AIX-MARSEILLE

SÉRIES MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES ET MATHÉMATIQUES ET TECHNIQUE

I. — Déterminer le module et l'argument de chaque solution de l'équation

$$z^4 - \sqrt{2}\, z^2 + 1 = 0,$$

où z appartient au corps des nombres complexes.

$$z^4 - z^2\sqrt{2} + 1 = 0 \quad (1)$$

Afin de ramener (1) à une équation du second dégré posons :

$\boldsymbol{Z} = z^2 \Rightarrow$ (1) devient $\boldsymbol{Z}^2 - \boldsymbol{Z}\sqrt{2} + 1 = 0$ (2)

où $\boldsymbol{a} = 1 \quad \boldsymbol{b} = -\sqrt{2} \quad \boldsymbol{c} = 1$

$$\Delta = \boldsymbol{b}^2 - 4\boldsymbol{ac} = \left(-\sqrt{2}\right)^2 - (4 \cdot 1 \cdot 1) = 2 - 4 = -2 = 2\boldsymbol{i}^2$$

$$\boldsymbol{Z}_1 = \frac{-\boldsymbol{b} + \sqrt{\Delta}}{2\boldsymbol{a}} = \frac{\sqrt{2} + \boldsymbol{i}\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\boldsymbol{i}\sqrt{2}}{2}$$

$$\boldsymbol{Z}_2 = \frac{-\boldsymbol{b} - \sqrt{\Delta}}{2\boldsymbol{a}} = \frac{\sqrt{2} - \boldsymbol{i}\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\boldsymbol{i}\sqrt{2}}{2}$$

$$\boxed{\boldsymbol{Z}_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\boldsymbol{i}\sqrt{2}}{2} \quad \text{et} \quad \boldsymbol{Z}_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\boldsymbol{i}\sqrt{2}}{2}}$$

$\boldsymbol{Z}_1$ et $\boldsymbol{Z}_2$ sont, ici, sous leur forme algébrique : $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{ib}$

Exprimons les sous leur forme trigonométrique : $\boldsymbol{r}(\cos\theta + \boldsymbol{i}\sin\theta)$

où $\boldsymbol{r} = \left|\sqrt{\boldsymbol{a}^2 + \boldsymbol{b}^2}\right| \qquad \boldsymbol{a} = \boldsymbol{r}\cos\theta \qquad \boldsymbol{b} = \boldsymbol{r}\sin\theta$

$$\boldsymbol{r} = \left|\sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}\right| = \left|\sqrt{\left(\frac{2}{4}\right) + \left(\frac{2}{4}\right)}\right| = \left|\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}\right)}\right| = \left|\sqrt{1}\right| = 1$$

Pour $\boldsymbol{Z}_1$: $\cos\theta = \frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{r}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\quad \sin\theta = \frac{\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{r}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\quad \Rightarrow \theta = \frac{\Pi}{4}\ [2\pi]$

Pour $\boldsymbol{Z}_2$: $\cos\theta = \frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{r}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\quad \sin\theta = \frac{\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{r}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \theta = -\frac{\Pi}{4}\ [2\pi]$

$$\boxed{\boldsymbol{Z}_1 = \cos\frac{\Pi}{4} + \boldsymbol{i}.\sin\frac{\Pi}{4} \quad \text{et} \quad \boldsymbol{Z}_2 = \cos\left(-\frac{\Pi}{4}\right) + \boldsymbol{i}.\sin\left(-\frac{\Pi}{4}\right)}$$

Selon la formule de Moivre :

$$\boldsymbol{Z}^n = \boldsymbol{r}^n\left(\cos \boldsymbol{n}.\theta + \boldsymbol{i}\sin \boldsymbol{n}.\theta\right) \quad (3)$$

$\boldsymbol{Z} = z^2 \ \Rightarrow\ z = \pm\sqrt{\boldsymbol{Z}} \ \Rightarrow\ z_1 = \boldsymbol{Z}^{\frac{1}{2}}$ et $z'_1 = -\boldsymbol{Z}^{\frac{1}{2}}$ (3) devient :

$$z_1 = \left|1^{\frac{1}{2}}\right|\left[\cos\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{4}\right) + \boldsymbol{i}\cdot\sin\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{4}\right)\right] = \left|\sqrt{1}\right|\left(\cos\frac{\pi}{8} + \boldsymbol{i}\cdot\sin\frac{\pi}{8}\right)$$

$z_1 = \cos\frac{\pi}{8} + \boldsymbol{i}.\sin\frac{\pi}{8}$ et $z'_1 = -\left(\cos\frac{\pi}{8} + \boldsymbol{i}.\sin\frac{\pi}{8}\right)$ l'opposé de z_1

$$\Rightarrow \arg(z'_1) = \arg(z) + \pi = \frac{\pi}{8} + \pi = \frac{9\pi}{8}\ [2\pi]$$

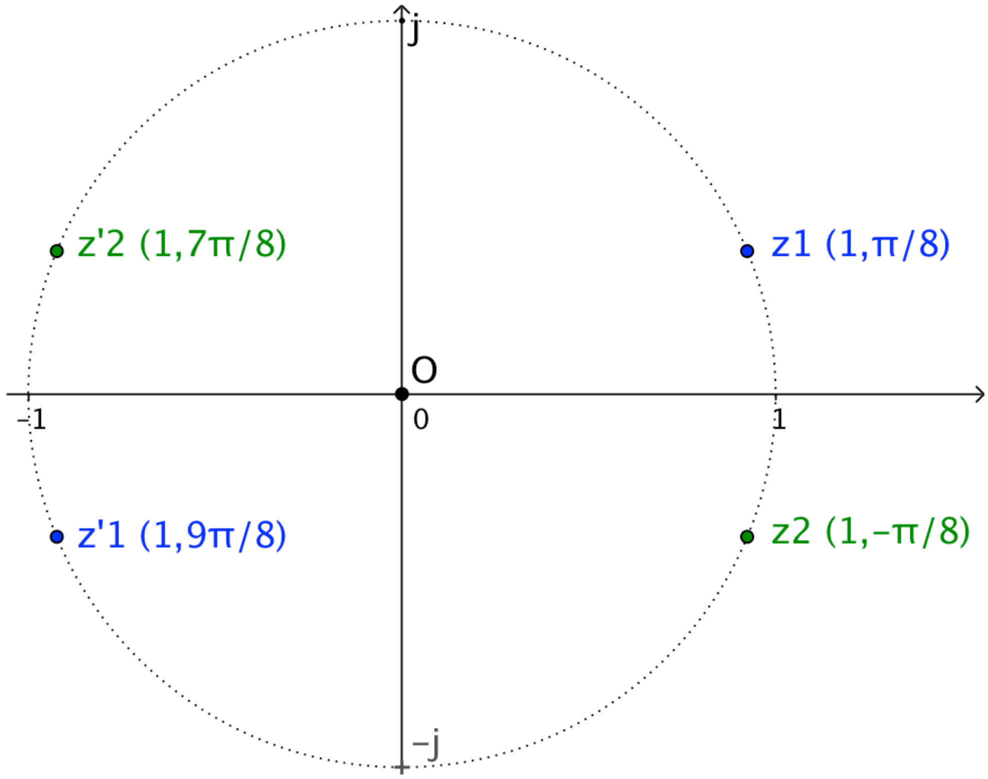
$$\boxed{z_1 = \cos\frac{\pi}{8} + \boldsymbol{i}\cdot\sin\frac{\pi}{8} \quad \text{et} \quad z'_1 = \cos\frac{9\pi}{8} + \boldsymbol{i}\cdot\sin\frac{9\pi}{8}}$$

De même que :

$$z_2 = \cos\left(-\frac{\pi}{8}\right) + \boldsymbol{i}\cdot\sin\left(-\frac{\pi}{8}\right) \ \text{ et } \ z'_2 = -\left[\cos\left(-\frac{\pi}{8}\right) + \boldsymbol{i}\cdot\sin\left(-\frac{\pi}{8}\right)\right]$$

$$\boxed{z_2 = \cos\left(-\frac{\pi}{8}\right) + \boldsymbol{i}\cdot\sin\left(-\frac{\pi}{8}\right) \quad \text{et} \quad z'_2 = \cos\frac{7\pi}{8} + \boldsymbol{i}\cdot\sin\frac{7\pi}{8}}$$

En conclusion, $z^4 - z^2\sqrt{2} + 1 = 0$ possède les 4 racines suivantes :



II. — Étant donné deux cercles, (C) et (C′), de rayons R et R′, tangents extérieurement en A, déterminer l'inversion (pôle et puissance) qui transforme le cercle (C) en une droite (*d*) tangente à (C′) et le cercle (C′) en une droite (*d*′) tangente à (C).

