Exercice 5

On désigne par f une fonction définie et continue sur $[0;1]$ et on considère la suite (I_n) définie par:

$I_0 = \int_0^1 f(x)dx$ *et, pour tout n de $\mathbb{N}^*$,* $I_n = \int_0^1 x^n f(x)dx$.

L'objet de l'exercice est d'étudierla suite (I_n) pour différentes fonctions f.

1) *Dans cette question , on suppose que f est définie par :* $f(x) = \ln(1+x^2)$.
   a) Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que, pour tout n de $\mathbb{N}$, on a :
   $I_n = \frac{1}{n+1}\left(\ln(2) - 2\int_0^1 \frac{x^{n+2}}{1+x^2}dx\right)$.
   b) Etablir, pour tout réel x de $[0;1]$, l'encadrement: $0 \leq \frac{x^{n+2}}{1+x^2} \leq x^{n+2}$.
   c) Montrer que $\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \frac{x^{n+2}}{1+x^2}dx = 0$.
   d) Quelle est la limite de nI_n quand n tend vers $+\infty$?
2) *Dans cette question, on suppose que f est définie par :* $f(x) = \frac{1}{1+x+x^2}$.
   a) Pour tout n de $\mathbb{N}$, calculer $I_n + I_{n+1} + I_{n+2}$ en fonction de n.
   b) Etudier la monotonie éventuelle de la suite I_n.
   c) En déduire, pour tout entier n supérieur ou égal à 2, l'encadrement:
   $\frac{1}{3(n+1)} \leq I_n \leq \frac{1}{3(n-1)}$
   d) Quelle est la limite de nI_n quand n tend vers $+\infty$?
3) *Dans cette question, on suppose que f est définie par :* $f(x) = e^{-x}$
   a) Montrer que la suite (I_n) est décroissante. En déduire qu'elle est convergente.
   b) Etablir, pour tout n de $\mathbb{N}$, l'encadrement $0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$. *En déduire la valeur de la limite de la suite (I_n) quand n tend vers $+\infty$.*
   c) Exprimer, pour tout n de $\mathbb{N}$, I_{n+1} en fonction de I_n.
   d) Quelle est la limite de nI_n quand n tend vers $+\infty$?

Exercice 5

1) a) $I_n = \int_0^1 x^n f(x)\,dx = \int_0^1 x^n \ln(1+x^2)\,dx.$

On pose $U' = x^n$ $\quad U = \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$

et

$V = \ln(1+x^2)$ $\quad V' = \dfrac{2x}{1+x^2}$

On obtient alors $I_n = \left[\dfrac{x^{n+1}}{n+1}\ln(1+x^2)\right]_0^1 - \dfrac{1}{n+1}\displaystyle\int_0^1 \dfrac{x^{n+1}}{1+x^2}\times 2x\,dx$

$= \dfrac{\ln(2)}{n+1} - \dfrac{2}{n+1}\displaystyle\int_0^1 \dfrac{x^{n+2}}{1+x^2}\,dx = \dfrac{1}{n+1}\left(\ln(2) - 2\int_0^1 \dfrac{x^{n+2}}{1+x^2}\,dx\right)$

$$\boxed{I_n = \frac{1}{n+1}\left(\ln(2) - 2\int_0^1 \frac{x^{n+2}}{1+x^2}\,dx\right)}$$

b) On a : $\quad 0 \leq x \leq 1$

Donc en premier temps on a : $0 \leq x$

$0 \leq x^n$

$0.x^2 \leq x^n.x^2$

$0 \leq x^{n+2}$

$0 \leq \dfrac{x^{n+2}}{1+x^2}$

On obtient alors : $0 \leq x^{n+2}$

$0 \leq x^2$

$1 \leq 1+x^2$

$1 \geq \dfrac{1}{1+x^2}$

$x^{n+2} \geq \dfrac{x^{n+2}}{1+x^2}$

On a donc bien : $\boxed{0 \leq \dfrac{x^{n+2}}{1+x^2} \leq x^{n+2}}$

c) On a $$0 \leq \frac{x^{n+2}}{1+x^2} \leq x^{n+2}$$

$$0 \leq \int_0^1 \frac{x^{n+2}}{1+x^2}\,dx \leq \int_0^1 x^{n+2}\,dx$$

$$\int_0^1 x^{n+2}\,dx = \left[\frac{x^{n+3}}{n+3}\right]_0^1 = \frac{1}{n+3}.$$

On a donc :

$$0 \leq \int_0^1 \frac{x^{n+2}}{1+x^2}\,dx \leq \frac{1}{n+3}$$

Or, $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n+3} = 0$. Par encadrement, on a bien :

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} \int_0^1 \frac{x^{n+2}}{1+x^2}\,dx = 0}$$

d) On a, d'après 1.a) :

$$I_n = \frac{\ln(2)}{n+1} - \frac{2}{n+1}\int_0^1 \frac{x^{n+2}}{1+x^2}\,dx$$

$$I_n(n+1) = \ln(2) - 2\int_0^1 \frac{x^{n+2}}{1+x^2}\,dx$$

$$I_n n + I_n = \ln(2) - 2\int_0^1 \frac{x^{n+2}}{1+x^2}\,dx$$

Or, $\lim\limits_{n \to +\infty} \int_0^1 \frac{x^{n+2}}{1+x^2}\,dx = 0$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n = \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n+1}\left(\ln(2) - 2\int_0^1 \frac{x^{n+2}}{1+x^2}dx\right)$ $= 0$. Par conséquent, on a :

