Exercice 4

Pour tout entier naturel n, *on définit la fonction* f_n *par la relation suivante, valable pour tout réel* x : $f_n(x) = \dfrac{e^{-nx}}{1+e^{-x}}$ *si* n *est supérieur à* 1, *avec* $f_0(x) = \dfrac{1}{1+e^{-x}}$.

On pose, pour tout n *de* $\mathbb{N}$, $u_n = \displaystyle\int_0^1 f_n(x)dx$.

1) *Vérifier que pour tout réel* x, *on a*: $\frac{1}{1+e^{-x}} = \frac{e^x}{1+e^x}$.
2) a) *Calculer la dérivée de la fonction qui, à tout réel* x *associe* $\ln(1+e^x)$, *et en déduire la valeur de* u_0.
   b) *Montrer que* $u_0 + u_1 = 1$, *et en déduire la valeur de* u_1.
3) *Montrer que la suite* (u_n) *est décroissante, et en déduire qu'elle est convergente. On note* l *sa limite.*
4) a) *Montrer que pour tout entier* n *supérieur ou égal à* 2, *on a*
   $$u_n + u_{n-1} = \frac{1}{n-1}(1-e^{-n+1}).$$
   b) *En déduire la valeur de* l.
5) a) *A l'aide d'un raisonnement par récurrence, montrer que pour tout entier* n *supérieur ou égal à* 2, *on a* : $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{(-1)^n\left(1-e^{-k+1}\right)}{k-1} = u_1 + (-1)^n u_n$.
   b) *En déduire la valeur de* $\displaystyle\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{(-1)^k(1-e^{-k+1})}{k-1}$.

Exercice 4

1) $\dfrac{1}{1+e^{-x}} = \dfrac{1}{1+(e^{x})^{-1}} = \dfrac{1}{1+\frac{1}{e^x}} = \dfrac{1}{\frac{e^x+1}{e^x}} = \dfrac{e^x}{e^x+1}$

$$\boxed{\frac{1}{1+e^{-x}} = \frac{e^x}{1+e^x}}$$

2)a) On pose $f(x) = \ln(1+e^x)$

$f'(x) = \dfrac{e^x}{1+e^x}$

Ainsi, on a $U_0 = \int_0^1 f_0(x)dx = \int_0^1 \dfrac{1}{1+e^{-x}} = \int_0^1 \dfrac{e^x}{1+e^x}$

$= [\ln|1+e^x|]_0^1 = \ln(1+e) - \ln(2) = \ln\left(\dfrac{1+e}{2}\right)$

$$\boxed{U_0 = \ln\left(\frac{1+e}{2}\right)}$$

b) On a $U_0 + U_1 = \int_0^1 \dfrac{1}{1+e^{-x}}dx + \int_0^1 \dfrac{e^{-x}}{1+e^{-x}}dx$

Grâce à la relation de Chasles cela donne :

$$U_0 + U_1 = \int_0^1 \frac{1+e^{-x}}{1+e^{-x}}dx$$

$$U_0 + U_1 = \int_0^1 1\,dx$$

$$U_0 + U_1 = [x]_0^1$$

$$U_0 + U_1 = 1$$

$$U_1 = 1 - U_0$$

$$\boxed{U_1 = 1 - \ln\left(\frac{1+e}{2}\right)}$$

3) Calculons $U_{n+1} - U_n$.

$$U_{n+1} - U_n = \int_0^1 \frac{e^{-(n+1)x}}{1+e^{-x}}\,dx - \int_0^1 \frac{e^{-nx}}{1+e^{-x}}\,dx.$$

Grâce à la relation de Chasles on obtient :

$$U_{n+1} - U_n = \int_0^1 \frac{e^{-(n+1)x} - e^{-nx}}{1+e^{-x}}\,dx$$

$$= \int_0^1 \frac{e^{-nx}(e^{-x} - 1)}{1+e^{-x}}\,dx$$

Or, on a $e^{-x} \leq 1$ donc $e^{-x} - 1 \leq 0$. On obtient donc :

$$\boxed{U_{n+1} - U_n \leq 0}$$

Un est donc bien décroissante.