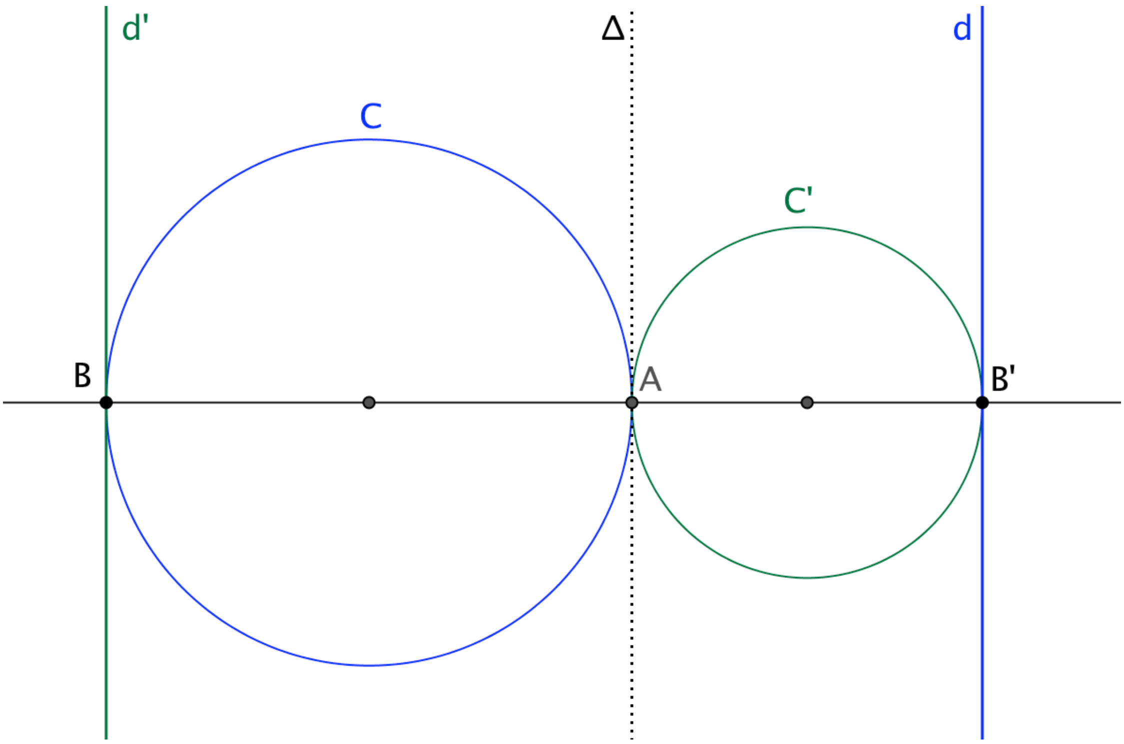
En déduire la construction de deux cercles, (Γ) et (Γ′), orthogonaux, tangents tous deux aux cercles (C) et (C′).

II-a. Détermination de I (O, p)

Rappels : l'inversion I, de pôle d'inversion O (point fixe) et de puissance p (réel non nul), est la transformation qui à tout point M, distinct de O, fait correspondre un point inverse M′ situé sur OM tel que :

- p = OM·OM′   où   OM et OM' sont orientées.
- p > 0 ⇒ OM et OM′ ont même sens et M et M′ sont d'un même côté de O.
- p < 0 ⇒ OM et OM′ sont de sens opposé et M et M′ sont de part et d'autre de O.

L'inverse d'un cercle passant par le pôle d'inversion est une droite parallèle à la tangente au cercle au point d'inversion.



Solution : (C) et (C') passent tous les deux par le centre de l'inversion recherchée puisque leur transformée est une droite. Puisque (C) et (C') sont extérieurement tangents, ils ont donc ce point commun comme point de contact. A est donc le pôle de l'inversion recherchée. Par ailleurs, B ∈ (C) est transformé en B' ∈ d parallèle à Δ.

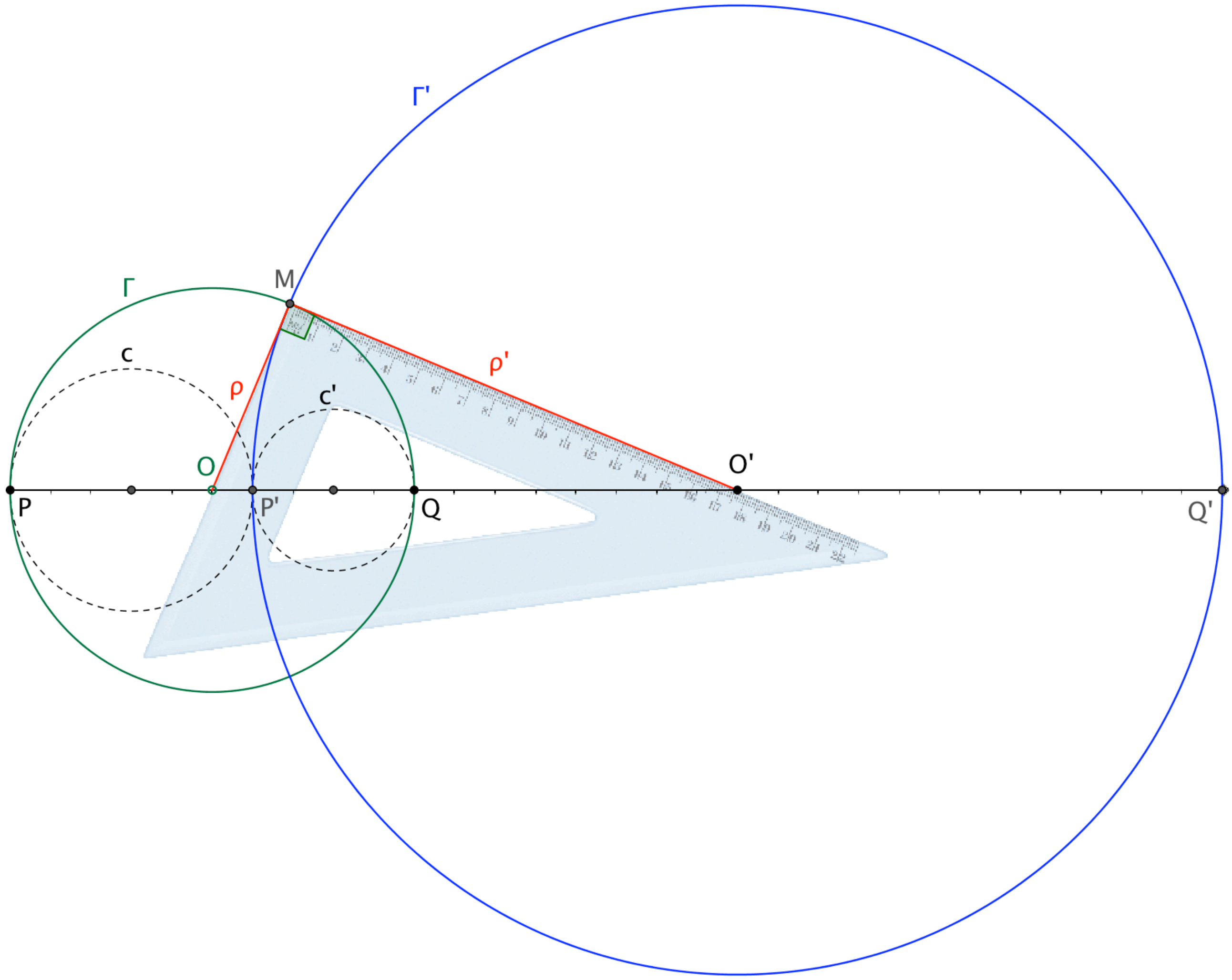
D'où : p = AB·AB' = – (2R) · (2R') = – 4 RR'

