

Guy ALARCON

Mathématiques, Lycée Louis-Le-Grand.

Texte et corrigé des exercices 1 à 20 figurant dans
le bulletin de rentrée de la PEEP.

Les exercices 1 à 9 sont inspirés du concours Kangourou. Plus que le résultat importe ici la façon dont on l'établit. Les exercices 10 à 20 sont des exercices de recherche.

Exercice 1. Un cycliste met 15 minutes pour se rendre à un point et revenir. Sa vitesse à l'aller est de 5 m/s et au retour de 4m/s. Déterminer la distance qui le sépare de ce point.

Solution. Le cycliste part de A pour se rendre au point B , après quoi il retourne au point A . Soit $d = AB$, on a :

$d = V_1 t_1$ et $d = V_2 t_2$, avec (V_1, t_1) (resp. (V_2, t_2)) vitesse et temps de parcours de A vers B (resp. de B vers A).

Alors :

$$t_1 = \frac{d}{V_1}, t_2 = \frac{d}{V_2} \text{ et } t_1 + t_2 = d \left(\frac{1}{V_1} + \frac{1}{V_2} \right).$$

Or $t_1 + t_2 = 15 \times 60 = 900$ en mesurant le temps en secondes, d'où :

$$d = \frac{900}{\frac{1}{4} + \frac{1}{5}} = \frac{20}{9} \cdot 900 = 2000.$$

La distance de A à B est donc de 2km.

Exercice 2. Un lycéen a supprimé un nombre parmi dix entiers consécutifs. La somme des entiers restants est alors 2006. Quel est le nombre supprimé ?

Solution. Notons $a \in \mathbb{Z}$ le plus petit élément de la liste considérée et b le nombre ôté par le lycéen. : $b \in \{a, a+1, \dots, a+9\}$. Soit $S = a + (a+1) + \dots + (a+9)$, alors :

$$S = 10a + (1 + 2 + \dots + 9) = 10a + 45, \text{ et}$$

$$10a + 45 - (a+9) \leq S - b \leq 10a + 45 - a, \text{ ou encore } 9(a+4) \leq S - b \leq 9(a+5).$$

Par hypothèse $S - b = 2006$, et comme $222 < \frac{2006}{9} < 223$, $a+4 \leq 222$ et $223 \leq a+5$ donc encore : $218 \leq a \leq 218$ c'est-à-dire $a = 218$. Il en résulte que $b = S - 2006 = 10a + 45 - 2006 = 10 \times 218 + 45 - 2006 = 219$.

Le nombre ôté de la liste est donc 219.

Exercice 3. Calculer la somme : $S = 100^2 - 99^2 + 98^2 - 97^2 + \dots + 2^2 - 1^2$.

Solution. $S = \sum_{k=1}^{50} (2k)^2 - (2k-1)^2$ où le signe $\sum_{k=1}^{50} (2k)^2 - (2k-1)^2$ indique que l'on fait la somme des termes $(2k)^2 - (2k-1)^2$ l'indice entier k allant de 1 à 50.

Or : $(2k)^2 - (2k-1)^2 = 4k - 1$, donc $S = \sum_{k=1}^{50} 4k - 1 = 4 \sum_{k=1}^{50} k - 50$. Comme $\sum_{k=1}^{50} k = \frac{50 \times 51}{2}$, on obtient :

$$S = 5050.$$

Exercice 4. Un vendeur doit déterminer le prix optimum d'un article. Il dispose des données suivantes : si le prix de l'article est de 75 euros, il vendra 100 de ces articles. Chaque fois que le prix de vente est augmenté de 5 euros, 20 articles de moins sont vendus. Chaque fois que le prix de vente est diminué de 5 euros, 20 articles de plus sont vendus. Le coût de production de cet article est de 30 euros. Quel est le prix de vente optimum (celui qui rend le bénéfice maximum) ?

Solution. Soit $n \in \mathbb{N}$ le nombre d'articles vendus pour un prix p . Posons $\Delta n = n - 100$ et $\Delta p = p - 75$.

Par hypothèse Δn est fonction linéaire de Δp et $\Delta n = -4\Delta p$, donc

$$n = -4(p - 75) + 100 = 4(100 - p).$$

$p \leq 100$ puisque $n \geq 0$ et $p \geq 30$ pour vendre l'article sans perte. On cherche donc $p \in [30, 100]$ tel que le bénéfice $b(p)$ à savoir $np - 30n = n(p - 30) = 4(100 - p)(p - 30)$ soit maximum.

Posons $\alpha = 100 - p$ et $\beta = p - 30$. On a $\alpha + \beta = 70$. De plus $(\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta = (\alpha - \beta)^2 \geq 0$, donc $4\alpha\beta \leq (\alpha + \beta)^2$ avec égalité si et seulement si $\alpha = \beta$. Il en résulte que $b(p) \leq 70^2$, la valeur 70^2 étant atteinte pour $\alpha = \beta$ c'est-à-dire $p = 65$.
Le prix de vente optimum est donc égal à 65 euros.

Remarque. Nous avons établi en cours de route le résultat suivant:

Soient α et β deux réels positifs¹, $g = \sqrt{\alpha\beta}$, $m = \frac{\alpha+\beta}{2}$, alors $g \leq m$ avec égalité si et seulement si $\alpha = \beta$.

g est la *moyenne géométrique* de α et β , tandis que m est leur *moyenne arithmétique*. Le résultat obtenu s'énonce encore:

La moyenne géométrique de deux nombres réels positifs est inférieure ou égale à leur moyenne arithmétique avec égalité si et seulement s'ils sont égaux.

Exercice 5.

Déterminer la différence entre l'aire hachurée et l'aire grisée.

Solution. Notons a_1, a_2 les aires hachurées dans les carrés de côté 11 et 7 respectivement, b_1, b_2 les aires grisées dans les carrés de côté 9 et 5 respectivement.