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} I_n n = \ln(2)}$$

2) a) $I_n + I_{n+1} + I_{n+2} = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x+x^2}\,dx + \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x+x^2}\,dx + \int_0^1 \frac{x^{n+2}}{1+x+x^2}\,dx.$

Grâce à la relation de Chasles on obtient :

$$I_n + I_{n+1} + I_{n+2} = \int_0^1 \frac{x^n + x^{n+1} + x^{n+2}}{1+x+x^2}\,dx$$

$$= \int_0^1 \frac{x^n(1+x+x^2)}{1+x+x^2}\,dx$$

$$= \int_0^1 x^n\,dx = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$$

$$\boxed{I_n + I_{n+1} + I_{n+2} = \frac{1}{n+1}}$$

b) Calculons $I_{n+1} - I_n$.

$$I_{n+1} - I_n = \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x+x^2}\,dx - \int_0^1 \frac{x^n}{1+x+x^2}\,dx.$$

Grâce à la relation de Chasles on a ;

$$I_{n+1} - I_n = \int_0^1 \frac{x^{n+1} - x^n}{1+x+x^2}\,dx = \int_0^1 \frac{x^n(x-1)}{1+x+x^2}\,dx$$

Or, puisque $0 \leq x \leq 1$, on $x - 1 \leq 0$ et donc on a :

$$I_{n+1} - I_n \leq 0$$

$$\boxed{I_{n+1} \leq I_n}$$

I_n est donc décroissante.

c) On sait que I_n est décroissante donc on a : - $I_{n+1} \leq I_n$
- $I_{n+2} \leq I_n$

On a donc : $I_{n+1} \leq I_n$

$$I_{n+1} + I_{n+2} \leq I_n + I_{n+2}$$

$$I_{n+1} + I_{n+2} \leq I_n + I_n$$

$$I_n + I_{n+1} + I_{n+2} \leq I_n + I_n + I_n$$

$$I_n + I_{n+1} + I_{n+2} \leq 3 I_n$$

$$\frac{1}{n+1} \leq 3 I_n$$

$$\frac{1}{3(n+1)} \leq I_n$$

De la même manière on en déduit que : - $I_{n-2} \geq I_{n-1}$
- $I_{n-1} \geq I_n$

On a donc $I_{n-1} \geq I_n$

$$I_{n-1} + I_n \geq 2 I_n$$

$$I_{n-2} + I_{n-1} + I_n \geq 3 I_n$$

$$\frac{1}{n-1} \geq 3 I_n$$

$$\frac{1}{3(n-1)} \geq I_n$$

On a donc : $\boxed{\frac{1}{3(n+1)} \leq I_n \leq \frac{1}{3(n-1)}}$

$$x^n \geq x^n e^{-x} \geq 0$$

Ainsi, I_n est décroissante et minorée par 0. Par théorème, elle converge donc.

b) On a $\quad 0 \leq x^n e^{-x} \leq x^n$

$$\int_0^1 0\,dx \leq \int_0^1 x^n e^{-x}\,dx \leq \int_0^1 x^n\,dx$$

$$0 \leq I_n \leq \int_0^1 x^n\,dx$$

$\int_0^1 x^n\,dx = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$. Ainsi, on a :

$$\boxed{0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}}$$

$\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n+1} = 0$ donc par encadrement on a :

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} I_n = 0}$$

c) $I_{n+1} = \int_0^1 x^{n+1} e^{-x}\,dx$.

Posons $U' = e^{-x}$ $\quad U = -e^{-x}$

et

$V = x^{n+1}$ $\quad V' = (n+1)x^n$

A l'aide d'une intégration par partie on a :

$$I_{n+1} = \left[-e^{-x} x^{n+1}\right]_0^1 + (n+1)\int_0^1 e^{-x} x^n\,dx = -e^{-1} + (n+1) I_n$$

$$\boxed{I_{n+1} = (n+1) I_n - e^{-1}}$$

d) D'après 2.c) on a :

$$\frac{1}{3(n+1)} \leq I_n \leq \frac{1}{3(n-1)}$$

$$\frac{n}{3n+3} \leq I_n n \leq \frac{n}{3n-3}$$

Or, $\lim_{n \to +\infty} \frac{n}{3n+3} = \lim_{n \to +\infty} \frac{n}{3n-3} = \frac{n}{3n} = \frac{1}{3}$

Par encadrement, on a donc $\boxed{\lim_{n \to +\infty} I_n n = \frac{1}{3}}$

3) a) Calculons $I_{n+1} - I_n$.

$$I_{n+1} - I_n = \int_0^1 x^{n+1} e^{-x} dx - \int_0^1 x^n e^{-x} dx.$$

Grâce à la relation de Chasles on a :

$$I_{n+1} - I_n = \int_0^1 x^{n+1} e^{-x} - x^n e^{-x} dx$$

$$= \int_0^1 x^n e^{-x} (x-1) dx.$$

Or, comme $0 \leq x \leq 1$, on a $x - 1 \leq 0$ donc :

$$I_{n+1} - I_n \leq 0$$

$$\boxed{I_{n+1} \leq I_n}$$

I_n est donc décroissante. Or, $0 \leq x \leq 1$

$0 \geq -x \geq -1$

$e^0 \geq e^{-x} \geq e^{-1} \geq 0$

$1 \geq e^{-x} \geq 0$

d) On a $\quad I_{n+1} = (n+1)I_n - e^{-1}$

$I_{n+1} = I_{nn} + I_n - e^{-1}$

$I_{n+1} + e^{-1} = I_{nn} + I_n$

Or, $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n = 0$. Par conséquent, on a :

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} I_{nn} = e^{-1}}$$