L'inversion recherchée est donc : $\boxed{\mathscr{I}\,(A, -4R \cdot R')}$

II-b. Construction : dans ce qui suit, les points A, B et B' deviennent P', P et Q.

Rappels : si 2 cercles sécants (**Γ**) et (**Γ**)' sont orthogonaux, le diamètre de l'un, ici (**Γ**) est divisé harmoniquement par le diamètre de l'autre, ici (**Γ'**). Sur notre figure :

$$\boxed{OP^2 = OQ^2 = OP' \cdot OQ'}$$



Solution : pour que (**Γ**) et (**Γ**)' soient tangents tous deux à (C) et (C)' :

- (**Γ**) passe par P et Q. Son centre O est le point milieu de [PQ].
- (**Γ**)' passe par P'. Son centre O' est le milieu de [P'Q']. Calculons son rayon :

$$\rho' = P'O' = \frac{P'Q'}{2} = \frac{OQ' - OP'}{2}$$

$$\boxed{\rho' = \frac{OQ^2}{2OP'} - \frac{1}{2}}$$

Sur notre figure :

$$\rho' = \frac{25}{2} - \frac{1}{2} = 12$$

III. — 1° Soit m un paramètre réel *strictement positif*.
a) On considère les polynômes $P(x) = x^2 + mx - 2$ et $Q(x) = mx - 1$. Pour quelle valeur de m le polynôme $P(x)$ est-il divisible par $Q(x)$?

III-1a. Détermination de la valeur de *m*

$P_{(x)}$ est un trinôme du second degré.

$Q_{(x)}$ est un binôme du premier degré.

Si $P_{(x)}$ est divisible par $Q_{(x)}$ alors :

$$x^2 + mx - 2 = (mx-1)\cdot(bx-a) \quad \text{avec : } a \in \mathbb{R} \text{ et } b \in \mathbb{R}$$
$$x^2 + mx - 2 = mbx^2 - amx - bx + a$$
$$x^2 + mx - 2 = mbx^2 - x\cdot(am+b) + a$$

En identifiant terme à terme l'équation :

$-2 \equiv a \quad$ soit $\quad a = -2$

$mx \equiv -x\cdot(am+b) \quad$ soit $\quad m = -am - b \Rightarrow m(a+1) = -b$

$m = \dfrac{-b}{a+1} = \dfrac{-b}{-2+1} \quad$ soit $\quad m = b$

$bmx^2 \equiv x^2 \quad$ soit $\quad mb = 1 \quad$ et comme $\quad m = b$

$m^2 = 1 \quad$ ou $\quad \boxed{m^2 - 1 = 0}$

Conclusion

$(m+1)\cdot(m-1) = 0 \quad \Rightarrow \quad m = -1 \quad$ et $\quad m = 1$

Comme $m > 0$, seule $\boxed{m = 1}$ est retenue.

Ainsi, avec $m = b = 1$ et $a = -2$ on a :

$P_{1(x)} = Q_{1(x)}\cdot(x+2)$ ce qui équivaut à dire que :

Pour $m = 1$: $P_{(x)}$ est divible par $Q_{(x)}$

Vérifions

$$P_{1(x)} = x^2 + x - 2 = (x-1)\cdot(x+2) = Q_{1(x)}\cdot(x+2)$$

Soit $\boxed{\dfrac{P_{1(x)}}{Q_{1(x)}} = x + 2}$

b) On suppose, dans toute la suite du problème, que m, qui reste strictement positif, est différent de 1. Soit f la fonction définie, pour x réel différent de $\frac{1}{m}$, par

$$f(x) = \frac{x^2 + mx - 2}{mx - 1}.$$

(Les candidats habitués à la notation

$$y = \frac{x^2 + mx - 2}{mx - 1}$$

pourront, s'ils le désirent, utiliser cette dernière notation.)

On désigne par C_m la courbe représentative par rapport à un repère orthonormé xOy, de la fonction f correspondant à la valeur m du paramètre. Calculer la dérivée de f. Pour quelles valeurs de m la fonction f admet-elle un maximum (relatif)? Construire C_2 et $C_{\frac{1}{2}}$ (on ne demande pas la construction de C_m dans le cas général). Montrer que les courbes C_m passent par trois points fixes.

III-1b.

Calcul de la dérivée

$$f(x) = \frac{x^2 + mx - 2}{mx - 1} = \frac{u}{v}$$

$$f'(x) = \frac{u'v - v'u}{v^2} = \frac{(2x+m)(mx-1) - m\left(x^2 + mx - 2\right)}{(mx-1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{2mx^2 - 2x + m^2x - m - mx^2 - m^2x + 2m}{(mx-1)^2}$$

$$\boxed{f'(x) = \frac{mx^2 - 2x + m}{(mx-1)^2}} \quad \text{pour } x \neq \frac{1}{m}$$

Valeurs de m

$f'(x) = 0$ si et seulement si : $mx^2 - 2x + m = 0$

Où : $a = m$; $b' = -1$; $c = m \Rightarrow \Delta' = b'^2 - ac$

$\Delta' = 1 - m^2$

Comme $m > 0$ et $m \neq 1$

• si $m > 1 \Rightarrow \Delta' < 0 \Rightarrow$ pas de racine

• si $0 < m < 1 \Rightarrow \Delta' > 0 \Rightarrow$ 2 racines x' et x''
et $f'(x) = 0$ pour x' et x'' ce qui implique que
$f(x)$ admette un maximum relatif en x' ou en x''

$\boxed{\text{Construction de } C_2}$

Si $m = 2 \Rightarrow f_2(x) = \dfrac{x^2 + 2x - 2}{2x - 1}$

Domaine de définition de $f_2(x)$

$f_2(x)$ est définie et continue pour $x \in \left]-\infty\ ;\ \dfrac{1}{2}\right[\cup \left]\dfrac{1}{2}\ ;\ +\infty\right[$

Détermination du(es) maximun de $f_2(x)$

$f'_2(x) = \dfrac{2x^2 - 2x + 2}{(2x-1)^2}$: pour $x \neq \dfrac{1}{2}$

$f'_2(x) = 0$ si : $x^2 - x + 1 = 0$ où $a = 1\ ;\ b' = -1\ ;\ c = 1$

$\Delta' = b'^2 - ac = 1 - 4 = -3 \Rightarrow \Delta' < 0 \Rightarrow$ pas de racine, donc

$f_2(x)$ n'admet pas de maximum.