Soit α l'aire de l'intersection des domaines carrés de côté 11 et 9, alors:

$$11^2 = a_1 + \alpha \quad \text{et} \quad 9^2 = b_1 + \alpha, \text{ donc } 11^2 - 9^2 = a_1 - b_1.$$

On montre de même que: $7^2 - 5^2 = a_2 - b_2$, d'où:

$$(a_1 + a_2) - (b_1 + b_2) = 11^2 - 9^2 + 7^2 - 5^2 = 2.20 + 2.12 = 64.$$

La différence entre l'aire hachurée et l'aire grisée mesurée en unités d'aire est donc égale à 64.

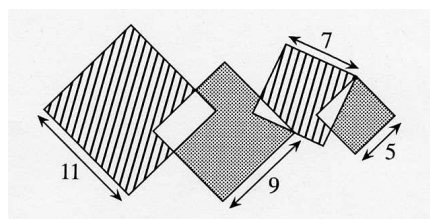


Figure 1: exercice 5.

Exercice 6. Un entier naturel non nul est écrit sur chacune des faces d'un cube, et sur chaque sommet on écrit le produit des nombres inscrits sur les trois faces adjacentes à ce sommet. La somme des nombres placés au sommet du cube est 70. Déterminer la somme des nombres placés sur les faces du cube.

Solution. Notons F_1, F_2, F_3 trois faces du cube et F'_1, F'_2, F'_3 les faces qui leur sont respectivement opposées. Pour $1 \leq i \leq 3$, soit a_i le nombre inscrit sur la face F_i et a'_i le nombre inscrit sur la face F'_i . La somme des nombres affectés aux sommets de la face F_1 est:

$$a_1(a_2a_3 + a_2a'_3 + a'_2a_3 + a'_2a'_3) = a_1(a_2 + a_3)(a'_2 + a'_3).$$

La somme des nombres affectés à tous les sommets du cube (ce sont les sommets de F_1 ou de F'_1) est donc:

$$a_1(a_2 + a_3)(a'_2 + a'_3) + a'_1(a_2 + a_3)(a'_2 + a'_3) = (a_1 + a'_1)(a_2 + a_3)(a'_2 + a'_3), \text{ d'où:}$$

$$(a_1 + a'_1)(a_2 + a_3)(a'_2 + a'_3) = 70 = 2.5.7.$$

Aucun des $a_i + a'_i$ n'est composé (par exemple égal à 2.5 ou 2.5.7), car le produit des deux autres serait un nombre premier ou 1. Il existerait alors un indice j , $1 \leq j \leq 3$ tel que $a_j + a'_j = 1$ ce qui contredit $a_j + a'_j > 1$ sachant que a_j et a'_j sont par hypothèse des entiers naturels non nuls. Donc à l'ordre près:

$$a_1 + a'_1 = 2, a_2 + a'_2 = 5 \quad \text{et} \quad a_3 + a'_3 = 7.$$

Il en résulte que: $a_1 + a_2 + a_3 + a'_1 + a'_2 + a'_3 = 2 + 5 + 7 = 14$.

La somme des nombres placés sur les faces du cube est 14.

¹Il suffit qu'ils soient de même signe.

Exercice 7. On commence par écrire dans des cases une suite de 200 zéros. Puis on ajoute 1 au nombre écrit dans chaque case, puis on ajoute 1 aux nombres d'une case sur deux (à partir de la seconde), puis on ajoute 1 aux nombres d'une case sur 3 (à partir de la troisième) et ainsi de suite. Le jeu cesse après avoir rajouté le dernier 1 au nombre de la 200^{ème} case. Déterminer le nombre écrit dans la 120^{ème} case.

Solution. Les cases étant numérotées de 1 à 200, on ajoute 1 à la case a ($a \in \mathbb{N}$, $1 \leq a \leq 200$) autant de fois qu'il y a de diviseurs de a .

Or $120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$. Les diviseurs de 120 sont donc les entiers de la forme $2^a \cdot 3^b \cdot 5^c$ avec a, b, c des entiers naturels tels que:

$$a \leq 3, b \leq 1, c \leq 1 \quad (*)$$

Le nombre de triplets (a, b, c) d'entiers naturels vérifiant les conditions $(*)$ est:

$$(3+1) \cdot (1+1) \cdot (1+1) = 16.$$

A la fin du jeu, le nombre inscrit dans la 120^{ème} case est donc 16.

Exercice 8.

$IJKL$ est un rectangle tel que $IJ = 16$ et $JK = 12$. IKM est un triangle rectangle en K tel que $KM = 15$. Soit N le point d'intersection de (IM) et (KL) . Déterminer l'aire du triangle IKN .

Solution. D'après le théorème de Pythagore,

$$IK = \sqrt{IJ^2 + JK^2} = 4\sqrt{4^2 + 3^2} = 4.5 = 20.$$

Alors:

$$\frac{KM}{JK} = \frac{IK}{IJ} = \frac{5}{4} \quad (1)$$

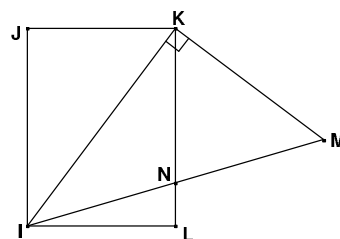


Figure 2: exercice 8

La proportion (1) assure que les triangles IJK et IKM respectivement rectangles en J et K sont semblables.

Alors

$$\widehat{JKI} = \widehat{KMI},$$

par conséquent

$$\widehat{IKN} = \widehat{KIN} \quad (2)$$

ces angles ayant respectivement pour complémentaires $\widehat{JKI}$ et $\widehat{KMI}$.