Cherchons maintenant à montrer que Un est minorée. On a :

$$e^{-nx} \geq 0$$

$$\frac{e^{-nx}}{1+e^{-x}} \geq 0$$

$$f_n(x) \geq 0$$

$$\int_0^1 f_n(x)\,dx \geq 0$$

$$\boxed{U_n \geq 0}$$

Un est donc une suite décroissante et minorée. Par théorème, elle est donc convergente.

5)a) On a $U_n + U_{n-1} = \int_0^1 \frac{e^{-nx}}{1+e^{-x}}\,dx + \int_0^1 \frac{e^{-(n-1)x}}{1+e^{-x}}\,dx$

Grâce à la relation de Chasles on obtient :

$$U_n + U_{n-1} = \int_0^1 \frac{e^{-nx} + e^{-(n-1)x}}{1+e^{-x}}\,dx$$

$$= \int_0^1 e^{-nx}(1+e^{x}) \times \frac{1}{1+e^{-x}}\,dx$$

Or, d'après 1.) on a $\frac{1}{1+e^{-x}} = \frac{e^{x}}{1+e^{x}}$

$$= \int_0^1 e^{-nx}(1+e^{x}) \times \frac{e^{x}}{1+e^{x}}\,dx$$

$$= \int_0^1 e^{-nx} \times e^{x}\,dx = \int_0^1 e^{-(n-1)x}\,dx$$

$$= \left[-\frac{1}{(n-1)}e^{-(n-1)x}\right]_0^1 = -\frac{1}{(n-1)}e^{-(n-1)} + \frac{1}{n-1} = \frac{1}{(n-1)}\left(1 + e^{-n+1}\right)$$

$$\boxed{U_n + U_{n-1} = \frac{1}{n-1}\left(1 - e^{-n+1}\right)}$$

b) $l = \lim\limits_{n \to +\infty} U_n \qquad \lim\limits_{n \to +\infty} U_n + U_{n-1} = 2l$

Or, $\lim\limits_{n \to +\infty} e^{-n+1} = 0$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n-1}\left(1 - e^{-n+1}\right) = 0$

On a donc $2l = 0$

$$\boxed{l = 0}$$

5) a) Initialisation : pour $n=2$ on a $(-1)^2(1-e^{-1}) = U_1 + U_2$

$$1 - \frac{1}{e} = 1 - e^{-2+1}$$

$$1 - \frac{1}{e} = 1 - e^{-1}$$ en utilisant la relation trouvée en 5.a).

La propriété est donc vraie pour le premier terme $n=2$.

Hérédité : Supposons que la propriété soit vraie pour un n entier quelconque, qu'en est-il au rang suivant ?

D'après l'hypothèse de récurrence on a $\sum_{k=2}^{n} \frac{(-1)^k(1-e^{-k+1})}{k-1} = U_1 + (-1)^n U_n$

D'après 5.a) on a $U_n + U_{n-1} = \frac{1}{n-1}(1-e^{-n+1})$.

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{(-1)^k(1-e^{-k+1})}{k-1} = U_1 + (-1)^n U_n$$

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{(-1)^k(1-e^{-k+1})}{k-1} + \frac{(-1)^{n+1}(1-e^{-n})}{n} = U_1 + (-1)^n U_n + \frac{(-1)^{n+1}(1-e^{-n})}{n}$$

$$\sum_{k=2}^{n+1} \frac{(-1)^k(1-e^{-k+1})}{k-1} = U_1 + (-1)^n U_n + (-1)^{n+1}(U_{n+1} + U_n)$$

$$\sum_{k=2}^{n+1} \frac{(-1)^k(1-e^{-k+1})}{k-1} = U_1 + (-1)^n (U_n - (U_{n+1} + U_n))$$

$$\boxed{\sum_{k=2}^{n+1} \frac{(-1)^k(1-e^{-k+1})}{k-1} = U_1 + (-1)^{n+1} U_{n+1}}$$

Conclusion : Par récurrence, la propriété est vraie pour tout n entier au rang suivant.

b) On a $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{(-1)^k(1-e^{-k+1})}{k-1} = U_1 + (-1)^n U_n$

Or, d'après 4.b), on a $\lim_{n\to+\infty} U_n = 0$. On a donc :

$$\boxed{\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{(-1)^k(1-e^{-k+1})}{k-1} = U_1}$$