Variation de $f_2(x)$: recherche du signe de $f'_2(x)$

– au dénominateur $(2x-1)^2$ est toujours positif

– le numérateur est du signe de "a" donc positif

– $f'_2(x)$ est toujours positive, et $f_2(x)$ croissante pour :

$$x \in \left] -\infty\ ;\ \frac{1}{2} \right[\ \cup\ \left] \frac{1}{2}\ ;\ +\infty \right[$$

Détermination des limites de $f_2(x)$

$$f_2(x) = \frac{x^2 + 2x - 2}{2x - 1} = \frac{x^2\left(1 + \dfrac{2}{x} - \dfrac{2}{x^2}\right)}{2x\left(1 - \dfrac{1}{2x}\right)} = \frac{x}{2}\left[\frac{1 + \dfrac{2}{x} - \dfrac{2}{x^2}}{1 - \dfrac{1}{2x}}\right]$$

$$\text{Si } x \to \pm\infty \Rightarrow \left[\frac{1 + \dfrac{2}{x} - \dfrac{2}{x^2}}{1 - \dfrac{1}{2x}}\right] \to 1 \ \text{ et } \ f_2(x) \to \frac{x}{2}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Si } x \to -\infty \ \Rightarrow f_2(x) \to -\infty \\ \text{Si } x \to +\infty \ \Rightarrow f_2(x) \to +\infty \end{array}}$$

Si $x \to \dfrac{1}{2}$ par valeurs $< \dfrac{1}{2} \Rightarrow f_2(x) \to \dfrac{\frac{1}{4}+1-2}{0^-} = \dfrac{-\frac{3}{4}}{0^-}$

Si $x \to \dfrac{1}{2}$ par valeurs $> \dfrac{1}{2} \Rightarrow f_2(x) \to \dfrac{\frac{1}{4}+1-2}{0^+} = \dfrac{-\frac{3}{4}}{0^+}$

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Si } x \to \frac{1}{2} \text{ par valeurs } < \frac{1}{2} \Rightarrow f_2(x) \to +\infty \\ \text{Si } x \to \frac{1}{2} \text{ par valeurs } > \frac{1}{2} \Rightarrow f_2(x) \to -\infty \end{array}}$$

Tableau de variations de $f(x)$

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	||	$+$
$f(x)$	$-\infty \nearrow +\infty$	||	$-\infty \nearrow +\infty$

Points particuliers

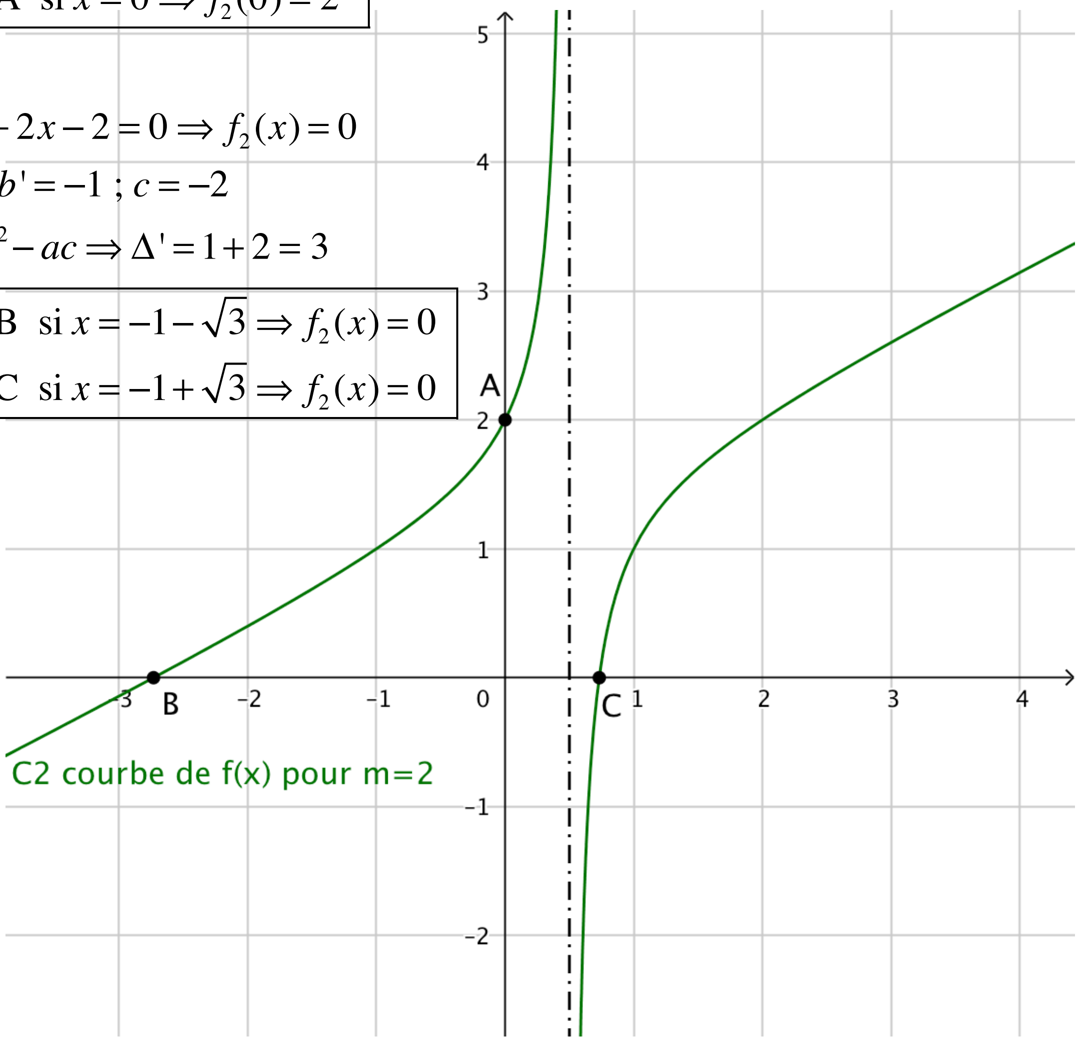
$\boxed{\text{Point A} \;\; \text{si } x=0 \Rightarrow f_2(0)=2}$

si $\;x^2+2x-2=0 \Rightarrow f_2(x)=0$

$a=1$; $b'=-1$; $c=-2$

$\Delta' = b'^2 - ac \Rightarrow \Delta' = 1+2 = 3$

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Point B} \;\; \text{si } x=-1-\sqrt{3} \Rightarrow f_2(x)=0 \\ \text{Point C} \;\; \text{si } x=-1+\sqrt{3} \Rightarrow f_2(x)=0 \end{array}}$$



Construction de $C_{\frac{1}{2}}$

Si $m = \dfrac{1}{2} \Rightarrow f_{\frac{1}{2}}(x) = \dfrac{x^2 + \frac{1}{2}x - 2}{\frac{1}{2}x - 1}$

Domaine de définition de $f_{\frac{1}{2}}(x)$

$f_{\frac{1}{2}}(x)$ est définie et continue pour $x \in \left]-\infty \ ; \ 2\right[\cup \left]2 \ ; \ +\infty\right[$

Détermination du(es) maximun de $f'_{\frac{1}{2}}(x)$

$$f'_{\frac{1}{2}}(x) = \frac{\frac{1}{2}x^2 - 2x + \frac{1}{2}}{\left(\frac{1}{2}x - 1\right)^2} \qquad \text{pour } x \neq 2$$