$\widehat{IKN}$ ayant pour complémentaires les angles $\widehat{NMK}$ et $\widehat{JKI}$ qui est égal à $\widehat{KMI}$, on a:

$$\widehat{NKM} = \widehat{KMI} = \widehat{KMN} \quad (3)$$

D'après (2) et (3), les triangles INK et KNM sont isocèles en N , d'où:

$$NI = NK = NM.$$

Alors N est milieu de $[IM]$ et d'après le théorème des milieux, la hauteur h issue de N du triangle IKN est égale à $\frac{KM}{2}$. Soit S l'aire du triangle IKN mesurée en unités d'aire, on a:

$$S = \frac{1}{2} IK \cdot h = \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot \frac{15}{2} = 75$$

L'aire du triangle IKN mesurée en unités d'aire est égale à 75.

Exercice 9.

Sur une étagère sont rangés 50 livres, certains de mathématiques, les autres de physique. Il n'y a pas deux livres de physique côte à côte, mais tout livre de mathématiques est à côté d'un autre livre de mathématiques. Parmi les phrases suivantes, une seule peut être fausse. Indiquer laquelle en le justifiant.

- a) Il y a au moins 32 livres de mathématiques.
- b) Il y a au plus 17 livres de physique.
- c) Il y a trois livres de mathématiques à la suite.
- d) S'il y a 17 livres de physique, alors il y a un livre de physique à l'une ou l'autre des extrémités de l'étagère.
- e) Sur 9 livres qui se suivent, il y a au moins 6 livres de mathématiques.

Solution. Nous noterons a le nombre de livres de mathématiques disposés sur l'étagère, b celui des ouvrages de physique, et r le nombre de *blocs*, c'est-à-dire le nombre de groupes de livres de mathématiques consécutifs sur l'étagère. Tout livre de mathématiques est à côté d'un autre livre de mathématiques, donc:

$$a \geq 2r \quad (1)$$

- *L'assertion a) est juste.* Supposons le contraire: $a \leq 31$. Alors d'après (1) $r \leq 15$. Le nombre de livres de physique séparant les blocs de livres de mathématiques est donc au plus $r + 1 = 16$. Alors:

$$a + b \leq 31 + 16 = 47, \text{ ce qui contredit l'hypothèse } a + b = 50.$$

Par conséquent $a \geq 32$.

- *L'assertion b) est juste.* Supposons $b > 17$, c'est-à-dire $b \geq 18$, alors: $r \geq 17$ et d'après (1), $a \geq 34$, donc $a + b \geq 34 + 18 = 52$, ce qui contredit $a + b = 50$.

Par conséquent $b \leq 17$.

- *L'assertion d) est juste.* Supposons le contraire. on a alors: $b = 17$ et $r = b + 1 = 18$, d'où d'après (1) $a \geq 36$, donc $a + b \geq 36 + 17 = 53$, ce qui infirme $a + b = 50$.

L'assertion d) est donc juste.

- *L'assertion e) est juste.* Supposons le contraire: il existe donc un groupe G de 9 livres consécutifs avec au plus 5 livres de mathématiques, donc au moins 4 livres de physique. Il y a au moins 3 blocs de livres de mathématiques séparant les livres de physiques appartenant à G . Le nombre de livres de mathématiques composant ces blocs est donc supérieur ou égal à $2 \times 3 = 6$ (voir l'argument établissant (1)), le nombre de livres de mathématiques appartenant à G est donc supérieur ou égal à 6, ce qui constitue une contradiction.

L'assertion e) est donc juste.

- *La seule assertion pouvant être fausse est donc c).* Montrons qu'elle peut effectivement l'être. Il suffit de prendre la disposition suivante sur l'étagère:

$$MPMP \dots MPM$$

où M représente un bloc de deux livres de mathématiques et P un livre de physique, avec $b = 16$, $r = 17$ et $a = 2r = 34$.

La seule assertion pouvant être fausse est donc c).

Exercice 10. A l'aide d'une cuillère à café, on prélève une cuillerée de calvados dans un tonneau qui en est rempli, que l'on verse dans une tasse de café, puis on prélève avec la même cuillère le contenu de la tasse que l'on verse dans le tonneau.

Quel est le récipient (tonneau ou tasse), s'il y en a un, qui contient le plus grand volume de liquide étranger²?

NB: bien entendu le café et le calvados forment un mélange d'eau et d'autres substances. On supposera ici que ces corps sont chacun constitués de molécules distinctes qui peuvent se mélanger mais qu'un démon de Maxwell peut séparer.

Solution. Soit V le volume de la cuillère. On verse donc le volume V de calvados dans la tasse de café. Soit v le volume de café prélevé dans la tasse. On prélève dans la même cuillerée le volume $V - v$ de calvados (voir l'hypothèse de séparabilité exposée dans le NB). Il reste donc le volume v de calvados dans la tasse de café ($V - (V - v) = v$), égal au volume de café versé dans le tonneau.

Les deux récipients contiennent donc le même volume de liquide étranger.

Exercice 11. Démontrer qu'un polyèdre convexe³ ayant un nombre impair de faces admet au moins une face formée d'un nombre pair de côtés.

Solution. Soient N le nombre d'arêtes du polyèdre, a le nombre des faces du polyèdre ayant un nombre impair d'arêtes et b celui des faces ayant un nombre pair de côtés. Une somme de a nombres impairs a la parité de a . Comptant le nombre d'arêtes du polyèdre face par face on obtient donc un nombre de même parité que a , le nombre des arêtes comptées dans les faces ayant un nombre pairs d'arêtes étant pair, comme somme de nombres pairs. Chaque arête étant commune à deux faces est comptée deux fois dans le décompte face par face, le nombre obtenu est donc $2N$, c'est-à-dire un nombre pair. a est donc pair, et comme $N = a + b$, b et N sont de même parité. N est impair par hypothèse, donc b est impair; par conséquent b est un entier non nul.

Il y a donc au moins une face de ce polyèdre ayant un nombre pair de côtés.

Exercice 12. On attribue arbitrairement à chaque point du plan la couleur rouge ou la couleur bleue. Démontrer qu'il existe au moins un triangle équilatéral monochrome (c'est-à-dire dont les trois sommets sont bleus ou bien rouges) dans ce plan.

