## *Exercice* 1

*Montrer que les séries, dont les termes généraux suivent, sont convergentes et donner leurs sommmes.*

1) $a_n = \frac{1}{e^{2n}}$ $(n \in \mathbb{N})$.
2) $b_n = \frac{n^2}{n!}$ $(n \in \mathbb{N}^*)$.
3) $c_n = \frac{2}{(2n+1)(2n+3)}$ $(n \in \mathbb{N})$. *Pour cette dernière question, on pourra déterminer* $a$ *et* $b$

*tels que* $c_n = \dfrac{a}{2n+1} - \dfrac{b}{2n+3}$.

4) $d_n = \frac{3^{n+2}}{n!}$ $(n \in \mathbb{N})$.
5) $e_n = \frac{2^{n-1}}{n!}$ $(n \in \mathbb{N})$.
6) $f_n = \sum_{k=0}^{n} u_k\, v_{n-k}$ $(n \in \mathbb{N})$ où $\gamma$ *et* $\mu$ *sont deux réels fixés et où, pour tout entier naturel* $k$*, on a posé* $u_k = \dfrac{\gamma^k}{k!}$ *et* $v_k = \dfrac{\mu^k}{k!}$. *On donne* $\dfrac{1}{k!} * \dfrac{1}{(n-k)!} = \dfrac{1}{n!}\binom{n}{k}$.
7) $g_n = u_n - u_{n+1}$ où $u_n$ *est une suite convergente avec* $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Exercice 1

1) On a $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{e^{2n}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{e^2}\right)^n$

On reconnaît alors le terme général d'une série géométrique de raison $\frac{1}{e^2}$, avec $\left|\frac{1}{e^2}\right| < 1$. On a donc :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{e^2}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{1}{e^2}}$$

$$= \frac{1}{\frac{e^2-1}{e^2}}$$

$$\boxed{= \frac{e^2}{e^2-1}}$$

2) On a $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{n!} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{(n-1)!} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n-1)+1}{(n-1)!}$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n-1)}{(n-1)!} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n-1)!} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n-2)!} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n-1)!}$$

On reconnaît alors que $\frac{1}{(n-2)!}$ et $\frac{1}{(n-1)!}$ sont les termes généraux de séries exponentielles de paramètre 1. On pose alors :
- $k = n-2$ dans la première somme
- $k = n-1$ dans la seconde. On a alors :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} b_n = 1 + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k!} = 1 + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} - 1$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} = e + e$$

$$\boxed{= 2e}$$

3) posons l'équation : $\dfrac{a}{2n+1} - \dfrac{b}{2n+3} = \dfrac{2}{(2n+1)(2n+3)}$

$$\frac{a(2n+3) - b(2n+1)}{(2n+1)(2n+3)} = \frac{2}{(2n+1)(2n+3)}$$

$$\frac{2an + 3a - 2bn - b}{(2n+1)(2n+3)} = \frac{2}{(2n+1)(2n+3)}$$

On doit donc obtenir a et b tel que :

$$2an + 3a - 2bn - b = 2$$

On remarque alors qu'il suffit de prendre $a = b = 1$ pour obtenir :

$$2n + 3 - 2n - 1 = 2.$$

On a donc : $u_n = \dfrac{2}{(2n+1)(2n+3)} = \dfrac{1}{2n+1} - \dfrac{1}{2n+3}$

ce qui donne $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{1}{2n+1} - \dfrac{1}{2n+3} = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{1}{2n+1} - \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{1}{2n+3}$

$= \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{1}{2n+1} - \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{1}{2(n+1)+1}$.

En posant $v_n = \dfrac{1}{2n+1}$ on a donc $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} (v_n - v_{n+1})$.

$= v_0 - v_1 + v_1 - v_2 \ldots + v_n - v_{n+1}$. Par télescopage, on obtient :

$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = v_0 - v_{n+1} = 1 - \dfrac{1}{2n+3}$.

Or, $\lim_{n \to +\infty} 1 - \dfrac{1}{2n+3} = 1$. Par conséquent, on a :

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = 1}$$

4) $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3^{n+2}}{n!} = 3\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3^{n+1}}{n!} = 9\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3^n}{n!}$

On reconnaît alors le terme général d'une série exponentielle de raison 3. On a donc :

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = 9e^3}$$

5) $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^{n-1}}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2} \times \frac{2^n}{n!} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n}{n!}$

On reconnaît alors le terme général d'une série exponentielle de raison 2. On a donc :

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} b_n = \frac{e^2}{2}}$$

6) $\sum_{k=0}^{n} c_n = \sum_{k=0}^{n} U_k V_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{\lambda^k}{k!} \frac{\mu^{n-k}}{(n-k)!}$

$= \sum_{k=0}^{n} \lambda^k \mu^{n-k} \times \frac{1}{n!}\binom{n}{k} = \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n} \lambda^k \mu^{n-k}\binom{n}{k}.$

Grâce à la formule du binôme de Newton on obtient :

$\sum_{k=0}^{n} c_n = \frac{(\lambda+\mu)^n}{n!}.$

On reconnaît alors le terme général d'une série exponentielle de paramètre $\lambda+\mu$. On a donc :

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} c_n = e^{\lambda+\mu}}$$

7) $\sum_{n=0}^{+\infty} d_n = \sum_{n=0}^{+\infty} (U_n - U_{n+1})$

$= U_0 - U_1 + U_1 - U_2 + \ldots + U_n - U_{n+1}$. Par télescopage, on obtient alors :

$\sum_{n=0}^{+\infty} d_n = U_0 - U_{n+1}$

Or, $\lim_{n \to +\infty} U_0 - U_{n+1} = U_0$ car $\lim_{n \to +\infty} U_n = 0$. On a donc :

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} d_n = U_0}$$