# Exercice 7

Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$. On définit la suite $(u_n)$ par $u_0 = 0$

et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$.

1) a) Montrer que l'équation $f(x) = x$, d'inconnue $c \in [0; 1]$, admet une seule solution, notée $\gamma$.
   b) Montrer que pour tout $x \in [0; 1], f(x) \in [0; 1]$.
   c) Montrer que $\forall x \in [0; 1], |f'(x)| \leq \frac{1}{\sqrt{e}}$
2) a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in [0; 1]$.
   b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - \gamma| \leq \frac{1}{\sqrt{e}} |u_n - \gamma|$.
   En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - \gamma| \leq \left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)^n$.
   c) Etablir que $(u_n)$ converge et donner sa limite.

# Exercice 7

1/ a) On pose $g(x) = f(x) - x$

$g(x) = e^{-\frac{x^2}{2}} - x$

$g'(x) = -x e^{-\frac{x^2}{2}} - 1$

On a $x \in [0;1]$ donc $g'(x) \leq 0$ sur $[0;1]$.

Ainsi, $g$ est continue et strictement décroissante sur $[0;1]$. De plus $g : [0;1] \to [e^{-\frac{1}{2}} - 1 ; 1]$ donc, par le théorème de la bijection, on a :

$$\lambda \in [0;1] \quad g(\lambda) = 0$$

soit

$$f(\lambda) - \lambda = 0$$

$$\boxed{f(\lambda) = \lambda}$$

b) On a :

$$0 \leq x \leq 1$$
$$0 \leq x^2 \leq 1$$
$$0 \geq -x^2 \geq -1$$
$$0 \geq -\frac{x^2}{2} \geq -\frac{1}{2}$$
$$e^0 \geq e^{-\frac{x^2}{2}} \geq e^{-\frac{1}{2}} \geq 0$$

$$\boxed{0 \leq f(x) \leq 1}$$

c) On a $f'(x) = -x e^{-\frac{x^2}{2}}$

$f''(x) = -e^{-\frac{x^2}{2}} - x^2 e^{-\frac{x^2}{2}} = -(1+x^2) e^{-\frac{x^2}{2}}$

Sur $[0;1]$, on a donc $f''(x) \leq 0$

donc $f'$ est décroissante.

Or, $f(0) = 0$ et $f'(1) = -e^{\frac{1}{2}} = -\frac{1}{\sqrt{e}}$

On a donc bien : $\boxed{|f'(x)| \leq \frac{1}{\sqrt{e}}}$

2) a) Montrons le par récurrence.
Initialisation : pour $n=0$ on a $0 \leq U_0 \leq 1$
$0 \leq 0 \leq 1$
La propriété est vraie pour le premier terme $n=0$.

Hérédité : Supposons que la propriété soit vraie pour un $n$ entier quelconque, qu'en est-il au rang suivant ?

D'après l'hypothèse de récurrence on a $0 \leq U_n \leq 1$ et l'énoncé nous donne $U_{n+1} = f(U_n)$.

$$0 \leq U_n \leq 1$$

$$f(0) \leq f(U_n) \leq f(1)$$

$$1 \geq U_{n+1} \geq \frac{1}{\sqrt{e}} \geq 0$$

$$\boxed{1 \geq U_{n+1} \geq 0}$$

Conclusion : Par récurrence, la propriété est bien vraie pour un $n$ entier quelconque au rang suivant.

b) D'après 1. c) on a $|f'(x)| \leq \frac{1}{\sqrt{e}}$

On a alors $-\frac{1}{\sqrt{e}} \leq f'(x) \leq \frac{1}{\sqrt{e}}$

$$\int_a^b -\frac{1}{\sqrt{e}}\,dx \leq \int_a^b f'(x)\,dx \leq \int_a^b \frac{1}{\sqrt{e}}\,dx$$

$$\left[-\frac{1}{\sqrt{e}}x\right]_a^b \leq \left[f(x)\right]_a^b \leq \left[\frac{1}{\sqrt{e}}x\right]_a^b$$

$$-\frac{1}{\sqrt{e}}(b-a) \leq f(b)-f(a) \leq \frac{1}{\sqrt{e}}(b-a)$$

On pose alors $b = u_n$

$a = \lambda$ ce qui donne :

$$-\frac{1}{\sqrt{e}}(u_n-\lambda) \leq u_{n+1}-\lambda \leq \frac{1}{\sqrt{e}}(u_n-\lambda)$$

$$\boxed{|u_{n+1}-\lambda| \leq \frac{1}{\sqrt{e}}|u_n-\lambda|}$$

Montrons la seconde inégalité par récurrence.

Initialisation : pour $n=0$ on a $|u_0-\lambda| \leq 1$

$|-\lambda| \leq 1$

La propriété est bien vraie pour le premier terme $n=0$. avec $\lambda \in [0,1]$

Hérédité : Supposons que la propriété soit vraie pour un $n$ entier quelconque, qu'en est-il au rang suivant ?

D'après l'hypothèse de récurrence on a $|u_n-\lambda| \leq \left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)^n$

et d'après la première partie de la question on a $|u_{n+1}-\lambda| \leq \frac{1}{\sqrt{e}}|u_n-\lambda|$

$$|u_n-\lambda| \leq \left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)^n$$

$$\frac{1}{\sqrt{e}}|u_n-\lambda| \leq \frac{1}{\sqrt{e}}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)^n$$

$$|u_{n+1}-\lambda| \leq \frac{1}{\sqrt{e}}|u_n-\lambda| \leq \left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)^{n+1}$$

$$\boxed{|u_{n+1}-\lambda| \leq \left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)^{n+1}}$$

Conclusion : Par récurrence, la propriété est vraie pour tout n entier au rang suivant.

c) On a : $|U_n - 2| \leq \left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)^n$

$$-\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)^n \leq U_n - 2 \leq \left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)^n$$

$$2 - \left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)^n \leq U_n \leq \left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)^n + 2.$$

Or, $\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)^n = 0$ car $\left|\frac{1}{\sqrt{e}}\right| < 1$

On a donc, par encadrement :

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} U_n = 2}$$