Solution. Raisonnons par l'absurde et supposons qu'il n'existe aucun triangle équilatéral monochrome. Ce fait reste encore vrai si la couleur de chaque sommet est changée. Considérons le réseau de triangles équilatéraux de la figure 3:

deux sommets de ABC , soient A et B sont de même couleur, tandis que le troisième C est de l'autre couleur. Quitte à changer la couleur attribuée à chaque point du plan, on peut supposer A et B noirs; alors les points C et D sont rouges. Les triangles CDE et CDH sont équilatéraux, E et F sont donc noirs. Il en résulte que G et H sont rouges, donc DGH est un triangle équilatéral monochrome, ce qui contredit l'hypothèse.

Il existe donc au moins un⁴ triangle équilatéral monochrome.

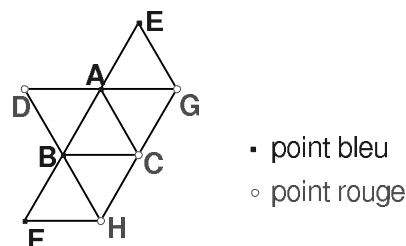


Figure 3: exercice 12

Exercice 13. Sur une sphère de rayon $r \in \mathbb{R}_+^*$ sont placés cinq points. Démontrer que la distance d'au moins deux de ces points⁵ est inférieure ou égale à $r\sqrt{2}$.

²Le café est considéré comme liquide étranger pour le tonneau et inversement le calvados pour la tasse.

³On entend par là que le polyèdre est inclus dans le même demi-espace déterminé par chacune de ces faces. Il en résulte que toute arête d'un tel polyèdre appartient à deux faces exactement; cette dernière remarque est utile pour l'exercice.

⁴En fait une infinité: il suffit d'appliquer le raisonnement précédent à une infinité de réseaux de triangles équilatéraux dont les sommets forment des ensembles deux à deux disjoints.

⁵Il s'agit de la longueur du segment ayant pour extrémités ces deux points.

Solution.

Deux cordes d'un cercle et par extension d'une sphère sont rangées dans le même ordre que les angles au centre qui les interceptent. Deux points A et B de la sphère de centre O et de rayon r tels que $AB = r\sqrt{2}$ sont tels que AOB est rectangle en O . Raisonnons par l'absurde et supposons que les distances mutuelles des cinq points de la sphère sont strictement supérieures à $r\sqrt{2}$. Alors faisant jouer à l'un de ces points le rôle du pôle sud, les quatre autres sont situés dans l'hémisphère nord. Deux de ces quatre points, soient A et B ont des longitudes qui diffèrent d'au plus de 90° , c'est-à-dire appartiennent au même quart d'hémisphère (σ). En rapportant l'espace au repère (O, I, J, K) où O est le centre de la sphère, K le pôle nord I et J les points d'intersection des méridiens bordant (σ) avec l'équateur, les coordonnées (x, y, z) de A et (X, Y, Z) de B sont des nombres positifs. Alors:

$$AB^2 = (X - x)^2 + (Y - y)^2 + (Z - z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + X^2 + Y^2 + Z^2 - 2(xX + yY + zZ) \leq 2r^2$$

puisque $x^2 + y^2 + z^2 = X^2 + Y^2 + Z^2 = r^2$ et $xX + yY + zZ \geq 0$.

Par conséquent $AB \leq r\sqrt{2}$, ce qui constitue une contradiction.

La distance d'au moins deux de ces cinq points est donc inférieure ou égale à $r\sqrt{2}$.

Exercice 14. Un rayon lumineux subit deux réflexions sur deux miroirs plans perpendiculaires.

1. A quelle condition le rayon sortant est-il parallèle au rayon incident?

NB: il est inutile de faire dans la suite l'hypothèse simplicatrice que le rayon incident est orthogonal à la droite d'intersection des plans des miroirs.

Le principe de Fermat fonde l'optique géométrique. Il peut s'énoncer ainsi: *Le trajet suivi par la lumière, pour aller d'un point à un autre, correspond un temps de parcours minimum*⁶.

2. Soit A un point quelconque du rayon incident et B un point quelconque du rayon sortant. Démontrer que le trajet optique du rayon pour aller de A à B répond au principe de Fermat.

3. On donne maintenant deux points A et B situés dans le même plan (Q) perpendiculaire à la droite d'intersection des plans des miroirs et dans le quart d'espace en regard des miroirs. Construire (faire la figure dans le plan (Q)) le rayon incident issu de A tel que le rayon sortant passe par B .

Solution.

1. Notons (P_1) et (P_2) les plans des deux miroirs, et (T) la droite d'intersection de ces deux plans. Rapportons l'espace au repère orthonormal (R) associé au quadruplet de points $(O; I, J, K)$ où: O est choisi arbitrairement sur (T) , J est un point de (T) tel que $OJ = 1$, $I \in (P_1)$ tel que $(OI) \perp (T)$ et $OI = 1$, enfin $K \in (P_2)$ tel que $(OK) \perp (T)$ et $OK = 1$.

Soit M un point de l'espace de coordonnées (x, y, z) relativement au repère (R) . Son image par la réflexion de plan (P_1) a pour coordonnées $(x, y, -z)$, et son image par la réflexion de plan (P_2) a pour coordonnées $(-x, y, z)$. L'application successive de ces deux réflexions (peu importe leur ordre) transforme M en M' de coordonnées $(-x, y, -z)$. Le milieu de $[MM']$ a pour coordonnées $(0, y, 0)$, donc appartient à $(Oy) = (T)$. De plus M et M' ayant même ordonnée y , la droite (MM') est perpendiculaire à (T) . M et M' sont donc symétriques par rapport à (T) .

L'application successive (on dit encore la *composée*) des deux réflexions de plan (P_1) et (P_2) coïncide donc avec σ la symétrie orthogonale d'axe (T) (on dit encore le retournement d'axe (T)). Le rayon sortant est donc l'image du rayon incident par σ . Il reste donc à étudier à quelle condition une droite de l'espace et son image par σ sont parallèles. Nous allons montrer qu'une condition nécessaire et suffisante pour cela est que cette droite soit parallèle ou orthogonale à (T) .

