsto x^n + x - 1$ sur $[0; +\infty[$ pour $n \geq 1$.*
   En déduire que l'équation (E_n) admet une seule racine positive qu'on notera x_n et montrer que $0 < x_n < 1$ pour $n \geq 1$.

   C'est une fonction polynomiale. Elle est dérivable et sa fonction dérivée est donnée pour tout x par $nx^{n-1} + 1$. Pour tout $x \leq 0$ $nx^{n-1} + 1 \leq 1$ et la fonction dérivée est strictement positive sur $[0; +\infty[$. La fonction $x \mapsto x^n + x - 1$ est donc strictement croissante sur cet intervalle. C'est de plus une fonction continue qui vaut -1 en 0 et 1 en 1. Par théorème, elle s'annule une fois entre 0 et 1 et une seule fois sur $[0; +\infty[$ car elle y est strictement croissante.

2. *Étude de la fonction auxiliaire.*

   a) *Déterminer le domaine de définition de f et les limites de f aux extrémités de ce celui-ci.*

   Son expression comporte les facteurs $\ln(1-x)$ et $\ln(x)$. La variable x doit donc vérifier au moins $x > 0$ et $1 - x > 0$ soit $0 < x < 1$. Ensuite il convient que le dénominateur $\ln(x)$ ne s'annule pas ce qui est le cas si $x < 1$.

   En 0, le numérateur à pour limite $\ln(1) = 0$ par continuité et le dénominateur $-\infty$. La fonction a donc pour limite 0.

   En 1, $1 - x$ a pour limite 0 et par composition le numérateur à pour limite $-\infty$. Le dénominateur a pour limite $\ln(1) = 0$ par continuité et reste négatif car $\ln(x) < 0$ si $x < 1$. La fonction a donc pour limite $+\infty$.

   b) *Calculer alors la fonction dérivée f' et en déduire le tableau de variations de f.*

   f est le quotient défini de deux fonctions dérivables sur $]0, 1[$, elle l'est donc aussi et pour tout x de $]0, 1[$:

$$f'(x) = \frac{1}{\ln^2(x)}\left(-\frac{1}{1-x}\ln(x) - \frac{1}{x}\ln(1-x)\right).$$

Sur $]0,1[$, $\ln(x)$ et $\ln(1-x)$ sont strictement négatifs, x et $1-x$ strictement positifs et le carré du logarithme lui aussi strictement positif. f' est ainsi strictement positive sur l'intervalle $]0,1[$ et par théorème, f est strictement croissante.

On peut résumer tout cela dans le tableau suivant :

x	0		1
$f(x)$	0	$\nearrow$	$+\infty$

3. Étude de la suite (x_n).

   a) *Montrer que $f(x_n) = n$ pour $n \geq 1$.*
   Pour tout n entier non nul , x_n est la solution comprise entre 0 et 1 de E_n. Ce réel vérifie donc $0 < x_n < 1$ et $x_n^n + x_n - 1 = 0$ ou $x_n^n = 1 - x_n$. Ces deux membres sont strictement positifs et leurs logarithmes sont donc égaux, $\ln(x_n^n) = \ln(1-x_n)$ d'où $n\ln(x_n) = \ln(1-x_n)$. $\ln(x_n) \neq 0$ d'où $n = \dfrac{\ln(1-x_n)}{\ln(x_n)}$ qui est $f(x_n) = n$.

   b) *Montrer l'inégalité $x_n < x_{n+1}$ pour $n \geq 1$.*
   f est strictement croissante. De $n+1 > n$, on tire $f(x_{n+1}) > f(x_n)$ et donc $x_n < x_{n+1}$.

   c) *En déduire la convergence de la suite (x_n) vers un nombre réel ℓ et préciser la valeur de ℓ.*
   La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée par 0, elle converge donc vers un réel ℓ par valeurs supérieures. Pour tout $n \geq 1$, $f(x_n) = n$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = +\infty$. Par composition, on obtient que $\lim\limits_{x\to+\ell} f(x) = +\infty$ avec l dans $[0;1]$. Comme f est continue, ℓ n'est pas un des réels de $]0;1[$. Comme (x_n) est croissante $\ell > 0$. Par suite $\ell = 1$.