Exercice 3

1) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{x}{x^2+x+1}$.

   a) Etudier les variations de f ainsi que ses limites en $-\infty$ et $+\infty$.

   b) Calculer une équation de la tangente T à C à l'abscisse 0.

   c) Etudier la position relative de C et de T. Préciser les points d'intersection.

   d) Construire C et T.

2) On considère la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(un) \end{cases}$$

   a) Soit p un entier naturel non nul. Montrer que $f\left(\frac{1}{p}\right) \leq \frac{1}{p+1}$

   b) En déduire par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}, 0 < u_n \leq \frac{1}{n+1}$

   c) Calculer $\lim_{n\to+\infty} u_n$

3) a) Vérifier que : $\frac{1}{u_{n+1}} = u_n + 1 + \frac{1}{u_n}$

   b) En déduire, par récurrence et à l'aide du 2. b) que pour tout $n \geq 1$,

$$\frac{1}{u_n} \leq n + 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

   c) Justifier l'inégalitépour tout entier $k \geq 2, \frac{1}{k} \leq \int_{k-1}^{k} \frac{1}{x} dx$

   d) En déuire que : pour $n \geq 2, \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \leq \ln(n)$; puis que : pour $n \geq 2$,

$$\frac{1}{u_n} \leq n + 2 + \ln(n)$$

   e) A l'aide des résultats précédents, calculer $\lim_{n\to+\infty} nu_n$.

Exercice 3

1) a) On a $f(x) = \frac{x}{x^2+x+1}$

$$f'(x) = \frac{x^2+x+1-x(2x+1)}{(x^2+x+1)^2} = \frac{x^2+x+1-2x^2-x}{(x^2+x+1)^2}$$

$$= \frac{-x^2+1}{(x^2+x+1)^2}.$$

Comme on a $(x^2+x+1)^2 > 0$, le signe de $f'(x)$ dépend de $-x^2+1$.

$\Delta = 0^2 - 4 \times -1 \times 1 = 4$

$x_1 = \frac{-2}{-2} = 1$

$x_2 = \frac{2}{-2} = -1$.

De plus, on a $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x}{x^2} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$.

et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

On en déduit donc le tableau de variations suivant:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
variations de f	0	↘	-1	↗	$\frac{1}{3}$	↘	0
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

b) La tangente T à $\mathcal{C}$ à l'abscisse 0 est donnée par la formule:

$$T = f'(0)(x-0) + f(0).$$

Or $f'(0) = 1$ et $f(0) = 0$.

On a donc : $\boxed{T = x}$

c) Pour évaluer la position relative de $\mathcal{C}$ et de T, on procède de la manière suivante :

$$f(x) \leq x$$

$$\frac{x}{x^2+x+1} \leq x$$

$$\frac{x}{x^2+x+1} - x \leq 0$$

$$\frac{x - x(x^2+x+1)}{x^2+x+1} \leq 0$$

$$\frac{x - x^3 - x^2 - x}{x^2+x+1} \leq 0$$

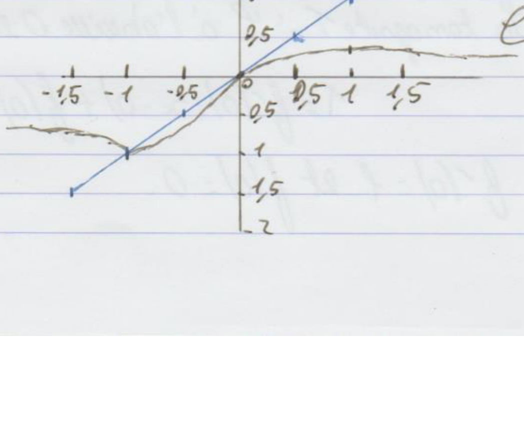
$$\frac{-x^3 - x^2}{x^2+x+1} \leq 0$$

$$\frac{-x^2(x+1)}{x^2+x+1} \leq 0$$

$$\boxed{x \geq -1}$$

De plus, on remarque, grâce à la dernière étape, que l'on a $f(x) = x$ pour $x = 0$ et $x = -1$ donc les points d'intersection sont 0 et -1.

d)



2/a) Calculons $f\left(\frac{1}{p}\right)-\frac{1}{p+1}$.

$$f\left(\frac{1}{p}\right)-\frac{1}{p+1}=\frac{\frac{1}{p}}{\frac{1}{p^2}+\frac{1}{p}+1}-\frac{1}{p+1}$$

$$=\frac{\frac{1}{p}}{\frac{1+p+p^2}{p^2}}-\frac{1}{p+1}$$

$$=\frac{p^2}{1+p+p^2}\times\frac{1}{p}-\frac{1}{p+1}$$

$$=\frac{p}{1+p+p^2}-\frac{1}{p+1}$$

$$=\frac{p(p+1)-(1+p+p^2)}{(1+p+p^2)(1+p)}$$

$$=\frac{p^2+p-1-p-p^2}{(1+p+p^2)(1+p)}$$

$$=-\frac{1}{(1+p+p^2)(1+p)}$$

On a donc : $f\left(\frac{1}{p}\right)-\frac{1}{p+1}\leq 0$ ce qui donne :

$$\boxed{f\left(\frac{1}{p}\right)\leq\frac{1}{p+1}}$$

b) <u>Initialisation</u> : pour $n=0$ on a $0 < U_0 \leq \frac{1}{0+1}$

La propriété est vraie pour le premier terme $n=0$.