- Considérons d'abord une droite (D) orthogonale à (T) , c'est-à-dire située dans un plan (P) perpendiculaire à (T) . Tous les points de (D) se projettent orthogonalement sur (T) au même point U qui n'est autre que le point d'intersection de (P) et (T) . Le retournement d'axe (T) opère donc sur (D) comme la symétrie de centre U , par conséquent (D) a pour image par σ une droite qui lui est parallèle.

⁶En toute rigueur il faudrait dire stationnaire.

• Soit maintenant une droite (D) de l'espace non orthogonale à (T) et distincte de (T) . Soient A et B deux points distincts de (D) non situés sur (T) : notons a et b leurs images par projection orthogonale sur (T) , $A' = \sigma(A)$ et $B' = \sigma(B)$. On a $A \neq A'$ et $B \neq B'$, $\overrightarrow{Aa} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AA'}$ et $\overrightarrow{Bb} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BB'}$.

Si (AB) est parallèle à $(A'B')$, les points A, B, A', B' sont coplanaires, les points a et b milieux respectifs des segments $[AA']$ et $[BB']$ appartiennent au plan $(ABA'B')$ et les droites (AA') , (BB') perpendiculaires dans ce plan à (T) sont parallèles. Le quadrilatère $AA'B'B$ est donc un parallélogramme, donc $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'}$, donc encore $\overrightarrow{Aa} = \overrightarrow{Bb}$; $Aabb$ est donc un parallélogramme, d'où (AB) est parallèle à (T) . On obtient la condition nécessaire:

Pour qu'une droite (D) non orthogonale à (T) ait pour image par σ une droite qui lui est parallèle il faut que (D) soit parallèle⁷ à (T) .

Réciproquement, soit (D) une droite parallèle à (T) .

◦ Si $(D) = (T)$, alors l'image de (D) par σ est (D) puisque tous les points de (T) sont invariants par σ .

◦ Si $(D) \neq (T)$, σ opère dans le plan (Q) déterminé par les droites (D) et (T) comme la réflexion d'axe (T) dans ce plan. Nous savons que cette dernière transforme toute droite de (Q) parallèle à (T) en une droite parallèle.

En conclusion, σ le retournement d'axe (T) transforme (D) une droite de l'espace en une droite parallèle si et seulement si (D) est orthogonale ou parallèle à (T) .

Pour le problème d'optique considéré, le rayon doit se réfléchir (au sens physique) sur les deux plans, nous pouvons donc énoncer:

Le rayon sortant est parallèle au rayon incident si et seulement si le rayon incident est orthogonal à (T) et n'est parallèle ni à (P_1) ni à (P_2) .

2. Hormis les miroirs, le milieu dans lequel se propage le rayon est homogène. Le temps de parcours du rayon de A à B ne dépend que de la longueur de la ligne polygonale $AIJB$ où I resp. J sont les points de (P_1) resp. de (P_2) en lesquels s'effectue la réflexion sur les miroirs. Notons s_1 resp. s_2 les réflexions de plan (P_1) resp. (P_2) , puis $A_1 = s_1(A)$ resp. $B_2 = s_2(B)$. Alors $A_1 \in (IJ)$ puisque (IA) a pour image par s_1 la droite (IJ) ; de même $B_2 \in (IJ)$. De plus, $A_1I = AI$ et $JB_2 = JB$. Donc la longueur $AI + IJ + JB$ de la ligne polygonale $AIJB$ est égale à $A_1I + IJ + JB_2 = A_1B_2$ puisque I et J appartiennent au segment $[A_1B_2]$.

Soient I', J' deux points quelconques, le premier dans (P_1) , le second dans (P_2) . Le raisonnement effectué ci-dessus montre que la longueur de la ligne polygonale $AI'J'B$ est égale à: $A_1I' + I'J' + J'B_2$. Or l'inégalité triangulaire assure que: $A_1B_2 \leq A_1I' + I'J' + J'B_2$.

Les réflexions sur les deux miroirs disposent donc le rayon de telle sorte que le trajet optique de A à B s'effectue en un temps minimum. *Le trajet optique du rayon pour aller de A à B répond donc au principe de Fermat.*

Remarque: Des considérations analogues permettent de montrer que le principe de Fermat entraîne la loi de réflexion.

3. D'après la question 2, les points I et J où les rayons se réfléchissent sur le premier et le second miroir sont les points d'intersection de la droite (A_1B_2) (en fait du segment $[A_1B_2]$ dans le cas concret considéré où A et B sont donnés dans le quart d'espace en regard des faces réfléchissantes des miroirs) avec les plans (P_1) et (P_2) . Comme A et B sont donnés dans le plan (Q) perpendiculaire à (T) , toute la figure (voir figure 4) est contenue dans ce plan, les droites (d_1) et (d_2) étant les droites d'intersection de (Q) avec (P_1) et (P_2) respectivement. Sur la figure 4, le rayon incident dont on demande la construction est représenté en trait gras.

⁷La relation de parallélisme est entendue au sens large, une droite est parallèle à elle-même.

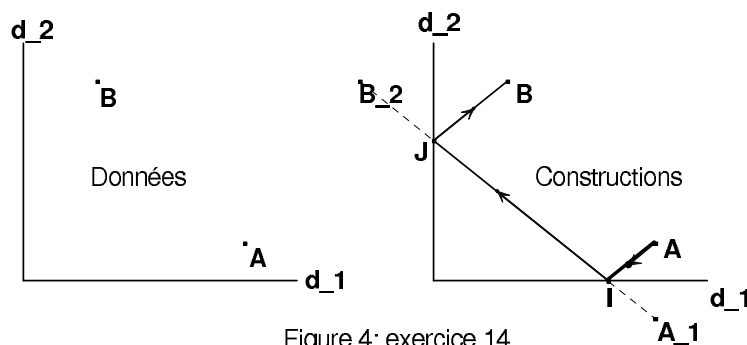


Figure 4: exercice 14

Exercice 15. Quinze nombres entiers naturels strictement compris entre 1 et 2006 sont deux à deux premiers entre eux. Démontrer que l'un d'entre eux au moins est premier.

