DIRECTION GÉNÉRALE DES FINANCES PUBLIQUES

SUJET

MATHÉMATIQUES

Code matière : 030

Les candidats sont autorisés à utiliser les matériels suivants :

- les calculatrices non programmables sans mémoire alphanumérique ;

- les calculatrices avec mémoire alphanumérique et/ou avec écran graphique qui disposent d'une fonctionnalité « mode examen ».

Sont interdits :

- les téléphones portables ainsi que les montres et/ou tout autres objets et accessoires connectés ;

- les règles de calcul, compas, équerres, rapporteurs et tables de logarithmes ;

- l'utilisation de tout autre document ou matériel autre que le matériel nécessaire pour composer.

Le candidat traitera tous les exercices suivants.

EXERCICE 1

Dans cet exercice, on considère la fonction f définie comme suit :

$f(0)=1$, et pour tout x de $]-\infty;0[\cup]0;1[$, $f(x)=\dfrac{-x}{(1-x)\ln(1-x)}$

1) Montrer que f est continue sur $]-\infty;1[$.

2) a) Déterminer le développement limité de $\ln(1-x)$ à l'ordre 2 lorsque x est au voisinage de 0.

b) En déduire que f est dérivable en 0, puis vérifier que $f'(0)=\dfrac{1}{2}$.

3) a) Montrer que f est dérivable sur $]-\infty;0[$ et sur $]0;1[$, puis calculer $f'(x)$ pour tout réel x élément de $]-\infty;0[\cup]0;1[$.

b) Déterminer le signe de $\ln(1-x)+x$, lorsque x appartient à $]-\infty;1[$, puis en déduire les variations de f .

c) Déterminer les limites de f aux bornes de son domaine de définition, puis dresser son tableau de variations.

4) a) Établir que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, il existe un seul réel de $[0;1[$, noté u_n, tel que $f(u_n)=n$ et donner la valeur de u_1.

b) Montrer que la suite (u_n) converge et que $\lim_{n\to+\infty} u_n=1$.

EXERCICE 2

1) Montrer que tous les couples d'entiers $(u,v)\in\mathbb{Z}^2$ tels que $11u+7v=1$ sont de la forme $(2+7k,-3-11k)$ pour $k\in\mathbb{Z}$.

2) Rappel : si p est un nombre premier, alors $2^{(p-1)}\equiv 1[p]$ (petit théorème de Fermat).

a) Déterminer le reste de la division euclidienne de 2^{1000} par 7.

b) Déterminer le reste de la division euclidienne de 2^{1000} par 11.

3) Déduire de 1) et 2), le reste de la division euclidienne de 2^{1000} par 77.

EXERCICE 3

Soit E l'espace vectoriel sur le corps des réels, composé des fonctions polynômes à coefficients réels à une inconnue réelle de degré inférieur ou égal à 2 et du polynôme nul.

$\forall p\in E$ on note p' la dérivée première de p et p'' la dérivée seconde de p

Φ : $p\to\Phi(p)$ définie par $\forall x\in\mathbb{R}$

$$[\Phi(p)](x)=\int_0^1 \left[a\,p(t)+bxt\,p'(x-t)+cx^2t^2p''(x-t)\right]dt \quad \text{où} \quad a,b,c\in\mathbb{R}$$

Nous noterons $B(p_0,p_1,p_2)$ la base canonique de E avec $\forall x\in\mathbb{R}$

$$p_0(x)=1;\ p_1(x)=x;\ p_2(x)=x^2$$

1) Montrer que Φ est un endomorphisme de E.

2) a) Déterminer la matrice A de l'endomorphisme Φ dans B.

b) À quelle(s) condition(s) sur a, b, c l'endomorphisme Φ est-il bijectif ?

3) Considérons le cas particulier : $a=6; b=6; c=3$

a) Déterminer les valeurs propres de l'endomorphisme Φ.

b) Déterminer une base de chacun des sous-espaces propres.

c) Déterminer pour tout entier naturel n non nul la matrice B de l'endomorphisme Φ^n dans la base B .

EXERCICE 4

Déterminer un polynôme du 3e degré $P(x)$, à coefficients réels, sachant que la courbe représentative de $y=P(x)$ passe par un minimum en $(x=1 ; y=2)$ et que le reste de la division de $P(x)$ par (x^2+3x+2) est $(3-x)$.