Exercice 6

Le but cet exercice est de calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln\left(\frac{n!}{n^n}\right)$

1) *Soit f la fonction définie sur* $]0;+\infty[$ *par :* $f(t) = t - 1 - \ln(t)$.
   a) *Calculer les limites de f en 0 et en $+\infty$.*
   b) *Justifier la dérivabilité de la fonction f sur* $]0;+\infty[$ *et déterminer f'.*
   c) *Dresser le tableau de variations de f.*
2) a) *Soit x un réel de* $]0;1[$. *Justifier l'existence de de l'intégrale :* $\int_x^1 f(t)dt$.
   b) *Montrer que la fonction* $t \to t\ln(t) - t$ *est dérivable sur* $]0;+\infty[$ *et déterminer sa dérivée.*
   c) *En déduire le calcul de* $\int_x^1 f(t)dt$ *et montrer que* $\lim\limits_{x\to0^+} \int_x^1 f(t)dt = \frac{1}{2}$.
3) *Soit n un entier supérieur ou égal à 2.*
   a) *Montrer que :* $\sum\limits_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{k}{n}\right) = \ln\left(\frac{n!}{n^n}\right)$.
   b) *En déduire que :* $\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{(n+1)}{2n} - 1 - \frac{1}{n}\ln\left(\frac{n!}{n^n}\right)$.
   c) *Soit k un entier tel que $2 \leq k \leq n$. En utilisant la monotonie de f sur* $]0;1]$, *montrer que :* $\forall t \ni \left[\frac{k-1}{n};\frac{k}{n}\right], f\left(\frac{k}{n}\right) \leq f(t)$ *et en déduire que :*
   $$\frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right) \leq \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(t)dt.$$
   d) *Déduire du résultat précédent l'inégalité suivante :* $\frac{1}{n}\sum\limits_{k=2}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \leq \int_{\frac{1}{n}}^{1} f(t)dt$.
   e) *A l'aide d'une démarche analogue à celle qui vient d'être effectuée, montrer que:*
   $$\int_{\frac{1}{n}}^{1} f(t)dt \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right).$$
   f) *Déduire alors des inégalités précédentes l'encadrement :*
   $$\int_{\frac{1}{n}}^{1} f(t)dt \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \leq \frac{1}{n}f\left(\frac{1}{n}\right) + \int_{\frac{1}{n}}^{1} f(t)dt.$$
4) a) *Déduire du dernier encadrement que :*
   $$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{1}{2}$$
   b) *Déterminer, à l'aide de l'égalité trouvée en 3. b) :*
   $$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\ln\left(\frac{n!}{n^n}\right).$$

Exercice 6

1) a) - $\lim\limits_{t\to 0} f(t) = +\infty$ car $\lim\limits_{t\to 0^+} \ln(t) = -\infty$

- $\lim\limits_{t\to +\infty} f(t) = \lim\limits_{t\to +\infty} t\left(1 - \frac{1}{t} - \frac{\ln(t)}{t}\right) = +\infty$

car $\lim\limits_{t\to +\infty} \frac{\ln(t)}{t} = 0$ par théorème de croissances comparées.

b) f est dérivable sur $]0;+\infty[$ comme composée de fonctions dérivables.

$f(t) = t - 1 - \ln(t)$

$$\boxed{f'(t) = 1 - \frac{1}{t}}$$

c) On remarque que l'on a $f'(1) = 0$. On peut donc en déduire le tableau de variations suivant :

t	0		1		$+\infty$
variations de f	$+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$
$f'(t)$		$-$	0	$+$	

2/a) f étant continue sur $[x,1]$, l'intégrale $\int_x^1 f(t)\,dt$ existe.

b) On pose $g(t) = t\ln(t) - t$

g est dérivable sur $]0;+\infty[$ en tant que composée de fonctions dérivables.

$g'(t) = \ln(t) + t \times \frac{1}{t} - 1 = \ln(t) + 1 - 1 = \ln(t)$

$$\boxed{g'(t) = \ln(t)}$$

c) $\int_x^1 f(t)\,dt = \int_x^1 t - 1 - \ln(t)\,dt = \int_x^1 t\,dt - \int_x^1 1\,dt - \int_x^1 \ln(t)\,dt$

$= [\frac{t^2}{2}]_x^1 - [t]_x^1 - [t\ln(t) - t]_1^x$

$= [\frac{t^2}{2} - t - (t\ln(t) - t)]_1^x$

$= [\frac{t^2}{2} - t - t\ln(t) + t]_1^x$

$= [\frac{t^2}{2} - t\ln(t)]_x^1$

$= \frac{1}{2} - (\frac{x^2}{2} - x\ln(x)) = \frac{1}{2} - \frac{x^2}{2} + x\ln(x)$

On a donc $\int_x^1 f(t)\,dt = -\frac{x^2}{2} + x\ln(x) + \frac{1}{2}$

Par conséquent, $\boxed{\lim_{x \to 0^+} \int_x^1 f(t)\,dt = \frac{1}{2}}$

3) a) On a : $\sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{k}{n}\right) = \ln\left(\frac{1}{n}\right) + \ln\left(\frac{2}{n}\right) + \dots + \ln\left(\frac{n}{n}\right)$

$= \ln\left(\frac{1}{n} \times \frac{2}{n} \times \dots \frac{n}{n}\right) = \ln\left(\frac{n!}{n^n}\right)$