Solution.

Remarque: Soit a un nombre entier strictement supérieur à 1 et p le plus petit diviseur premier de a . Si a n'est pas premier, il existe $q \in \mathbb{N}$, tel que $q > 1$ et $a = pq$. Tout diviseur de q étant diviseur de a , tout diviseur premier de q est donc supérieur ou égal à p , alors $q \geq p$, donc⁸ $a \geq p^2$.

Soient $a_1, a_2, \dots, a_{15}$ quinze nombres entiers strictement compris entre 1 et 2006 et deux à deux premiers entre eux. Notons $p_1, p_2, \dots, p_{15}$ les plus petits diviseurs premiers respectifs de $a_1, a_2, \dots, a_{15}$. Les nombres $p_1, p_2, \dots, p_{15}$ sont deux à deux distincts puisque $a_1, a_2, \dots, a_{15}$ sont deux à deux premiers entre eux. Supposons alors ces nombres numérotés de sorte que $p_1 < p_2 < \dots < p_{15}$. Le quinzième nombre premier étant 47, on a $p_{15} \geq 47$. Si aucun des nombres $a_1, a_2, \dots, a_{15}$ n'est premier (en particulier a_{15}), la remarque assure que: $a_{15} \geq 47^2$, donc, sachant que $47^2 = 2209$, $a_{15} > 2006$ ce qui est absurde.

Parmi quinze nombres entiers naturels strictement compris entre 1 et 2006 sont deux à deux premiers entre eux figure au moins un nombre premier.

Exercice 16.

1. Démontrer l'inégalité: Pour tout triplet de réels (α, β, γ) , $(\alpha + \beta + \gamma)^2 \geq 3(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)$, et préciser le cas d'égalité.

2. Établir alors l'inégalité:

pour tout triplet de réels strictement positifs, $\frac{b+c}{a^2} + \frac{c+a}{b^2} + \frac{a+b}{c^2} \geq 2\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)$, préciser le cas d'égalité.

Solution.

1. Il s'agit d'un cas particulier de l'inégalité de Cauchy-Schwarz dont l'exercice 17 fournit une autre illustration.

Remarquons que pour tous réels α, β, γ :

$$\begin{aligned} 3(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) - (\alpha + \beta + \gamma)^2 &= 2\alpha^2 + 2\beta^2 + 2\gamma^2 - 2\alpha\beta - 2\alpha\gamma - 2\beta\gamma \\ &= (\alpha - \beta)^2 + (\beta - \gamma)^2 + (\gamma - \alpha)^2. \end{aligned}$$

Le second membre de la seconde égalité est positif comme somme de carrés de réels, et s'annule si et seulement si chacun de ses termes est nul, autrement dit si et seulement si $\alpha = \beta = \gamma$.

En conclusion, pour tous réels α, β, γ , $(\alpha + \beta + \gamma)^2 \leq 3(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)$ avec égalité si et seulement si $\alpha = \beta = \gamma$.

⁸En d'autres termes, un nombre entier naturel a strictement supérieur à 1 est premier si et seulement si tout nombre premier inférieur ou égal à $\sqrt{a}$ n'est pas diviseur de a .

2. En ajoutant aux deux membres de l'inégalité à démontrer le réel $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$, cette dernière équivaut à l'inégalité:

$$(a + b + c) \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \right) \geq 3 \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) \quad (1)$$

Posons $\alpha = \frac{1}{a}$, $\beta = \frac{1}{b}$ et $\gamma = \frac{1}{c}$. L'inégalité (1) s'écrit alors sous la forme équivalente: pour tous réels α, β, γ strictement positifs,

$$\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} \right) \cdot 3 (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) \geq 9 (\alpha + \beta + \gamma) \quad (2)$$

Comme $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} > 0$, on a compte tenu de l'inégalité établie dans la question 1:

$$\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} \right) \cdot 3 (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) \geq \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} \right) \cdot (\alpha + \beta + \gamma)^2 \quad (3)$$

avec égalité si et seulement si $\alpha = \beta = \gamma$.

Or $\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} \right) \cdot (\alpha + \beta + \gamma) = 3 + \frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} + \frac{\beta}{\gamma} + \frac{\gamma}{\beta} + \frac{\gamma}{\alpha} + \frac{\alpha}{\gamma}$.

Les termes $\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha}$, $\frac{\beta}{\gamma} + \frac{\gamma}{\beta}$, $\frac{\gamma}{\alpha} + \frac{\alpha}{\gamma}$ se présentent sous la forme $x + \frac{1}{x}$ avec $x > 0$. Remarquons que:

$x + \frac{1}{x} - 2 = \left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} \right)^2 \geq 0$, donc $x + \frac{1}{x} \geq 2$ avec égalité si et seulement si $\sqrt{x} = \frac{1}{\sqrt{x}}$ ou encore si et seulement si $x = 1$. Par conséquent: $3 + \frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} + \frac{\beta}{\gamma} + \frac{\gamma}{\beta} + \frac{\gamma}{\alpha} + \frac{\alpha}{\gamma} \geq 3 + 2 + 2 + 2 = 9$, donc encore $\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} \right) \cdot (\alpha + \beta + \gamma) \geq 9$ avec égalité si et seulement si $\alpha = \beta = \gamma$. Il en résulte l'inégalité:

$$\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} \right) \cdot (\alpha + \beta + \gamma)^2 \geq 9 (\alpha + \beta + \gamma) \quad (4)$$

avec égalité si et seulement si $\alpha = \beta = \gamma$.

par transitivité de la relation d'ordre, on déduit de (3) et (4) l'inégalité (2) dont le cas d'égalité correspond à $\alpha = \beta = \gamma$.