$0 < 1 \leq 1$

<u>Hérédité</u> : Supposons que la propriété soit vraie pour un n entier quelconque. Qu'en est-il au rang suivant ?

D'après l'hypothèse de récurrence on a $0 < U_n \leq \frac{1}{n+1}$

D'après 2.a) on a $f\left(\frac{1}{p}\right) \leq \frac{1}{p+1}$

D'après l'énoncé on a $U_{n+1} = f(U_n)$.

$$0 < U_n \leq \frac{1}{n+1}$$

$$f(0) < f(U_n) \leq f\left(\frac{1}{n+1}\right)$$

$$0 < U_{n+1} \leq f\left(\frac{1}{n+1}\right) \leq \frac{1}{n+2}$$

$$\boxed{0 < U_{n+1} \leq \frac{1}{n+2}}$$

<u>Conclusion</u> : Par récurrence, la propriété est bien vraie pour tout n entier au rang suivant.

c) D'après 2. b) on a l'encadrement $0 < U_n \leq \frac{1}{n+1}$

Or $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n+1} = 0$. On a donc :

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} U_n = 0}$$ Par encadrement.

3)a) On a $\frac{1}{U_{n+1}} = \frac{1}{\frac{U_n}{U_n^2+U_n+1}} = \frac{U_n^2+U_n+1}{U_n}$

Or, $U_n+1+\frac{1}{U_n} = \frac{U_n^2+U_n+1}{U_n}$.

On a donc bien : $\boxed{\frac{1}{U_{n+1}} = U_n+1+\frac{1}{U_n}}$

b) Initialisation : pour $n=1$ on a $\frac{1}{U_1} \leq 1+1+1$

La propriété est bien vraie pour le premier terme $n=1$

$\frac{1}{f(U_0)} \leq 3$

$\frac{1}{\frac{1}{3}} \leq 3$

$3 \leq 3$

Hérédité : Supposons que la propriété soit vraie pour un n entier quelconque. Qu'en est-il au rang suivant ?

D'après l'hypothèse de récurrence on a $\frac{1}{U_n} \leq n+1+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$.

D'après le 3.b) on a $\frac{1}{U_{n+1}} = U_n+1+\frac{1}{U_n}$.

D'après le 2.b) on a $0 < U_n \leq \frac{1}{n+1}$.

$$\frac{1}{U_n} \leq n+1+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$$

$$\frac{1}{U_n}+1 \leq n+1+1+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$$

$$\frac{1}{U_n}+1+U_n \leq n+2+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}+U_n$$

$$\frac{1}{U_{n+1}} \leq n+2+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}+\frac{1}{n+1}$$

$$\boxed{\frac{1}{U_{n+1}} \leq n+2+\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k}}$$

Conclusion : Par récurrence, la propriété est bien vraie pour tout n entier au rang suivant.

c) On a : $k-1 \leq x \leq k$

$$\frac{1}{k-1} \geq \frac{1}{x} \geq \frac{1}{k}$$

Nous donc seulement : $\frac{1}{k} \leq \frac{1}{x}$

$$\int_{k-1}^{k} \frac{1}{k} dx \leq \int_{k-1}^{k} \frac{1}{x} dx$$

$$\frac{1}{k}[x]_{k-1}^{k} \leq \int_{k-1}^{k} \frac{1}{x} dx$$

$$\frac{k-(k-1)}{k} \leq \int_{k-1}^{k} \frac{1}{x} dx$$

$$\boxed{\frac{1}{k} \leq \int_{k-1}^{k} \frac{1}{x} dx}$$

d) D'après 3.c) on a $\frac{1}{k} \leq \int_{k-1}^{k} \frac{1}{x} dx$

$$\frac{1}{k} \leq [\ln|x|]_{k-1}^{k}$$

$$\frac{1}{k} \leq \ln(k) - \ln(k-1)$$

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \leq \sum_{k=2}^{n} \ln(k) - \ln(k-1)$$

Par télescopage, on a :

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \leq \ln(n) - \ln(1)$$

$$\boxed{\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \leq \ln(n)}$$

Or, d'après 3.b), on a : $\frac{1}{U_n} \leq n+1+\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$

$$\frac{1}{U_n} \leq n+1+1+\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k}$$

$$\frac{1}{U_n} \leq n+2+\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k}$$ ce qui donne, grâce à la majoration obtenue précédement :

$$\boxed{\frac{1}{U_n} \leq n+2+\ln(n)}$$

e) D'après 3.d) on a $\frac{1}{U_n} \leq n+2+\ln(n)$

$$U_n \geq \frac{1}{n+2+\ln(n)}$$

Or, d'après 2.b), on a $0 \leq U_n \leq \frac{1}{n+1}$ ce qui donne l'encadrement suivant :

$$\frac{1}{n+2+\ln(n)} \leq U_n \leq \frac{1}{n+1}$$

$$\frac{n}{n+2+\ln(n)} \leq U_n n \leq \frac{n}{n+1}$$

Or, $\lim_{n \to +\infty} \frac{n}{n+2+\ln(n)} = 1$ et $\lim_{n \to +\infty} \frac{n}{n+1} = 1$.

Par encadrement, on a donc : $\boxed{\lim_{n \to +\infty} U_n n = 1}$