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{k}{n}\right) = \ln\left(\frac{n!}{n^n}\right)}$$

b) On a : $$f\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{k}{n} - 1 - \ln\left(\frac{k}{n}\right)$$

$$\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n} - 1 - \ln\left(\frac{k}{n}\right)$$

$$\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} k - \sum_{k=1}^{n} 1 - \sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{k}{n}\right)$$

$$\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{n(n+1)}{2n} - n - \ln\left(\frac{n!}{n^n}\right)$$

$$\boxed{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{(n+1)}{2n} - 1 - \frac{1}{n}\ln\left(\frac{n!}{n^n}\right)}$$

c) On a : $$\frac{k-1}{n} \leq t \leq \frac{k}{n}$$

Or, puisque f est strictement décroissante sur $]0;1]$ et qu'on a également, grâce à l'énoncé : $2 \leq k \leq n$

$$0 < \frac{2}{n} \leq \frac{k}{n} \leq 1$$

$$0 < \frac{k-1}{n} \leq \frac{k}{n} \leq 1$$

On obtient donc : $\frac{k-1}{n} \geq t \geq \frac{k}{n}$

$$\boxed{f(t) \geq f\left(\frac{k}{n}\right)}$$

Intégrons alors cette inégalité :

$$\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f\left(\frac{k}{n}\right) dt \leq \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(t)\, dt$$

$$\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f\left(\frac{k}{n}\right) dt = \left[f\left(\frac{k}{n}\right) t\right]_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} = f\left(\frac{k}{n}\right)\frac{k}{n} - f\left(\frac{k}{n}\right)\frac{k-1}{n}$$

$$= f\left(\frac{k}{n}\right)\left(\frac{k-(k-1)}{n}\right) = \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

On a donc bien :

$$\boxed{\frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \leq \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(t)\,dt}$$

d) On a : $\frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \leq \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(t)\,dt$

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \leq \sum_{k=2}^{n} \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(t)\,dt$$

Or, grâce à la relation de Chasles on obtient :

$$\sum_{k=2}^{n} \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(t)\,dt = \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{2}{n}} f(t)\,dt + \int_{\frac{2}{n}}^{\frac{3}{n}} f(t)\,dt + \dots + \int_{\frac{n-1}{n}}^{1} f(t)\,dt$$

$$= \left[F(t)\right]_{\frac{1}{n}}^{\frac{2}{n}} + \left[F(t)\right]_{\frac{2}{n}}^{\frac{3}{n}} + \dots + \left[F(t)\right]_{\frac{n-1}{n}}^{1}$$

$$= F\left(\frac{2}{n}\right) - F\left(\frac{1}{n}\right) + F\left(\frac{3}{n}\right) - F\left(\frac{2}{n}\right) + \dots + F(1) - F\left(\frac{n-1}{n}\right)$$

$$= F(1) - F\left(\frac{1}{n}\right) = \left[F(t)\right]_{\frac{1}{n}}^{1} = \int_{\frac{1}{n}}^{1} f(t)\,dt$$

On a donc bien $\boxed{\frac{1}{n}\sum_{k=2}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \leq \int_{\frac{1}{n}}^{1} f(t)\,dt}$

e) Soit $1 \leq k \leq n-1$. f étant monotone décroissante sur $]0;1]$, on a, pour tout $t \in [\frac{k}{n}, 1]$:

$$f(t) \leq f\left(\frac{k}{n}\right) \text{ puis,}$$

$$\forall t \in \left[\frac{k}{n}; \frac{k+1}{n}\right], \quad f(t) \leq f\left(\frac{k}{n}\right)$$

En intégrant on a donc :

$$\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(t)dt \leq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f\left(\frac{k}{n}\right)dt \quad \text{soit}$$

$$\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(t)dt \leq \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

Ainsi, en sommant, on a :

$$\sum_{k=1}^{n-1} \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(t)dt \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

ce qui donne : $\displaystyle\int_{\frac{1}{n}}^{1} f(t)dt \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)$

f) D'après 3.d) on a $\displaystyle\frac{1}{n} \sum_{k=2}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \leq \int_{\frac{1}{n}}^{1} f(t)dt$

et d'après 3.e) on a $\displaystyle\int_{\frac{1}{n}}^{1} f(t)dt \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)$

Or $\displaystyle\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{1}{n} f\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n} \sum_{k=2}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$

On a ainsi ; en ajoutant membre à membre la quantité $\frac{1}{n} f\left(\frac{1}{n}\right)$:

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \leq \frac{1}{n} f\left(\frac{1}{n}\right) + \int_{\frac{1}{n}}^{1} f(t)\,dt \text{ soit}$$

$$\int_{\frac{1}{n}}^{1} f(t)\,dt \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \leq \frac{1}{n} f\left(\frac{1}{n}\right) + \int_{\frac{1}{n}}^{1} f(t)\,dt.$$

5) a) On a $\int_{\frac{1}{n}}^{1} f(t)\,dt \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \leq \frac{1}{n} f\left(\frac{1}{n}\right) + \int_{\frac{1}{n}}^{1} f(t)\,dt.$

Or, d'après 2.c), on a $\lim_{x \to 0^+} \int_x^1 f(t)\,dt = \frac{1}{2}$

Puisque $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0$, on a donc :

$$\frac{1}{2} \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \leq \frac{1}{n} f\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{2}$$

Or, $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} f\left(\frac{1}{n}\right) = 0$, on a donc, par encadrement

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{1}{2}}$$

b) D'après 3.b), on a : $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{(n+1)}{2n} - 1 - \frac{1}{n}\ln\left(\frac{n!}{n^n}\right)$

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) - \frac{(n+1)}{2n} + 1 = -\frac{1}{n}\ln\left(\frac{n!}{n^n}\right)$$

$$-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) + \frac{(n+1)}{2n} - 1 = \frac{1}{n}\ln\left(\frac{n!}{n^n}\right)$$

$\lim_{n \to +\infty} -\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = -\frac{1}{2}$; $\lim_{n \to +\infty} \frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2}$. Par conséquent :

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n}\ln\left(\frac{n!}{n^n}\right) = -1}$$