En conclusion, pour tout triplet de réels strictement positifs (a, b, c) ,

$$\frac{b+c}{a^2} + \frac{c+a}{b^2} + \frac{a+b}{c^2} \geq 2 \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right),$$

avec égalité si et seulement si $a = b = c$.

Exercice 17. Pour tout réel x strictement positif, montrer:

$$1 + x^{2006} \geq \frac{(2x)^{2005}}{(1+x)^{2004}}.$$

Solution. Remarquons que pour tout réel a , $1 + a^2 - 2a = (1 - a)^2 \geq 0$, donc

$$2a \leq 1 + a^2 \quad (*)$$

• Appliquons (*) avec $a = \sqrt{x}$, on obtient $\frac{2\sqrt{x}}{1+x} \leq 1$, donc encore:

$$\left(\frac{2\sqrt{x}}{1+x} \right)^{2004} \leq 1 \quad (1)$$

• Appliquons (*) avec $a = x^{1003}$, on obtient

$$2x^{1003} \leq 1 + x^{2006} \quad (2)$$

Le produit membre à membre de (1) et (2) (tous les membres étant strictement positifs) conduit à :

$$1 + x^{2006} \geq \frac{(2x)^{2005}}{(1+x)^{2004}}.$$

Remarque: l'égalité dans (*) se produit si et seulement si $a = 1$. Pour $x > 0$, $1 + x^{2006} = \frac{(2x)^{2005}}{(1+x)^{2004}}$ si et seulement l'égalité a lieu dans 1) et (2) autrement dit si et seulement si $x = 1$.

Exercice 18. Soit S un ensemble de n points dans le plan (n est un entier supérieur ou égal à 3). On suppose que tout triplet de points de S forme un triangle d'aire inférieure ou égale à 1. Montrer qu'il existe un triangle d'aire inférieure ou égale à 4 contenant S .

Solution. Soit ABC un triangle dont les sommets appartiennent à S d'aire maximum σ . On a $\sigma \leq 1$. Pour tout $M \in S$, le triangle BCM a une aire inférieure ou égale à σ . La hauteur issue de M du triangle BCM est inférieure ou égale à celle issue de A dans le triangle ABC . Autrement dit la distance de M à (BC) est inférieure à la distance de A à (BC) . Le point M est donc situé dans la bande $\mathcal{B}_1$ limitée par les droites parallèles à (BC) passant par A et le symétrique A' de A par rapport au milieu de $[BC]$. Le même argument montre que tout point $M \in S$ est situé dans la bande $\mathcal{B}_2$ limitée par les droites parallèles à (CA) passant par B et le symétrique B' de B par rapport au milieu de $[CA]$ et dans la bande $\mathcal{B}_3$ limitée par les droites parallèles à (AB) passant par C et le symétrique C' de C par rapport au milieu de $[AB]$. Il est aisé de montrer que les points A, B, C sont les milieux respectifs des segments $[B'C']$, $[C'A']$ et $[A'B']$, et que l'intersection des trois bandes $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ et $\mathcal{B}_3$ est l'intérieur (au sens large) du triangle $A'B'C'$. Tout point de $M \in S$ appartient au domaine intérieur au triangle $A'B'C'$ dont l'aire est égale à 4σ puisque les triangles BCA', CAB' et ABC' sont isométriques à ABC . L'aire de $A'B'C'$ est donc majorée par 4.

Il existe donc un triangle d'aire inférieure ou égale à 4 contenant S .

Exercice 19. On part d'un triplet de nombres entiers relatifs et à chaque étape on applique une des opérations suivantes:

i) On permute deux éléments du triplet.

ii) On remplace le triplet (a, b, c) par le triplet $(a, b, 2a + 2b - c)$.

On part du triplet $(2, 5, 13)$. Est-il possible d'obtenir le triplet $(1, 3, 8)$ en répétant une des opérations i) ou ii)?

Ind. Dans les problèmes d'impossibilité, c'est le cas ici, on s'efforce de trouver une *invariant*: pour la question posée, on cherchera une propriété arithmétique du premier triplet conservée d'une étape à l'autre en appliquant i) ou ii) et pourtant non vérifiée par le triplet $(1, 3, 8)$.

Solution. Nous dirons qu'un triplet d'entiers relatifs a la propriété (*) si et seulement si deux quelconques de ses termes sont impairs, le terme restant étant un entier pair dont le reste dans la division par 4 est 2. Démontrons le lemme suivant:

Lemme: Soit (a, b, c) un triplet d'entiers relatifs ayant la propriété (*). Alors l'image de ce triplet par une des opérations i) ou ii) du texte est un triplet d'entiers relatifs ayant la propriété (*).

Démonstration:

1. Il est évident que l'opération i) conserve la propriété (*).

2. Examinons l'effet de l'opération ii) sur un triplet d'entiers relatifs (a, b, c) ayant la propriété (*).

- Si c est impair et l'un des deux nombres a ou b sont impairs, l'autre étant pair de reste 2 dans la division par 4:
 $2(a+b) - c$ est impair comme somme du nombre pair $2(a+b)$ et du nombre impair $-c$. Le triplet d'entiers relatifs $(a, b, 2a+2b-c)$ a donc la propriété (*).
- Si a et b sont impairs, c étant un entier pair de reste 2 dans la division par 4:
 $a+b$ est pair, donc $2(a+b)$ est un multiple de 4, autrement dit il existe $q' \in \mathbb{Z}$ tel que $2(a+b) = 4q'$.
 Comme il existe $q \in \mathbb{Z}$ tel que $c = 4q + 2$, $2(a+b) - c = 4q'' + 2$ avec $q'' = q' - q - 1$. Le triplet d'entiers relatifs $(a, b, 2a+2b-c)$ a donc la propriété (*).

