

1. Combien de temps faut-il pour chauffer à 65°C l'eau d'un chauffe-eau, sachant que :

- Le ballon a un volume de 300 L
- Sa puissance électrique est de 3000 W
- Son coefficient de refroidissement est de 0,19 Wh/K/L/jour
- Le ballon commence plein d'eau à 10°C
- L'air ambiant est (et reste) à 19°C

2. Combien coûte cette chauffe en tarif EDF heures creuses ?

1. Soit $P(t)$ la puissance transmise à l'eau à l'instant t .

Soit $P_N = 3000 \text{ W}$ la puissance nominale du chauffe-eau.

Soit $C_R = 0.19 \text{ Wh} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{jour}^{-1} \cdot \text{L}^{-1}$ le coefficient de refroidissement du chauffe-eau, à convertir en $\text{J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{L}^{-1}$ en divisant par 24.

Soit $V = 300 \text{ L}$ le volume du chauffe-eau.

Soit $M = 3 \cdot 10^5 \text{ g}$ la masse d'eau en gramme.

Soit $T(t)$ la température moyenne de l'eau à l'instant t .

Soit $T_A = 19^\circ\text{C}$ la température ambiante, et $T_0 = T(t_0) = 10^\circ\text{C}$ la température de l'eau à l'instant initial t_0 .

Soit $C_{H_2O} = 1 \text{ Cal} \cdot \text{g}^{-1} \cdot \text{K}^{-1} = 4,1868 \text{ J} \cdot \text{g}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ la capacité calorifique de l'eau.

On a :

$$P(t) = P_N - C_R \cdot V(T(t) - T_A) \quad (1)$$

On en déduit l'énergie $E(t)$ totale transmise à l'instant t depuis t_0 par intégration de (1):

$$E(t) = \int_{t_0}^t P(t) \cdot dt \quad (2)$$

Puis la température de l'eau $T(t)$:

$$T(t) = \frac{1}{C_{H_2O} \cdot M} \cdot E(t) + T_0 \quad (3)$$

Par dérivation de (3), on obtient :

$$T'(t) = \frac{1}{C_{H_2O} \cdot M} \cdot P(t) \quad (4)$$

$$T'(t) = -\frac{C_R \cdot V}{C_{H_2O} \cdot M} \cdot T(t) + \frac{P_N + C_R \cdot V \cdot T_A}{C_{H_2O} \cdot M} \quad (5)$$

On pose $m = -\frac{C_R \cdot V}{C_{H_2O} \cdot M}$ et $p = \frac{P_N + C_R \cdot V \cdot T_A}{C_{H_2O} \cdot M}$

(5) devient :

$$T'(t) = m \cdot T(t) + p \quad (6)$$

On reconnaît une équation différentielle du premier ordre, dont une solution est la fonction T définie sur \mathbb{R} par

$$T(t) = \left(T_0 + \frac{p}{m}\right) \cdot e^{mt} - \frac{p}{m}$$

Le temps t_F pour que l'eau atteigne la température $T(t_F) = T_F = 65^\circ\text{C}$ est :

$$t_F = \frac{1}{m} \ln \left(\frac{T_F + \frac{p}{m}}{T_0 + \frac{p}{m}} \right)$$

Application numérique : $t_F = 23\,373\text{ s} = 6\text{ h } 29\text{ min}$

2. L'énergie dépensée E_F pendant tout ce temps de chauffe t_F est :

$$E_F = P_N \cdot t_F = 19,5\text{ kWh}$$

Au prix EDF heure creuse de $0,127\text{ €/kWh}$, le prix total de chauffe est de $2,47\text{ €}$