$f'_{\frac{1}{2}}(x) = 0$ si : $\dfrac{1}{2}x^2 - 2x + \dfrac{1}{2} = 0$

où $a = \dfrac{1}{2}$; $b' = -1$; $c = \dfrac{1}{2}$

$\Delta' = b'^2 - ac = 1 - \dfrac{1}{4} = \dfrac{3}{4} \Rightarrow \Delta' > 0 \Rightarrow$ 2 racines

$$x_1 = \frac{1 + \sqrt{\frac{3}{4}}}{\frac{1}{2}} = 2\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2 + \sqrt{3} \simeq 3,73$$

$$x_2 = \frac{1 - \sqrt{\frac{3}{4}}}{\frac{1}{2}} = 2\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2 - \sqrt{3} \simeq 0,27$$

$$f_{\frac{1}{2}}(x_1) = \frac{\left(2+\sqrt{3}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(2+\sqrt{3}\right) - 2}{\frac{1}{2}\left(2+\sqrt{3}\right) - 1} = \frac{(4 + 4\sqrt{3} + 3) + \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) - 2}{\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) - 1}$$

$$f_{\frac{1}{2}}(x_1) = \frac{6 + \frac{9}{2}\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{12 + 9\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{12\sqrt{3} + 27}{3} = 9 + 4\sqrt{3} \simeq 15,93$$

$$f_{\frac{1}{2}}(x_2)=\frac{\left(2-\sqrt{3}\right)^2+\frac{1}{2}\left(2-\sqrt{3}\right)-2}{\frac{1}{2}(2-\sqrt{3})-1}=\frac{4-4\sqrt{3}+3+1-\frac{\sqrt{3}}{2}-2}{1-\frac{\sqrt{3}}{2}-1}$$

$$f_{\frac{1}{2}}(x_2)=\frac{6-\frac{9}{2}\sqrt{3}}{-\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{12-9\sqrt{3}}{-\sqrt{3}}=\frac{-12\sqrt{3}+27}{3}=9-4\sqrt{3}\simeq 2{,}07$$

$f_{\frac{1}{2}}(x_2)$ admet 2 "maximum" :
Point D $\left(2-\sqrt{3}\ ;\ 9-4\sqrt{3}\right)$
Point E $\left(2+\sqrt{3}\ ;\ 9+4\sqrt{3}\right)$

Détermination des limites de $f_2(x)$

$$f_{\frac{1}{2}}(x)=\frac{x^2+\frac{1}{2}x-2}{\frac{1}{2}x-1}=\frac{x^2\left(1+\frac{1}{2x}-\frac{2}{x^2}\right)}{\frac{1}{2}x\left(1-\frac{2}{x}\right)}=2x\left[\frac{1+\frac{1}{2x}-\frac{2}{x^2}}{1-\frac{2}{x}}\right]$$

$$\text{Si } x\to\pm\infty\Rightarrow\left[\frac{1+\frac{1}{2x}-\frac{2}{x^2}}{1-\frac{2}{x}}\right]\to 1 \quad \text{et} \quad f_{\frac{1}{2}}(x)\to 2x$$

Si $x\to-\infty \;\Rightarrow f_{\frac{1}{2}}(x)\to-\infty$
Si $x\to+\infty \;\Rightarrow f_{\frac{1}{2}}(x)\to+\infty$

Si $x\to 2$ par valeurs $<2\Rightarrow f_{\frac{1}{2}}(x)\to\dfrac{4+1-2}{0^-}=\dfrac{3}{0^-}$

Si $x\to 2$ par valeurs $>2\Rightarrow f_{\frac{1}{2}}(x)\to\dfrac{4+1-2}{0^+}=\dfrac{3}{0^+}$

Si $x\to 2$ par valeurs $<2\Rightarrow f_{\frac{1}{2}}(x)\to-\infty$
Si $x\to 2$ par valeurs $>2\Rightarrow f_{\frac{1}{2}}(x)\to+\infty$

Variation de $f_{\frac{1}{2}}(x)$: recherche du signe de $f'_{\frac{1}{2}}(x)$

– au dénominateur $\left(\frac{1}{2}x-1\right)^2$ est toujours positif

– le signe du numérateur est celui de $\frac{1}{2}x^2-2x+\frac{1}{2}$

– le signe de $f'_{\frac{1}{2}}(x)$ est donc celui de $\frac{1}{2}x^2-2x+\frac{1}{2}$

Tableau de variation de $f_2(x)$

x	$-\infty$		$2-\sqrt{3}$		2		$\sqrt{3}+2$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$9-4\cdot\sqrt{3}$	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$4\cdot\sqrt{3}+9$	↗	$+\infty$

Calcul des points particuliers

$$\boxed{\text{Point A si } x=0 \Rightarrow f_{\frac{1}{2}}(0)=2}$$

$$f_{\frac{1}{2}}(x)=0 \quad \text{si} \quad x^2+\frac{1}{2}x-2=0$$

$$a=1\ ;\ b=\frac{1}{2}\ ;\ c=-2$$

$$\Delta=b^2-4ac=\frac{1}{4}+8=\frac{33}{4}$$

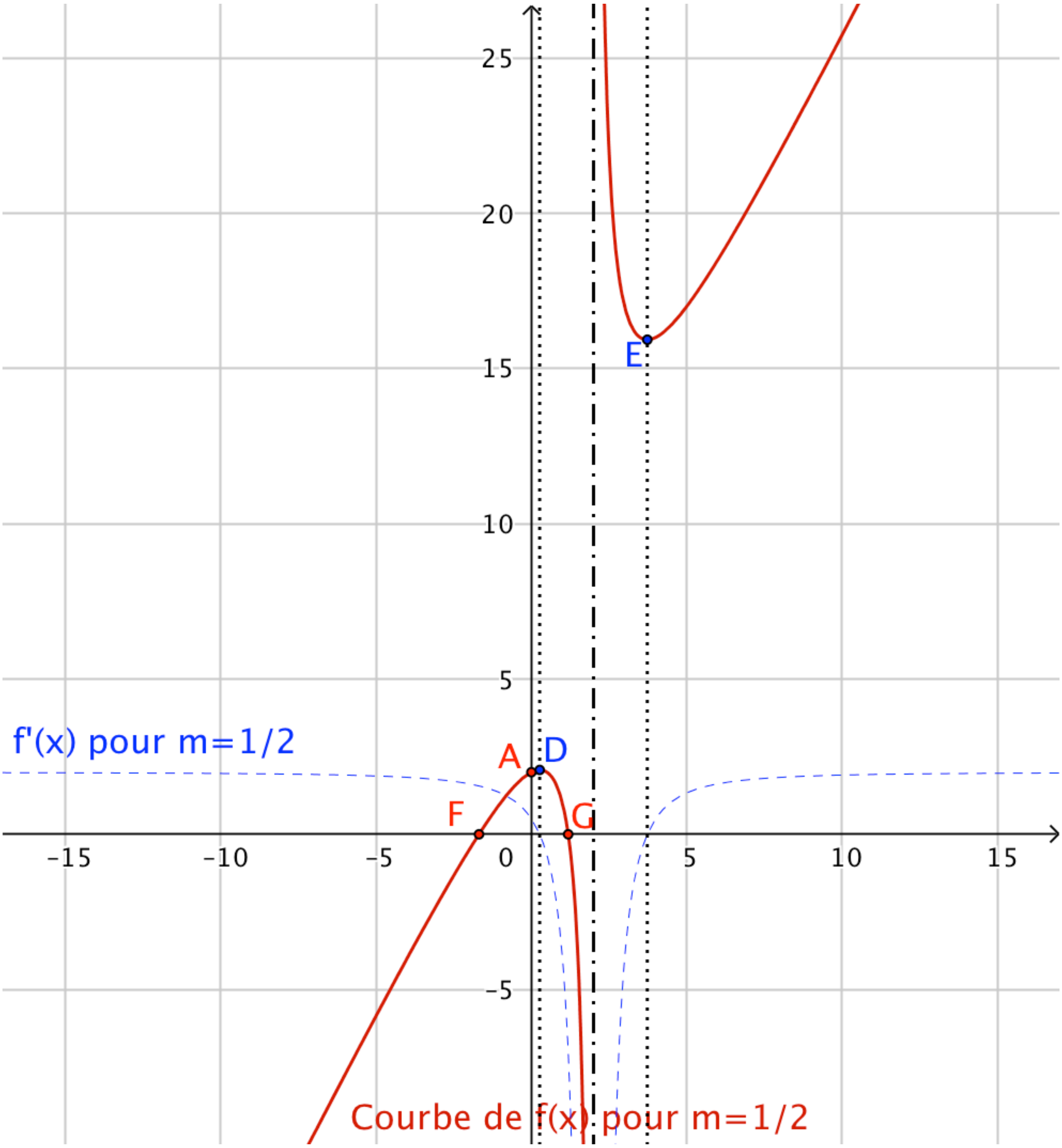
$$x_1=-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{33}{4}}=-\frac{1}{4}\left(1-\sqrt{33}\right)\simeq 1{,}19$$