□

Application: Le triplet de départ a la propriété (*). D'après le lemme, l'application répétée d'une des opérations *i*) ou *ii*) conserve la propriété (*). Le triplet d'arrivée aura donc nécessairement la propriété (*). Or $(1, 3, 8)$ n'a pas la propriété (*): deux de ses termes sont impairs mais le troisième est un multiple de 4 au lieu d'avoir pour reste 2 dans la division par 4.

*Il est donc impossible d'obtenir le triplet $(1, 3, 8)$ en répétant une des opérations *i*) ou *ii*) à partir du triplet $(2, 5, 13)$.*

Exercice 20. Neuf personnes sont assemblées et constatent que dans tout groupe de trois personnes participant à cette réunion au moins deux se connaissent.

Démontrer qu'il existe un groupe d'au moins quatre personnes de cette assemblée tel que chaque membre de ce groupe connaît les autres membres de ce groupe.

Ind. On aura intérêt à représenter le problème par un graphe, ici un ensemble de 9 points représentant les personnes de l'assemblée, une arête de couleur noire joignant ces deux points indiquant que ces personnes ne se connaissent pas, une arête de couleur rouge indiquant qu'elles se connaissent. On pourra démontrer le lemme (proposition auxiliaire) suivant: dans tout graphe formé de 6 points reliés deux à deux par des arêtes rouges ou noires, il existe au moins un triangle monochrome.

Commentaire: La clé de l'exercice (celle qui explique sa conception, car la solution qui suit n'utilise en rien les connaissances exposées dans ce commentaire) est fournie par les nombres de Ramsey. (m, n) étant un couple d'entiers naturels donné on note $R(m, n)$ (le R est pour Ramsey) le plus petit entier naturel N , tels que pour tout graphe complet⁹ de N sommets, et toute façon de colorier ses arêtes en noir ou rouge, il existe un sous-graphe complet du premier de m sommets dont toutes les arêtes sont noires ou un sous-graphe complet du premier de n sommets dont toutes les arêtes sont rouges. On démontre que $R(3, 4) = 9$. dans l'exercice 20, il n'y a pas par hypothèse de sous-graphe complet de 3 sommets dont les arêtes sont noires, puisque parmi trois personnes quelconques de cette assemblée au moins deux se connaissent. Reste donc la seconde option: il existe un sous-graphe complet de 4 sommets dont toutes les arêtes sont rouges, autrement dit il existe un groupe de quatre personnes (ou plus) de cette assemblée tel que chaque membre de ce groupe connaît les autres membres de ce groupe. La remarque montre que 9 est le nombre minimum de personnes pour assurer cette propriété. On peut produire un contre-exemple avec un graphe de 8 points situés sur un cercle: joindre par une arête rouge chaque point aux points voisins et aux points adjacents à ses voisins, toutes les autres arêtes du graphe étant noires. On constate qu'il n'y a aucun sous-graphe complet de 4 sommets dont toutes les arêtes sont rouges.

Solution.

Lemme: Dans tout graphe formé de 6 points reliés deux à deux par des arêtes rouges ou noires, il existe au moins un triangle monochrome.

⁹Un graphe complet est la donnée d'un ensemble des points (appelés sommets du graphe) et de toutes les arêtes joignant deux à deux les sommets distincts.

Démonstration: Quitte à changer la couleur de chaque arête du graphe, on peut supposer que d'un sommet du graphe que nous numérotions 6, sont issues au moins 3 arêtes rouges. Numérotions 1, 2, 3 les sommets du graphe tels que les arêtes $[1, 6]$, $[2, 6]$ et $[3, 6]$ sont rouges. Alors deux cas se présentent:

- Soit les arêtes du triangle 123 sont toutes noires et ce triangle est monochrome.
 - Soit au moins une arête du triangle 123 est rouge, par exemple $[1, 2]$, et le triangle 126 est monochrome.
- Nous avons montré que le graphe contient au moins¹⁰ un triangle monochrome. □

Considérons alors le graphe $\mathcal{G}$ de 9 points représentant les 9 personnes de cette assemblée avec les conventions de couleurs formulées dans l'indication. Deux cas se présentent:

1. Soit il existe un sommet s de $\mathcal{G}$ d'où sont issues au moins 6 arêtes rouges. Considérons le sous-graphe Γ de $\mathcal{G}$ dont les sommets sont 6 extrémités¹¹ d'arêtes rouges issues de s . D'après le lemme, Γ contient un triangle monochrome, soit abc . Puisque parmi trois personnes quelconques de cette assemblée au moins deux se connaissent, tout triangle du graphe $\mathcal{G}$ a au moins une arête rouge. Le triangle abc est donc monochrome rouge. Alors le graphe complet de sommets, a, b, c, s est monochrome rouge.
2. Soit de tout sommet du graphe $\mathcal{G}$ sont issues au plus 5 arêtes rouges, donc au moins 4 arêtes noires. Soit donc s un sommet quelconque de $\mathcal{G}$ et a, b, c, d quatre autres sommets distincts tels que les arêtes $[sa]$, $[sb]$, $[sc]$ et $[sd]$ sont noires. Alors x et y étant deux éléments quelconques et distincts de l'ensemble $\{a, b, c, d\}$, l'arête $[xy]$ est rouge puisque par hypothèse le triangle sxy a au moins une arête rouge et que les arêtes $[sx]$ et $[sy]$ sont noires. Le graphe complet de sommets a, b, c, d est donc monochrome rouge.

Nous avons montré que le graphe $\mathcal{G}$ contient un sous-graphe complet d'au moins 4 sommets dont toutes les arêtes sont rouges. Autrement dit:

Il existe un groupe d'au moins quatre personnes de cette assemblée tel que chaque membre de ce groupe connaît les autres membres de ce groupe.

— — — — —

¹⁰En fait il en existe au moins 2, mais nous n'avons pas besoin de ce résultat plus achevé.

¹¹deux à deux distinctes et distinctes de s .