$$x_2=-\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{33}{4}}=-\frac{1}{4}\left(1+\sqrt{33}\right)\simeq -1{,}69$$

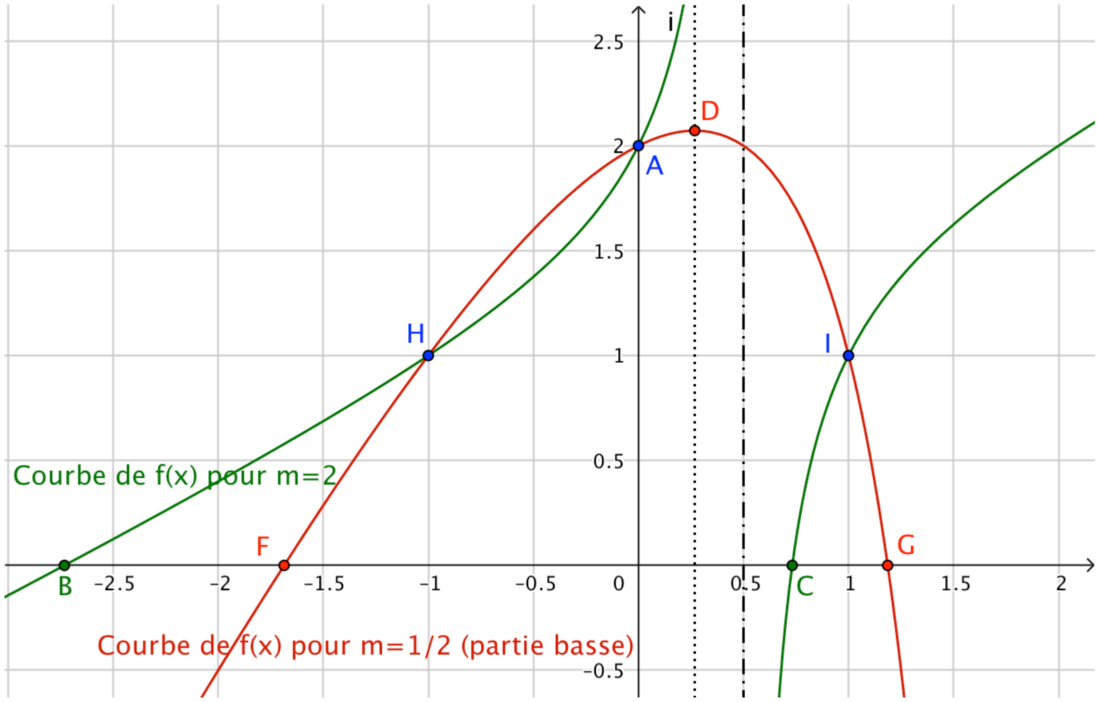
Points particuliers

Point F si $x=-\frac{1}{4}\left(1+\sqrt{33}\right) \Rightarrow f_{\frac{1}{2}}(x)=0$

Point G si $x=-\frac{1}{4}\left(1-\sqrt{33}\right) \Rightarrow f_{\frac{1}{2}}(x)=0$



C_m passent par 3 points fixes



$$y=\frac{x^2+mx-2}{mx-1}$$

$$y(mx-1)=x^2+mx-2$$

$$ymx-y-x^2-mx+2=0$$

$$x(y-1)\cdot m+\left(-y-x^2+2\right)=0$$

En posant : $f=x(y-1)$ et $g=\left(-y-x^2+2\right)$

Il vient : $\boxed{f\cdot m+g=0}$ (1)

(1) sera vraie $\forall m$ si et seulement si $f=g=0$

Résolvons donc le système :

$$\begin{cases} x(y-1)=0 \\ -y-x^2+2=0 \end{cases}$$

• si $x(y-1)=0 \Rightarrow x=0$ et $y=1$

• en reportant $x=0$ dans $-y-x^2+2=0$ on a :

$-y+2=0 \Rightarrow y=2$ d'où le point :

$\boxed{A(0\ ;\ 2)}$

• en reportant $y=1$ dans $-y-x^2+2=0$ on a :

$-1-x^2+2=0 \Rightarrow x^2-1=0$ d'où les points :

$\boxed{H(-1\ ;\ 1) \text{ et } I(1\ ;\ 1)}$

2° Soit $y = kx$ l'équation d'une droite D_k passant par O. Établir l'équation dont les racines sont les abscisses des points d'intersection de C_m et de D_k. Comment doit-on choisir m pour que toutes les droites D_k coupent C_m?

Equation et abscisses des points d'intersection

Aux points d'intersection entre $y = kx$ et C_m on a :

$$\frac{x^2 + mx - 2}{mx - 1} = kx$$

$$x^2 + mx - 2 = kx(mx - 1)$$

$$x^2 + mx - 2 - kmx^2 + kx = 0$$

$$\boxed{x^2(1 - km) + x(m + k) - 2 = 0} \quad (1)$$

Choix de m

Les racines de cette équation sont les abscisses des points d'intersection de D_k et de C_m si et seulement si son $\Delta \geq 0$

$$\Delta = (m + k)^2 + 8(1 - km)$$

$$\Delta = m^2 + 2km + k^2 + 8 - 8km$$

$$\Delta = m^2 - 6km + k^2 + 8$$

Examinons le signe de $\Delta = am^2 + bm + c$

$$a = 1 \;\; ; \;\; b' = -3k \;\; ; \;\; c = k^2 + 8$$

$$\partial' = 9k^2 - (k^2 + 8) = 9k^2 - k^2 - 8 = 8k^2 - 8$$

$$\partial' = 8(k^2 - 1)$$

Si $\boxed{\partial' < 0}$ alors $\Delta > 0$ (signe de $a = 1$) $\Rightarrow$ intersection

- $8(k^2 - 1) < 0$ pour $-1 < k < 1$

Si $\boxed{\partial' = 0}$ alors $\Delta > 0$ (signe de $a = 1$) $\Rightarrow$ intersection

- $8(k^2 - 1) = 0$ pour $k = -1$ et $k = 1$
- Si $\partial' = 0 \Rightarrow m_1 = m_2 = -\dfrac{b'}{a} = 3k$
- $k = -1 \Rightarrow m_1 = m_2 = -3$
- $k = 1 \Rightarrow m_1 = m_2 = 3$

Si $\boxed{\partial' > 0}$ alors :

- $\Delta < 0$ (signe de $-a = -1$) si $m_1 < m < m_2$
  il n'existe pas de racine $\Rightarrow$ pas d'intersection
- $\Delta > 0$ (signe de $a = 1$) pour $m < m_1$ et $m > m_2$
  il existe 2 racines $\Rightarrow$ intersection
- $\sqrt{8\left(k^2-1\right)} > 0$ si $k < -1$ et $k > 1$

Alors, dans ces conditions :

$$m_1 = \frac{-b' - \sqrt{\partial'}}{a} = 3k - \sqrt{8\left(k^2-1\right)}$$

$$m_2 = \frac{-b' + \sqrt{\partial'}}{a} = 3k + \sqrt{8\left(k^2-1\right)}$$

Comme $m > 0 \Rightarrow m_1 > 0$ et $m_2 > 0$; vérifions le :

Si $\boxed{k < -1}$

- posons $3k - \sqrt{8\left(k^2-1\right)} > 0 \Rightarrow 3k > \sqrt{8\left(k^2-1\right)}$
  Comme $3k < 0$ et $\sqrt{8\left(k^2-1\right)} > 0 \Rightarrow$ impossibilité
- posons $3k + \sqrt{8\left(k^2-1\right)} > 0 \Rightarrow 3k > -\sqrt{8\left(k^2-1\right)}$
  si $a < 0$ $b < 0$ et $a < b$ $\Rightarrow$ $a^2 > b^2$ donc :
  $9k^2 < 8\left(k^2-1\right) \Rightarrow 9k^2 - 8\left(k^2-1\right) < 0$ soit :
  $9k^2 - 8k^2 + 8 < 0$ ou $k^2 + 8 < 0$ $\Rightarrow$ impossibilité

Si $\boxed{k > 1}$

- posons $3k - \sqrt{8\left(k^2-1\right)} > 0 \Rightarrow 3k > \sqrt{8\left(k^2-1\right)}$
  si $a > 0$ $b > 0$ et $a > b$ $\Rightarrow$ $a^2 > b^2$ donc :
  $9k^2 > 8\left(k^2-1\right) \Rightarrow 9k^2 - 8\left(k^2-1\right) > 0$ soit :
  $9k^2 - 8k^2 + 8 > 0$ ou $k^2 + 8 > 0$ toujours vraie
- $3k + \sqrt{8\left(k^2-1\right)} > 0$ est toujours vraie donc :

$$\boxed{m_1 > 0 \text{ et } m_2 > 0 \text{ toujours vraies pour } k > 1}$$

Si $\boxed{k>1}$ vérifions que $m_1 \neq 1$ et $m_2 \neq 1$

- $m_2 = 3k + \sqrt{8\left(k^2-1\right)} \Rightarrow m_2 > 3$
- $m_1 = 3k - \sqrt{8\left(k^2-1\right)} = 1 \Rightarrow 3k-1 = \sqrt{8\left(k^2-1\right)}$

$(3k-1)^2 = 8\left(k^2-1\right) \Rightarrow 9k^2 - 6k + 1 - 8k^2 + 8 = 0$

$k^2 - 6k + 9 = 0 \Rightarrow (k-3)^2 = 0$ et donc :

$\boxed{m_2 \neq 1 \text{ toujours vraie et } m_1 \neq 1 \text{ si } k \neq 3}$

Si $\boxed{k=0}$; étudions ce cas particulier :

(1) est ramenée à : $x^2 + mx - 2 = 0$

sous la forme : $ax^2 + bx + c$ avec :

$a = 1$; $b = m$; $c = -2$; $\delta = b^2 - 4ac$

$$x' = \frac{-m-\sqrt{m^2+8}}{2} \quad \text{et} \quad x'' = \frac{-m+\sqrt{m^2+8}}{2}$$

C_m coupe D_k sur l'axe des abscisses en
x' et x'' puique si $k=0 \Rightarrow y = kx = 0$

Conclusion

Pour tout $k \in [0\ ;\ +\infty[- \{3\}$ et pour $m > 0$

toutes les droites D_k coupent C_m pour tout

$$\boxed{m \in \left]0\ ;\ 3k - \sqrt{8\left(k^2-1\right)}\right] \cup \left[3k + \sqrt{8\left(k^2-1\right)}\ ;\ +\infty\right[- \{1\}}$$

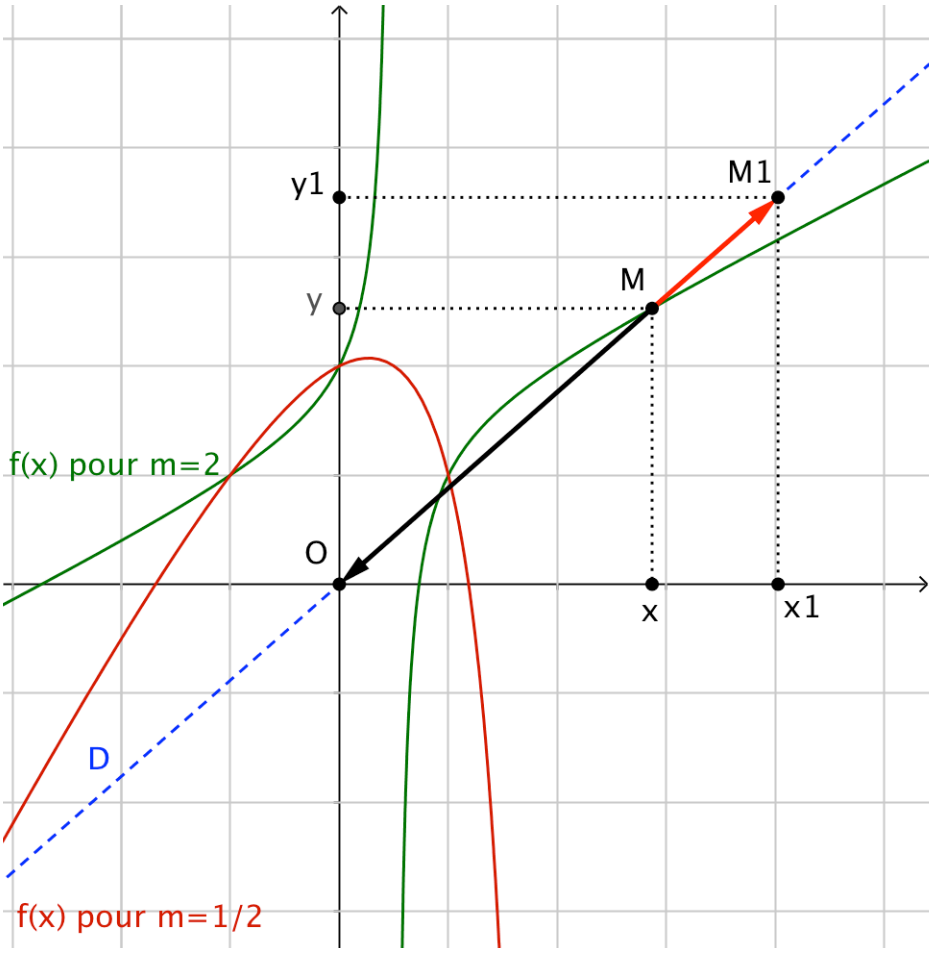
3° On se donne un point M_1 distinct de O, de coordonnées x_1 et y_1 et l'on écrit les équations paramétriques de la droite OM_1 sous la forme

$$x = \frac{x_1}{1+\lambda}, \qquad y = \frac{y_1}{1+\lambda}.$$

Donner une signification géométrique du paramètre λ.

Montrer que, pour que le point de paramètre λ appartienne à C_m, il faut et il suffit que λ soit solution d'une équation du second degré, qu'on établira.

Quelle inégalité m doit-il vérifier pour qu'un des points d'intersection, et un seul, appartienne au segment OM_1 ?



Signification de λ

Soit $M(x,\, y)$ un point de la droite OM_1

$$x = \frac{x_1}{1+\lambda} \Rightarrow x(1+\lambda) = x_1$$

$$x + \lambda x = x_1 \Rightarrow \lambda x = x_1 - x$$

$$\lambda = \frac{x_1 - x}{x - 0} = \frac{\overrightarrow{MM_1}}{\overrightarrow{OM}} = -\frac{\overrightarrow{MM_1}}{\overrightarrow{MO}}$$

$$\boxed{\frac{\overrightarrow{MM_1}}{\overrightarrow{MO}} = -\lambda}$$

λ est le nombre réel égal au rapport de $\overrightarrow{MM_1}$ et $\overrightarrow{MO}$.

$$\boxed{\overrightarrow{MM_1} + \lambda\overrightarrow{MO} = 0}$$

Comme M_1 et O sont distincts, M est le barycentre du système $\{(M_1,\ 1)\ (O,\ \lambda)\}$ les points pondérés M_1 et O affectés respectivement des coefficients 1 et λ.

$\boxed{\lambda \text{ est le coefficient (ou le poids) de } O}$

λ solution d'une équation du second degré

Comme nous l'avons vu à la question précédente,
à l'intersection de $y = kx$ et de C_m on a :

$$x^2(1-km) + x(m+k) - 2 = 0$$

Comme $M \in OM_1 \Rightarrow x = \dfrac{x_1}{1+\lambda}$

Remplaçons x par sa valeur :

$$\left[\frac{x_1}{1+\lambda}\right]^2 (1-km) + \frac{x_1(m+k)}{1+\lambda} - 2 = 0$$

$$\frac{x_1^2(1-km)}{(1+\lambda)^2} + \frac{x_1(m+k)}{(1+\lambda)} - 2 = 0$$

$$x_1^2(1-km) + x_1(m+k)(1+\lambda) - 2(1+\lambda)^2 = 0$$

$$x_1^2(1-km) + x_1(m+k) + \lambda x_1(m+k) - 2(1+\lambda)^2 = 0$$

Posons : $x_1^2(1-km) + x_1(m+k) = K_1$

$$-2(1+\lambda)^2 + \lambda x_1(m+k) + K_1 = 0$$

$$-2\left(1+2\lambda+\lambda^2\right) + \lambda x_1(m+k) + K_1 = 0$$

$$-2\lambda^2 + \lambda x_1(m+k) - 4\lambda + K_1 - 2 = 0$$

$$-2\lambda^2 + \lambda\left[x_1(m+k) - 4\right] + K_1 - 2 = 0$$

Posons : $a = -2 \quad b = x_1(m+k) - 4 \quad c = K_1 - 2$

Il reste ;

$$\boxed{a\lambda^2 + b\lambda + c = 0}$$

Inégalité que m doit vérifier

Condition 1 :

$\dfrac{\overrightarrow{MM_1}}{\overrightarrow{MO}} = -\lambda$ nous indique que si $\boxed{\lambda > 0}$

$\overrightarrow{MM_1}$ et $\overrightarrow{MO}$ sont de sens opposé et donc que le point M se situe entre les points O et M_1.

Condition 2 :

Pour qu'un des points d'intersection et un seul appartienne au segment OM_1 il faut que l'équation :

$x^2(1-km)+x(m+k)-2=0$

n'admette qu'une seule racine, la racine double :

$x = -\dfrac{b}{2a}$ avec $a=(1-km)$ et $b=(m+k)$

$$\boxed{x = \frac{-(m+k)}{2(1-km)}}$$

Comme $M \in OM_1 \Rightarrow \quad x = \dfrac{x_1}{1+\lambda} \Rightarrow 1+\lambda = \dfrac{x_1}{x}$

$\lambda = \dfrac{x_1}{x} - 1$

Or, $\lambda > 0$ donc $\dfrac{x_1}{x} - 1 > 0 \Rightarrow \dfrac{x_1}{x} > 1$

soit $x_1 > x$

$x_1 > \dfrac{-(m+k)}{2(1-km)}$

$2x_1(1-km) > -(m+k)$

$2x_1 - 2kx_1m > -m-k$

$m - 2kx_1m > -k - 2x_1$

$m(1-2kx_1) > -k-2x_1$

$m > \dfrac{-k-2x_1}{1-2kx_1}$

$$\boxed{m > \frac{k+2x_1}{2kx_1-1}}$$

4° On se donne un nombre réel, a, et l'on considère une courbe C_m correspondant à une valeur $m < 1$. Quel est l'ensemble Δ_m des points M_1 tels que la droite OM_1 coupe C_m en deux points M' et M'' et que

$$\frac{\overline{M'M_1}}{\overline{M'O}} + \frac{\overline{M''M_1}}{\overline{M''O}} = a ?$$

Montrer que, si m varie et si a reste fixe, Δ_m passe par un point fixe.

Ensemble Δ_m des points M_1

$$\frac{\overline{M'M_1}}{\overline{M'O}} + \frac{\overline{M''M_1}}{\overline{M''O}} = a$$

$$\frac{\overline{M'O} + \overline{OM_1}}{\overline{M'O}} + \frac{\overline{M''O} + \overline{OM_1}}{\overline{M''O}} = a$$

$$1 + \frac{\overline{OM_1}}{\overline{M'O}} + 1 + \frac{\overline{OM_1}}{\overline{M''O}} = a$$

$$2 + \overline{OM_1}\left(\frac{1}{\overline{M'O}} + \frac{1}{\overline{M''O}}\right) = a$$

$$\overline{OM_1} = \frac{a-2}{\left(\frac{1}{\overline{M'O}} + \frac{1}{\overline{M''O}}\right)}$$

Remplaçons $\overline{OM_1}$, $\overline{M'O}$ et $\overline{M''O}$ par leurs abscisses :

$$x_1 = \frac{a-2}{\left(-\frac{1}{x'} - \frac{1}{x''}\right)} = \frac{2-a}{\frac{x'+x''}{x'x''}} = (2-a)\frac{x'x''}{x'+x''}$$

$$x_1 = (2-a)\ \frac{P}{S}$$

$P =$ Produit et $S =$ Somme des racines de :

$$x^2(1-km) + x(m+k) - 2 = 0$$

qui ramenée à sa forme : $x^2 - Sx + P = 0$ donne :

$$x^2 + x\frac{m+k}{1-km} - \frac{2}{1-km} = 0 \qquad \text{pour} \quad 1-km \neq 0$$

x' et $x'' =$ abscisses des points d'intersection

de C_m et $y = kx$. Ici, de la droite OM_1

$$P = -\frac{2}{1-km} \qquad \text{et} \qquad S = -\frac{m+k}{1-km}$$

$$x_1 = (2-a)\frac{P}{S} = (2-a)\frac{-\dfrac{2}{1-km}}{-\dfrac{m+k}{1-km}} = (2-a)\frac{2}{m+k}$$

$$x_1 = \frac{4-2a}{m+k} \quad \text{avec} \quad k = \frac{y_1}{x_1} \quad \text{et} \quad 0 < m < 1$$

$$x_1 = \frac{4-2a}{m + \dfrac{y_1}{x_1}}$$

$$mx_1 + y_1 = 4 - 2a \quad \Rightarrow \quad y_1 + mx_1 + 2a - 4 = 0$$

pour $1 - km \neq 0$ soit $km \neq 1$ ou $\dfrac{y_1}{x_1} \neq \dfrac{1}{m}$

l'ensemble Δ_m des points M_1 est la droite : $y_1 + mx_1 + 2a - 4 = 0$

Point fixe pour $a = \text{constante}$ et $0 < m < 1$

$\forall m$ si $x_1 = 0 \Rightarrow y_1 = 2a - 4$

$\boxed{\Delta_m \text{ passera donc toujours par } M_1(0\ ,\ 2a-4)}$